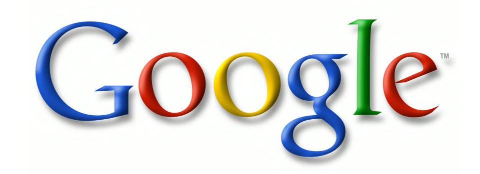




Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Drei und dreifsigster Band.

In vier Heften.

Mit vier lithographirten Tafeln.

Berlin, 1846.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des drei und dreifsigsten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br.)

---

§. 1.

Die Facultäten sind bekanntlich von grosser Wichtigkeit in der Mathematik. *Vandermonde* gebührt das Verdienst, auf sie als auf eine besondere Art von Irrationalgrössen (Mémoire sur les irrationelles de differens ordres avec une application au cercle, in Hist. d. l'acad. roy. des Sciences An. 1772. Pg. 489. u. ff.) aufmerksam gemacht zu haben. Nach ihm hat *Kramp* (Analyse d. réfractions astron. et terr. Chp. III.) ein besonderes Capitel ihrer Untersuchung gewidmet und sie eigentlich in die Mathematik eingeführt. Aus dieser Abhandlung ergab sich ihre Bedeutung für die Analysis. Es kamen nun mehrere Mathematiker auf sie zurück; so *Legendre* (Exercices de calcul intégral T. I. Pg. 277. u. ff. T. II. Pg. 1. u. ff.); *Bessel* (Ueber die Theorie der Zahlenfacultäten im Königsberger Archiv für Natur-Wissenschaft und Mathematik 1r Bd. S. 241. u. ff.), *Gauss* (Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. in Comment. Soc. reg. scient. Götting. Vol. II, ad. A. 1811—1813); *Crelle* (Versuch einer allgemeinen Theorie der analytischen Facultäten und: Mémoire sur la théorie des puissances, des fonctions angulaires et des facultés analytiques s. dieses Journ. 7r Bd.); *Eytelwein* (Grundlehren der höhern Analysis 1r Bd. S. 551. u. ff. 2r Bd. S. 672. u. ff.), und Andre.

Es konnte nicht fehlen, dass unter der Pflege so ausgezeichneter Männer dieser Zweig der Mathematik sehr gefördert wurde, und hievon gebührt *Kramp* gewiss ein nicht unbedeutender Theil des Verdienstes. Er ging von dem Gedanken aus, die Facultäten als eine besondere Art von Functionen zu behandeln und die für sie geltenden Gesetze zu entwickeln, also ihre Theorie zu gründen. Er theilte sie, folgerecht und nach Analogie der Potenzen, in Facultäten mit positiven und negativen, ganzen und gebrochenen Exponenten ein und entwickelte für diese speciellen Fälle die nöthigen Gesetze; aber für jeden ein-

zelnen Fall selbst wieder auf speciellem Wege. Die von ihm gefundenen Resultate stehen daher unter sich isolirt und entbehren eines allgemeinen, sie alle umfassenden Gesetzes und des innern Zusammenhanges. Die Arbeiten von *Legendre* und *Gauss* haben die Anwendung der Facultäten auf anderweitige Entwicklungen zum Zwecke. Daher kommen sie in dem eben berührten Puncte nicht direct, aber bei der Untersuchung der Facultäten immer deshalb in Betracht, weil diese sich auch über die zu Anwendungen benutzten besondern Fälle zu erstrecken hat. *Bessel* nahm die von *Kramp* aufgefasste Idee in der angeführten Abhandlung wieder auf, und der Zweck seiner Untersuchung ist, die in *Kramps* Arbeit vorkommenden Mängel zu verbessern und zu berichtigen. *Crelle* stellte zuerst eine *allgemeine* Theorie dieser Gebilde auf. *Eytelwein* gab in seiner Analysis die vor ihm in diesem Gebiete gewonnene Ausbeute im Zusammenhange wieder.

Wenn ich es nun unternehme, die Facultäten näher zu untersuchen, so geschieht es hauptsächlich aus dem Grunde, weil ich glaube, dass das schon von *Kramp* gesuchte und von *Crelle* ausgesprochene allgemeine Gesetz sich auf eine ungemein einfache Weise gewinnen lässt, dass dadurch die Theorie der Facultäten auf eine eben so allgemeine als einfache Basis zurückgeführt werden kann, wie es bei dem Binomium geschieht und bekannt ist, und dass sich überhaupt die Anwendbarkeit dieser Functionen in den verschiedenen Zweigen der Analysis um ein Bedeutendes steigern lässt; wie es sich im Folgenden zeigen wird.

Vor Betrachtung des Gegenstandes selbst ist aber auf einen Uebelstand aufmerksam zu machen nöthig, der vielleicht nirgend störender auftritt, als hier: nämlich auf die Verschiedenheit der *Zeichen*, deren sich die Mathematiker in diesem Zweige der Analysis bedient haben und noch bedienen. Ich stelle sie hier zusammen, um auf die Nothwendigkeit hinzuweisen, sich über eine bestimmte Bezeichnung zu verständigen.

Vandermonde bedient sich der Bezeichnung

$$1)\quad [p]^n = p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1);$$

Kramp der Bezeichnung

$$2)\quad a^{n|d} = a(a+d)(a+2d)\ldots(a+(n-1)d);$$

Legendre der Bezeichnung (Gamma von n)

$$3)\quad \Gamma(n) = 1.2.3.4\ldots(n-1);$$

Gauss der Bezeichnung

$$4)\quad \Pi(n) = 1.2.3.4\ldots(n-1)n;$$

Crelle der Bezeichnung

$$5)\quad (a,+d)^n = a(a+d)(a+2d) \ldots (a+(n-1)d).$$

In den Annalen von *Gergonne* (T. III.) hat *Kramp* später sich des folgenden Zeichens bedient:

$$6)\quad n! = 1.2.3.4 \ldots n.$$

Bessel behält die von *Kramp* unter No. 2. aufgestellte Bezeichnung bei. Es ist in der That sehr zu bedauern, dass man sich hier noch nicht über den Gebrauch eines Zeichens vereinigt hat. Offenbar sind die Bezeichnungen No. 1, 3, 4 und 6 zu speciell; denn man kann durch sie nur Facultäten von bestimmter Zunahme und von der Basis 1 ausdrücken. Sie sind dabei etwas unbeweglich, wenn man auch von der in ihnen liegenden Willkür absehen wollte. Die Zeichen No. 2. und 5. sind allgemeiner, dienen bequemer und besser zur Darstellung allgemeiner Gesetze, knüpfen den Begriff der Facultäten an den schon bekannten der Potenzen und stellen ihn sogar dem Auge deutlich dar; was namentlich bei No. 1, 3, 4 und 6 ganz vermisst wird. Um nun zu einer, mit dem Begriffe und den bis jetzt allgemein in der Mathematik eingeführten Symbolen übereinstimmenden Bezeichnungsweise für die Facultäten zu gelangen, mögen folgende Bemerkungen dienen.

In der Facultät

$$7)\quad a(a+d)(a+2d)(a+3d) \ldots (a+(n-1)d)$$

kommen drei Grössen in Betracht: die *Basis* (a), die *Zunahme* (d) und der *Exponent* (n). Nach der bei den Potenzen allgemein angenommenen Bezeichnungsweise hat die *Basis* und der *Exponent* eine bestimmte Stellung. Sie muss beibehalten werden, so lange die ursprüngliche Anlage besteht und die Entwicklung folgerichtig fortgebildet werden soll. Es kann sich daher nur um die Stellung handeln, welche die *Zunahme* einzunehmen hat. Hier sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder kann sie an die Basis, oder an den Exponenten sich anschliessen. Diese beiden Fälle sind die No. 2. und 5., und man hat demnach bei folgerichtiger Durchführung nur zwischen diesen beiden zu entscheiden. Um dies zu thun, ist der Zusammenhang, in welchem die drei Elemente (a, n, d) einer Facultät zu einander stehen, zu betrachten.

Es liegt in (7.) deutlich vor Augen, dass *Exponent* und *Zunahme* als Factoren mit einander in Verbindung treten, während die *Basis* sich daran mit dem positiven oder negativen Zeichen anschliesst. Der Zusammenhang, in welchem *Zunahme* und *Exponent* zu einander stehen, ist demnach offenbar ein *engerer* als derjenige zwischen *Basis* und *Zunahme*. Die *Zunahme* hat

folglich auch eine solche Stellung einzunehmen, dass der eben bezeichnete *engere* Zusammenhang zwischen ihr und dem Exponenten sich ausspricht. Dies geschieht in der Darstellung No. 2. Alle weitern Entwicklungen, die sich im Folgenden für die Facultäten ergeben, stimmen mit diesen Bemerkungen überein und bestätigen dadurch ihre Richtigkeit; denn gleich bei der ersten Begründung (§. 2. und 3.) machen sich diese Bemerkungen entschieden geltend. Zu dieser Ansicht stimmt die Darstellung No. 5. nicht; denn nach ihr müsste die Zunahme in engerem Zusammenhange mit der Basis als mit dem Exponenten sein. Dazu kommt noch, dass gerade die Darstellung No. 2. *alle möglichen* Fälle, die in dem Folgenden bei Untersuchung der Facultäten in Betracht kommen, ganz bequem und zweckmässig darstellt; was theilweise die No. 5. nicht in gleichem Maasse vermag, und man müsste, damit No. 5. ein Gleiches leiste, Abänderungen und eine weitere Ausdehnung damit beziehungsweise vornehmen. Hierher gehören namentlich die Entwicklungen in §. 2., die dies erfordern würden. *)

Dies sind in Kürze die Gründe, die uns maassgebend für die Beibehaltung des Zeichens $a^{n|d}$ als desjenigen zu sein scheinen, welches den Begriff der Facultät am richtigsten andeutet. Zugleich liegen darin die Ursachen, warum keines der Zeichen No. 1, 3, 4 und 6 hier im Folgenden aufgenommen ist; namentlich auch deshalb, weil die Zeichen No. 1, 3, 4 beschwerlicher zu schreiben sind als $1^{n|1}$ und der weitern Entwicklung der Theorie der Facultäten eher hemmend als fördernd entgegen zu treten scheinen.

Die Form der Facultät $a^{n|d}$ enthält drei von einander unabhängige Grössen. Sie eignet sich ganz besonders zur Entwicklung der von den Facultäten gültigen allgemeinen Gesetze. *Kramp* und *Crelle* haben daher auch die Facultäten unter dieser *allgemeinen* Form untersucht. Dasselbe wird auch im Folgenden geschehen. Der Gedanken liegt zwar nahe, dass es zweckmässiger sein möchte, eine Function blos von *einer* veränderlichen Grösse, als von *dreien*, in die Analysis einzuführen, wie *Gauss* (Disq. gener. circa ser. inf. etc. §. 22.) vorgeschlagen hat, und die Facultäten nach §. 11. auf folgende Form zu bringen:

$$a^{n|d} = d^n \frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = \frac{d^n \Pi(\frac{a}{d}+n-1)}{\Pi(\frac{a}{d}-1)}.$$

*) Anm. des Herausgebers dieses Journals. Man sehe dessen Gegenbemerkungen zu den obigen Erinnerungen des Herrn Verfassers gegen die Bezeichnungsart $(a, +d)^n$ in diesem Journal am Ende des ersten Abschnitts der gegenwärtigen Abhandlung Bd. 33. Heft 1.



Dadurch ist jedoch nur die Gestalt, nicht die Aufgabe geändert: denn die Zahl der veränderlichen Grössen ist dieselbe geblieben; die Form aber ist nicht einfacher geworden.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns nun zu dem Gegenstande selbst.

§. 2.

Wie über *Bezeichnung*, so hat man sich auch noch nicht über den *Begriff* von Facultät verständigt. *Kramp* giebt folgende Definition von der Facultät: „Un produit dont les facteurs constituent une progression arithmétique" (Anal. d. réfr. Pg. 46.). Diese Definition giebt den Begriff einer Facultät mit negativem Exponenten *nicht* und passt offenbar *nicht* auf Facultäten mit gebrochenen Exponenten. Eine andere Definition giebt *Kramp* nicht. *Crelle* stellt in seiner Theorie der analytischen Facultäten S. 155. u. ff. eine Definition auf, um alle besondern Fälle zu vertreten. *Eytelwein* sagt (Analysis 2r Thl. §. 624. S. 674.): „Für diese (Facultäten mit gebrochenen Exponenten) ist zwar eben so wenig als für negative Exponenten eine Erklärung gegeben worden".

Nach unserer Ansicht ist es *nicht nöthig*, eine Definition des Begriffs von Facultät aufzustellen, welche *alle* besonderen Fälle umfasst. Die Facultäten theilen sich nach unserm Dafürhalten, wie die Potenzen und Wurzelgrössen, in zwei unter sich verschiedene Dinge, die ungeachtet ihrer Verschiedenheit dennoch den gleichen *Bildungsgesetzen* unterliegen. Wir werden daher im Folgenden zwischen den Facultäten mit ganzen und mit gebrochenen positiven oder negativen Exponenten unterscheiden und in den einzelnen Fällen die nöthigen Begriffe entwickeln. Es ist also mit den Elementen zu beginnen.

Gewöhnlich wird unter einer Facultät mit *positivem* Exponenten ein *Product* verstanden, dessen Factoren um eine und dieselbe Grösse zu- oder abnehmen. Halten wir vorerst diesen Begriff fest, so ergeben sich nach der Beschaffenheit der Zunahme folgende zwei Ausdrücke:

1) $a^{n|+d} = a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots\ldots(a+(n-1)d)$
$\qquad = a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+nd-d).$

2) $a^{n|-d} = a(a-d)(a-2d)(a-3d)\ldots\ldots(a-(n-1)d)$
$\qquad = a(a-d)(a-2d)\ldots\ldots(a-nd+d).$

Man kann nun die so eben erhaltenen Facultäten um weitere m Factoren,

deren Zunahme $\pm k$ ist, wachsen lassen. Dies wird auf Darstellungen führen, die wir nach dem in §. 1. Gesagten auf folgende Weise ausdrücken:

$$3)\quad a^{n|d+m|k} = a(a+d)(a+2d)\dots(a+(n-1)d)$$
$$\times(a+(n-1)d+k)(a+(n-1)d+2k)\dots(a+(n-1)d+mk)$$
$$= a^{n|d}(a+(n-1)d+k)^{m|k},$$

$$4)\quad a^{n|d+m|-k} = a(a+d)(a+2d)\dots(a+(n-1)d)$$
$$\times(a+(n-1)d-k)(a+(n-1)d-2k)\dots(a+(n-1)d-mk)$$
$$= a^{n|d}(a+(n-1)d-k)^{m|-k},$$

$$5)\quad a^{n|-d+m|k} = a(a-d)(a-2d)\dots(a-(n-1)d)$$
$$\times(a-(n-1)d+k)(a-(n-1)d+2k)\dots(a-(n-1)d+mk)$$
$$= a^{n|-d}(a-(n-1)d+k)^{m|k},$$

$$6)\quad a^{n|-d+m|-k} = a(a-d)(a-2d)\dots(a-(n-1)d)$$
$$\times(a-(n-1)d-k)(a-(n-1)d-2k)\dots(a-(n-1)d-mk)$$
$$= a^{n|-d}(a-(n-1)d-k)^{m|k}.$$

Der Ausdruck $a^{n|\pm d+m|\mp k}$, welcher den Begriff einer auf eine weitere Factorenzahl ausgedehnten Facultät andeutet, ist ganz in der Sache und in der Analogie des Begriffes von der Potenz begründet. Man kann den Gedanken weiter fortführen, und es ergeben sich folgende allgemeine Darstellungen:

$$7)\quad a^{n|d+m|h+p|k\dots} = a^{n|d}(a+(n-1)d+h)^{m|h}(a+(n-1)d+mh+k)^{p|k}\dots$$
$$a^{n|d+m|h+p|k\dots} = a^{n|d}(a+(n-1)d+h)^{m|h}(a+(n-1)d+mh-k)^{p|-k}\dots$$
$$a^{n|d+m|h+p|-k\dots} = a^{n|d}(a+(n-1)d-h)^{m|-h}(a+(n-1)d-mh+k)^{p|k}\dots$$
$$a^{n|d+m|-h+p|-k\dots} = a^{n|d}(a+(n-1)d-h)^{m|-h}(a+(n-1)d-mh-k)^{p|-k}\dots$$
$$a^{n|-d+m|+h+p|k\dots} = a^{n|-d}(a-(n-1)d+h)^{m|h}(a-(n-1)d+mh+k)^{p|k}\dots$$
$$a^{n|-d+m|h+p|-k\dots} = a^{n|-d}(a-(n-1)d+h)^{m|h}(a-(n-1)d+mh-k)^{p|-k}\dots$$
$$a^{n|-d+m|h+p-k\dots} = a^{n|-d}(a-(n-1)d-h)^{m|-h}(a-(n-1)d-mh+k)^{p|k}\dots$$
$$a^{n|-d-m|h+p|-k\dots} = a^{n|-d}(a-(n-1)d-h)^{m|-h}(a-(n-1)d-mh-k)^{p|-k}\dots$$

Diese Darstellungen lassen sich in einen allgemeinen Ausdruck so zusammenfassen:

$$8)\quad a^{n|\pm d+m|\pm h+p|\pm k\dots} = a^{n|\pm d}(a\pm(n-1)d\pm h)^{m|\pm h}(a\pm(n-1)d\pm mh\pm k)^{p|\pm k}\dots,$$

Hier ist der Zeichenwechsel willkührlich. Die Factoren erscheinen in diesen Darstellungen zum Theil einzeln, zum Theil gruppenweise mit einander verbunden. Es zeigt sich nun deutlich, dass der oben aufgestellte Begriff für die hier gegebenen Formen nicht mehr passt. Der Begriff von einer Facultät wird aber leicht aufzustellen sein, wenn wir ihn so geben, dass durch ihn jeder einzelne Factor der Facultät genau bestimmt ist, oder ermittelt werden kann.

Um einen allgemeineren Begriff abzuleiten, bemerken wir (was ganz in dem Begriff der Facultäten liegt), dass

$$a = a^{1|d}, \qquad a = a^{1|h}, \qquad a = a^{1|k} \ldots.$$
$$(a+d) = (a+d)^{1|d}, \qquad (a+h) = (a+h)^{1|h}, \qquad (a+k) = (a+k)^{1|k} \ldots.$$
$$(a+2d) = (a+2d)^{1|d}, \quad (a+2h) = (a+2h)^{1|h}, \quad (a+2k) = (a+2k)^{1|k} \ldots.$$

u. s. w. ist. Demnach können die Facultäten auch in folgender Form dargestellt werden:

9) $$a^{n|\pm d} = a^{1|\pm d}(a \pm 1.d)^{1|\pm d}(a \pm 2.d)^{1|\pm d}(a \pm 3d)^{1|\pm d} \ldots (a \pm (n-1)d)^{1|\pm d}$$

$$a^{n|\pm d + m|\pm h} = a^{1|\pm d}(a \pm 1.d)^{1|\pm d} \ldots$$
$$(a \pm (n-1)d)^{1|\pm d}(a \pm (n-1)d \pm h)^{1|\pm h}(a \pm (n-1)d \pm 2h)^{1|\pm h} \ldots (a \pm (n-1)d \pm mh)^{1|\pm h}$$

u. s. w. Es bestimmt sich nun der Begriff so:

10) Eine Facultät ist ein Product von mehreren Factoren, von denen jeder einzelne zusammengesetzt ist: aus der *Grundgrösse* (*Basis*) und der *Summe der Producte* aus jeder Zunahme in die Anzahl der vorhergehenden, auf jene sich beziehenden Glieder; und ferner aus dem Producte der Zunahme in den Exponenten des Factors, um dessen Bestimmung es sich handelt.

Das Product der Zunahme in den Exponenten des Factors, um dessen Bestimmung es sich handelt, ist in dem vorliegenden Falle die Zunahme selbst. Diese Definition lässt sich auch so geben.

11) Eine Facultät ist ein Product aus mehreren Factoren. von denen jeder einzelne zusammengesetzt ist: aus der Grundgrösse und der Summe der Producte aus jeder Zunahme in die ihr zugehörige Factoren-Anzahl, wenn die erste Zunahme einmal hievon abgezogen wird.

Hiernach wird die erste Zunahme immer einmnl weniger als der Exponent angiebt, vorkommen. Die Darstellung der einzelnen Factoren unterliegt nun keiner Schwierigkeit. So hat der $(n+r)$te Factor in der Facultät $a^{n|\pm d + m|\pm h}$, wenn $r < m$ ist, folgende Form:

$$(a \pm (n-1)d \pm rh^{1|\pm h}.$$

Der $(n+m+r)$te Factor in der Facultät $a^{n|\pm d + m|\pm h + p|\pm k \ldots}$, wenn $r < p$ ist, hat die Form:

$$(a \pm (n-1)d \pm mh \pm r.k)^{1|\pm k}$$

u. s. w. Zugleich ziehen wir hieraus den Schluss:

12) Eine Addition der Exponenten einer Facultät von einer und derselben Grundgrösse deutet auf ein Vervielfachen der Factoren, oder einzelner Gruppen von Factoren untereinander; wie bei den Potenzen.

§. 3.

Wir untersuchen nun die im vorigen Paragraphen gegebenen Darstellungen näher und fragen: Können in den Darstellungen (3. bis 8. §. 2.) die Exponenten der Facultäten unter sich *versetzt* werden, ohne den Werth der Facultät zu ändern? Versetzen wir zu dem Ende in (3. §. 2.) die Exponenten sammt ihren Zunahmen, so erhalten wir folgende entwickelte Darstellung:

1) $a^{m|h+n|d}$

$$=a(a+h)(a+2h)....(a+(n-1)h)(a+(n-1)h+d)(a+(n-1)h+2d)....(a+(n-1)h+nd)$$
$$=a^{m|h}(a+(m-1)h+d)^{n|d}.$$

Es zeigt sich deutlich, dass der hier und der in (3. §. 2.) gefundene Werth ganz verschieden sind. Gleiches gilt von den übrigen im vorigen Paragraph gegebenen Entwicklungen. Hieraus ergibt sich folgender Satz:

2) Gehören mehreren Exponenten einer Facultät, die durch das positive Zeichen verbunden sind, verschiedene Zunahmen zu, so können die Exponenten ohne Werthänderung der Facultät *nicht* unter sich versetzt werden.

Nehmen wir die Zunahme unter sich *gleich*, aber mit verschiedenen *Zeichen* an, so ergeben sich folgende Darstellungen:

3) $a^{n|d+m|-d}$

$$=a(a+d)(a+2d)....(a+(n-1)d)(a+(n-1)d-d)(a+(n-1)d-2d)....(a+(n-1)d-md)$$

4) $a^{n|-d+m|+d}$

$$=a(a-d)(a-2d)....(a-(n-1)d)(a-(n-1)d+d)(a-(n-1)d+2d)....(a-(n-1)d+md).$$

Es zeigt sich auch hier klar, dass beide Darstellungen auf Verschiedenes führen. Ein Gleiches gilt, wenn wir das Gesagte auf die in (7. und 8. §. 2.) aufgestellten Facultäten anwenden. Dies führt zu dem Satze:

5) Gehört mehreren Exponenten einer Facultät eine und dieselbe, jedoch verschiedene Zeichen habende Zunahme zu, so können die Exponenten ohne Werthänderung der Facultät *nicht* unter sich versetzt werden.

In den in (2. und 5.) angedeuteten Fällen ist die Ordnung der Exponenten *nicht* gleichgültig. Untersuchen wir aber Facultäten von einerlei Basis und Zunahme, bei welchen kein Zeichenwechsel vorkommt, so wird sich ein anderes Gesetz herausstellen. Es ist nämlich

6) $a^{n|d+m|d}$

$$=a(a+d)(a+2d)....(a+(n-1)d)\times(a+nd)(a+(n+1)d)....(a+(n+m-1)d)$$

7) $a^{n|-d+m|-d}$

$$=a(a-d)(a-2d)....(a-(n-1)d)\times(a-nd)(a-(n+1)d)....(a-(n+m-1)d).$$

Wie nun auch die Anzahl der Einheiten in n und m beschaffen sein mag, so lässt sich die entwickelte Darstellung in (6. und 7.) ohne Werthänderung auch so umformen:

$$8)\quad a(a+d)(a+2d)\dots(a+(m-1)d)\times(a+md)(a+(m+1)d)\dots(a+(m+n-1)d) = a^{m|d+n|d},$$

$$9)\quad a(a-d)(a-2d)\dots(a-(m-1)d)\times(a-md)(a-(m+1)d)\dots(a-(m+n-1)d) = a^{m|-d+n|-d}.$$

Aus (6, 7, 8, 9) ergibt sich sofort:

$$a^{n|d+m|d} = a^{m|d+n|d}$$
$$a^{n|-d+m|-d} = a^{m|-d+n|-d}.$$

Diese Bemerkungen lassen sich leicht weiter auf Facultäten mit drei und mehr Exponenten bei einer und derselben Zunahme ausdehnen, und dies führt zu folgendem wichtigen Satze:

10) Gehört mehreren Exponenten, welche durch das positive Zeichen verbunden sind, dieselbe Zunahme mit dem nämlichen Zeichen zu, so können die Exponenten ohne Werthänderung der Facultät untereinander *beliebig versetzt werden*, oder: die Ordnung, in welcher die Exponenten untereinander verbunden werden, ist *gleichgültig*.

Dadurch werden folgende Ausdrücke gerechtfertigt:

$$a^{n|d+m|d+p|d}\dots = a^{m|d+n|d+p|d}\dots = a^{m|d+p|d+n|d}\dots = \dots$$
$$a^{n|-d+m|-d+p|-d\dots} = a^{m|-d+n|-d+p|-d\dots} = a^{m|-d+p|-d+n|-d\dots} = \dots$$

Aus (6, 7, 8 und 9) folgt leicht, dass man die Zahl der Einheiten, welche in den Exponenten der Facultät enthalten sind, auf einmal zusammenfassen und die Gesammtzahl auf die Zunahme beziehen kann. Dies rechtfertigt folgendes auf die Form der Facultäten sich beziehende Gesetz:

$$11)\quad a^{m|d+n|d+p|d+\dots} = a^{m+n+p+\dots|d}$$
$$a^{m|-d+n|-d+p|-d\dots} = a^{m+n+p+\dots|-d}.$$

Bringen wir hiemit das Gesetz (10) in Verbindung, so ist

$$12)\quad a^{m+n+p+\dots|\pm d} = a^{m+p+n+\dots|\pm d} = a^{p+m+n\dots|\pm d}$$

Die hieraus sich ergebenden entwickelten Ausdrücke sind

$$13)\quad a^{n+m+p\dots|\pm d} = a^{n|\pm d}(a\pm nd)^{m|\pm d}(a+(m+n)d)^{p|\pm d}\dots$$
$$= a^{m|\pm d}(a\pm md)^{n|\pm d}(a\pm(m+n)d)^{p|\pm d}\dots$$
$$= a^{p|\pm d}(a\pm pd)^{m|\pm d}(a\pm(p+m)d)^{n|\pm d}\dots$$

u. s. w. Die Zeichen sind hier gleichzeitig positiv und negativ zu nehmen. Ein besonderer Fall, welcher zu vielseitiger Anwendung dienen wird, ist folgender:

$$14)\quad a^{n|d}(a+nd)^{m|d} = a^{m|d}(a+md)^{n|d},$$
$$a^{n|-d}(a-md)^{m|-d} = a^{m|-d}(a-md)^{n|-d}.$$

Halten wir den besondern Fall fest, in welchem die Exponenten einer Facultät die nämliche Zunahme mit einerlei Zeichen haben, so bestimmt sich der Begriff einer Facultät dafür einfacher, wie folgt:

15) Eine Facultät ist ein Product aus mehreren Factoren, von welchen jeder aus der Grundgrösse und dem Producte der gemeinschaftlichen Zunahme in die Summe der Exponenten aller vorhergehenden Factoren besteht.

Einfacher werden die vorstehenden Ausdrücke, wenn die Exponenten einander gleich sind und ihre Anzahl $= r$ gesetzt wird. Dann giebt (13):

$$16)\quad a^{rm|d} = a^{r(m|d)} = a^{m|d}(a+md)^{m|d}(a+2md)^{m|d}\ldots(a+(r-1)md)^{m|d}$$
$$a^{rm|-d} = a^{r(m|-d)} = a^{m|-d}(a+md)^{m|-d}(a-2md)^{m|-d}\ldots(a-(r-1)md)^{m|-d}.$$

Diese Ausdrücke sind von folgendem Ausdrucke wohl zu unterscheiden:

$$17)\quad (a^{m|\pm d})^r = a^{m|\pm d}.a^{m|\pm d}.a^{m|\pm d}\ldots.$$

Die Gleichungen (15 und 16) lassen sich leicht umformen. Es ist nämlich $rm = mr$. Demnach wird

$$18)\quad a^{mr|\pm d} = a^{r|\pm d}(a\pm rd)^{r|\pm d}(a\pm 2rd)^{r|\pm d}(a\pm 3rd)^{r|\pm d}\ldots(a+(m-1)rd)^{r|\pm d}.$$

Entwickelt man (15), so ergibt sich

$$19)\quad a^{rm|d}$$
$$= a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots\ldots\ldots\ldots(a+(m-1)d)$$
$$(a+md)(a+(m+1)d)(a+(m+2)d)(a+(m+3)d)\ldots(a+(2m-1)d)$$
$$(a+2md)(a+(2m+1)d)(a+(2m+2)d)(a+(2m+3)d)\ldots(a+(3m-1)d)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a+(r-1)md)(a+(r-1)md+d)(a+(r-1)md+2d)(a+(r-1)md+3d\ldots(a+(rm-1)d)$$

und gruppirt man die Factoren in verticaler Richtung, so erhält man

$$20)\quad a^{rm|d} = a^{r|md}(a+d)^{r|md}(a+2d)^{r|md}(a+3d)^{r|md}\ldots(a+(m-1)d)^{r|md}.$$

Eben so aus (16)

$$21)\quad a^{rm|-d} = a^{r|-md}(a-d)^{r|-md}(a-2d)^{r|-md}(a-3d)^{r|-md}\ldots(a-m(-1)d)^{r|-md}.$$

Ferner ist aus (18)

$$22)\quad a^{rm|\pm d} = a^{m|\pm rd}(a\pm d)^{m|\pm rd}(a\pm 2d)^{m|\pm rd}(a\pm 3d)^{m|\pm rd}\ldots(a\pm(r-1)d)^{m|\pm rd}.$$

Man kann endlich die Facultät (15), da an jedem einzelnen ihrer Factoren das nämliche Verfahren, welches durch den Exponenten $m|d$ ange-

deutet ist, ausgeführt werden soll, dadurch umformen, dass man es auf alle Factoren zugleich bezieht. Hiedurch entsteht aus (15 und 16):

$$23) \quad a^{rm|d} = (a^{r|md})^{m|d},$$

$$24) \quad a^{rm|-d} = (a^{r|-md})^{m|-d}.$$

Aus (18) ergibt sich hiernach

$$25) \quad a^{mr|\pm d} = (a^{m|\pm rd})^{r|\pm d}.$$

Diese Gleichungen trennen die Operationen, welche die Entwicklung einer Facultät in rm Factoren vorschreibt, in zwei Abtheilungen und enthalten folgendes Gesetz:

26) Man kann die Factoren einer Facultät von rm Factoren und der Zunahme d zuerst in Hinsicht der Zunahme in r Factoren zerlegen und dann jeden einzelnen Factor m mal nach der Zunahme d wachsen lassen: oder man kann sie zuerst in Hinsicht der Zunahme rd in m Factoren zerlegen und dann jeden Factor r mal nach der Zunahme d wachsen lassen.

Aus (20, 21 und 22) ergeben sich demnach folgende Ausdrücke:

$$27) \quad a^{rm|\pm d} = (a^{m|\pm d})^{r|\pm md},$$

$$28) \quad a^{rm|\pm d} = (a^{r|\pm d})^{m|\pm rd}.$$

Diese Gleichungen enthalten folgendes Gesetz:

29) Man kann die Factoren einer Facultät von rm Factoren und der Zunahme d zuerst in m Factoren, welche um die einfache Zunahme (d) wachsen, zerlegen, und dann jeden einzelnen Factor r mal um die m fache Zunahme (md) wachsen lassen: oder man kann sie zuerst in r Factoren, die um die einfache Zunahme wachsen, zerlegen und dann jeden Factor m mal nach der r fachen Zunahme (rd) wachsen lassen.

Die Zahlen m und r sind von einander unabhängig. Die Sätze (16—29) zeigen, wie Facultäten zu Facultäten erhoben werden und schliessen ein allgemeineres Gesetz in sich, als dasjenige ist, welches von der Erhebung der Potenzen zu Potenzen gilt. Wir ziehen daraus folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$30) \quad (a^{r|\pm md})^{m|\pm d} = (a^{m|\pm rd})^{r|\pm d} = (a^{m|\pm d})^{r|\pm md} = (a^{r|\pm d})^{m|\pm rd}.$$

Hier sind die Zeichen gleichzeitig positiv oder negativ zu nehmen. Das Gesetz für die Erhebung der Potenzen zu Potenzen folgt daraus unmittelbar, wenn $d = 0$ gesetzt wird. Es ist alsdann

$$31) \quad (a^r)^m = (a^m)^r.$$

Von den hier mitgetheilten Gleichungen finden sich die Gleichungen (19 und 23) schon in dem Werke von *Crelle* (§. 72. Pg. 248. u. ff.). Er nennt diese Darstellungen „Factoriellen zweiter Ordnung".

§. 4.

So wie eine Potenz mit negativem Exponenten eine ein- oder mehrmalige Division der Einheit durch die Grundgrösse anzeigt: so wird auch eine Facultät mit negativem Exponenten auf die *Division* hinweisen. Die Formen, welche wir hier zu untersuchen und denen wir Bedeutnng beizulegen haben, sind:

$$a^{-n|d} \text{ und } a^{-n|-d}.$$

Dies wird den Begriff einer Facultät mit negativem Exponenten geben. Zur Erreichung dieses Zwecks gehen wir von den Gleichungen (1 und 2. §. 2.) aus und entfernen zuerst den letzten Factor (in 1.). Dies giebt

$$\frac{a^{n|d}}{a+(n-1)d} = a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(n-2)d = a^{n-1|d}.$$

Wir schaffen nun den zweitletzten Factor weg und erreichen dies, indem wir den eben ausgestossenen Factor um die Zunahme vermindern und durch den so verminderten Factor die erhaltene Facultät dividiren. Dies giebt

$$\frac{a^{n|d}}{(a+(n-2)d)(a+(n-1)d)} = \frac{a^{n-1|d}}{a+(n-2)d} = a(a+d)(a+2d)\ldots.(a+(n-3)d) = a^{n-2|d}.$$

Fährt man so durch Wegschaffung der Schlussfactoren aus den Facultäten fort, so gelangt man auf dem umgekehrten Wege, wie bei dem *Erzeugen* der Facultät mit positiven Exponenten geschah, der Reihe nach zu folgenden Ausdrücken:

$$\frac{a^{n-(n-2)|d}}{a+d} = a^{1|d} = a^{n-(n-1)|d}$$

$$\frac{a^{n-(n-1)|d}}{a} = 1 = a^{n-n|d} = a^{0|d}$$

$$\frac{a^{n-n|d}}{a-d} = \frac{1}{a-d} = a^{n-(n+1)|d} = a^{-1|d}$$

$$\frac{a^{n-(n+1)|d}}{a-2d} = \frac{1}{(a-2d)(a-d)} = a^{n-(n+2)|d} = a^{-2|d}$$

$$\frac{a^{n-(n+2)|d}}{a-3d} = \frac{1}{(a-3d)(a-2d)(a-d)} = a^{n-(n+3)|d} = a^{-3|d}$$

u. s. w. Diese Schlussweise führt leicht weiter. Sie steht mit der Natur der Facultäten in Einklang und giebt sofort folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$1)\quad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)(a-(n-1)d)\ldots.(a-2d)(a-d)} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}}.$$

Behandelt man die zweite Form der Facultäten mit negativem Exponenten ($a^{-n|-d}$) auf ähnliche Weise, nämlich so, dass man die wegzuschaffenden Factoren um die Zunahme vergrössert, so ergiebt sich der Ausdruck

$$2)\quad a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+nd)(a+(n-1)d)\ldots.(a+2d)(a+d)} = \frac{1}{(a+nd)^{n|-d}}.$$

Dies bestimmt den fraglichen Begriff wie folgt:

3) Eine Facultät mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruche, dessen Zähler die Einheit und dessen Nenner eine Facultät ist, welche die nämliche Zunahme und den nämlichen, jedoch positiven Exponenten hat, wie die ursprüngliche Facultät, deren Basis oder Grundgrösse (erster Factor) aber aus der Basis und dem Producte der Zunahme in den Exponenten der ursprünglichen Facultät besteht.

Nächst diesen Resultaten ziehen wir aus dem Vorhergehenden folgende Sätze:

$$4)\qquad a^{0|d} = 1,$$

$$5)\qquad \begin{cases} (a+b)^{-1|d} = \dfrac{1}{a+b-d} \\ (a+b)^{-1|-d} = \dfrac{1}{a+b+d}. \end{cases}$$

Die in (1 und 2) gefundenen Resultate lassen sich auch anders darstellen, wenn man von dem Schlussfactor der Facultät ausgeht. Es finden sich dann folgende Formen:

$$6)\qquad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-d)(a-2d)\ldots(a-nd)} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}}$$

$$7)\qquad a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+d)(a+2d)\ldots(a+nd)} = \frac{1}{(a+d)^{n|+d}}.$$

Geht man von *dieser* Darstellung aus, so ändert sich die Definition einer Facultät mit negativem Exponenten. Die Formen (6 und 7) scheinen aber nicht die ursprünglichen zu sein, und der Calcul verlangt, dass man die Formen (1 und 2) als solche anerkenne. Die Gründe dafür sind folgende:

a) Es ist nicht gerechtfertigt, weshalb in (6 und 7) neben dem Zeichen des Exponenten auch noch das Zeichen der Zunahme wechselt.

b) Die Entwicklung des Begriffs einer Facultät mit negativem Exponenten auf analytischem Wege führt auf die Ausdrücke (1 und 2), aber nicht auf die Ausdrücke (6 und 7).

Um Letzteres zu zeigen, gehen wir von der Gleichung

$$a^{n+m|d} = a^{n|d}(a+nd)^{m|d}$$

aus, und setzen $n+m=0$ oder $-m=+n$. Demnach ist $-m$ statt n in die vorstehende Gleichung zu setzen, und es wird

$$1 = a^{-m|d}(a-md)^{m|d}$$

oder

$$9)\qquad a^{-m|d} = \frac{1}{(a-md)^{m|d}}.$$

Dieser Ausdruck stimmt mit (1) überein. Auf gleiche Weise findet man aus der Gleichung

$$10)\quad a^{n+m|-d} = a^{n|-d}(a-md)^{m|d}$$

die Darstellung (2). *Kramp* stellt zwar die Formen (6 und 7) (S. 47. seines Werks) als maassgebend auf; ihm sind *Eytelwein* u. A. gefolgt; indessen dürften diese Darstellungen nicht als die ursprünglichen zu betrachten sein; wie aus dem Gesagten hervorgeht. Es ist jedoch nicht zu übersehen, dass auch (6 und 7) bei näherer Untersuchung der Facultäten gute Dienste thun. Sie sind also jedenfalls beizubehalten, jedoch unter der angegebenen Beschränkung als abgeleitete Formen zu gebrauchen.

Setzt man in (1) $a+nd$ statt a und in (2) $a-nd$ statt a, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$11)\quad \frac{1}{a^{n|d}} = (a+nd)^{-n|d} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(a+nd)^{-n|d}} = a^{n|d}$$

$$12)\quad \frac{1}{a^{n|-d}} = (a-nd)^{-n|-d} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(a-nd)^{-n|-d}} = a^{n|-d}.$$

Diese Gleichungen ergeben sich auch aus $a^{n+m|\pm d} = a^{n|\pm d}(a\pm nd)^{m|\pm d}$, wenn man in der gefundenen Darstellung $-n$ statt n und dann n statt m setzt.

Aus (6 und 7) ergeben sich auf die nämliche Weise folgende Darstellungen:

$$13)\quad \frac{1}{a^{n|-d}} = (a+d)^{-n|d} \quad \text{und} \quad a^{n|-d} = \frac{1}{(a+d)^{-n|d}}$$

$$14)\quad \frac{1}{a^{n|d}} = (a-d)^{-n|-d} \quad \text{und} \quad a^{n|d} = \frac{1}{(a-d)^{-n|-d}}.$$

Die Gleichungen (13 und 14) finden sich bei *Kramp*. Die Werthe der Zahlenfacultäten mit negativen Exponenten lassen sich hieraus leicht bestimmen. Es ist

$$15)\quad 1^{-n|1} = \frac{1}{(1-n)^{n|1}} = \frac{1}{(-)^{n-1}(n-1)^{n-1|-1}.0} = \frac{1}{(-)^{n-1}0.1^{n-1|1}} = (-1)^{n-1}\frac{\infty}{1^{n-1|1}}.$$

Demnach ist jede um die Einheit wachsende negative Facultät von der Basis 1 unendlich gross. Dasselbe kann auch bei andern Grundgrössen der Fall sein. Bei Zahlenfacultäten mit negativen Exponenten, negativer Zunahme und negativer Basis kann es ebenfalls der Fall sein. So ist

$$16)\quad (-)^{-n|-1} = \frac{1}{(-1+n)^{n|-1}} = \frac{1}{0.1^{n-1|1}} = \frac{\infty}{1^{n-1|1}}.$$

Ferner ist

$$17)\quad 0^{-n|1} = \frac{1}{(-n)^{n|1}} = (-1)^n \frac{1}{1^{n|1}}$$

$$18)\quad 0^{-n|-1} = \frac{1}{1^{n|1}}.$$

§. 5.

Nachdem nun Begriff und Form der Facultäten mit negativen Exponenten festgestellt worden, ist zu untersuchen, ob sich die in §. 2. und 3. gefundenen Gesetze auf Facultäten mit negativen Exponenten übertragen lassen.

Aus (3. §. 2.) erhalten wir

$$1)\quad a^{-n|d-m|h} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}.(a-nd-mh)^{m|h}} = a^{-n|d}(a-nd)^{-m|h}$$

$$= \frac{1}{(a-nd-mh)(a-nd-mh+h)\ldots(a-nd-h)(a-nd)(a-nd+d)\ldots(a-2d)(a-d)}.$$

Aus (§. 3. 1.) erhalten wir

$$2)\quad a^{-m|h-n|1} = \frac{1}{(a-mh)^{m|h}(a-mh-nd)^{n|d}} = a^{-m|h}(a-mh)^{-n|d}$$

$$= \frac{1}{(a-mh-nd)(a-mh-nd+d)\ldots(a-mh-d)(a-mh)(a-mh+h)\ldots(a-2h)(a-h)}.$$

Man sieht leicht, dass die Ausdrücke (1 und 2) nicht gleich sind. Eben so erhalten wir

$$3)\quad a^{-n|d-m|d} = \frac{1}{(a-nd+md)^{m|-d}(a-nd)^{n|d}} = a^{-n|d}(a-d)^{-m|-d}$$

$$= \frac{1}{(a-nd+md)(a-nd-md-d)\ldots(a-nd+d)(a-nd)(a-nd+d)\ldots(a-2d)(a-d)},$$

$$4)\quad a^{-m|-d-n|d} = \frac{1}{(a+md-nd)^{n|d}(a+md)^{m|-d}} = a^{-m|-d}(a+md)^{-n|d}$$

$$= \frac{1}{(a+md-nd)(a+md-nd+d)\ldots(a+md-d)(a+md)(a+(m-1)d)\ldots(a+2d)(a+d)}.$$

Auch die Resultate (3 und 4) stimmen nicht überein. Dagegen findet sich

$$5)\quad a^{-n|d-m|d} = \frac{1}{(a-nd-md)^{m|d}(a-nd)^{n|d}} = a^{-n|d}(a-nd)^{-m|d}$$

$$= \frac{1}{(a-nd-md)(a-nd-md+d)\ldots(a-nd-d)(a-nd)\ldots(a-2d)(a-d)}$$

$$= \frac{1}{(a-nd-md)^{m+n|d}} = a^{-n-m|d},$$

$$6)\quad a^{-m|d-n|d} = \frac{1}{(a-md-nd)^{n|d}(a-md)^{m|d}} = a^{-m|d}(a-md)^{-n|d}$$
$$= \frac{1}{(a-md-nd)(a-md-nd+d)\ldots(a-md-d)(a-md)\ldots(a-2d)(a-d)}$$
$$= \frac{1}{(a-md-nd)^{n+m|d}} = a^{-m-n|d}.$$

Eben so ergiebt sich

$$7)\quad a^{-n|-d-m|-d} = a^{-n|-d}(a+nd)^{-m|-d} = a^{-n-m|-d} = \frac{1}{(a+nd+md)\ldots(a+2d)(a+d)},$$

$$8)\quad a^{-m|-d-n|-d} = a^{-m|-d}(a+md)^{-n|-d} = a^{-m-n|-d} = \frac{1}{(a+md+nd)\ldots(a+2d)(a+d)}$$

Diese Entwicklungen lassen sich leicht auf Facultäten mit drei und mehreren Exponenten ausdehnen. Sie geben folgende Gesetze:

9) Gehören den negativen Exponenten einer Facultät verschiedene Zunahmen zu, so können die Exponenten ohne Werthveränderung der Facultät *nicht* unter sich versetzt werden.

10) Das nämliche Gesetz gilt, wenn den Exponenten die gleiche Zunahme, aber mit *verschiedenen Zeichen* zugehört.

11) Gehört mehreren negativen Exponenten einer Facultät die *nämliche* Zunahme mit gleichen Zeichen zu, so können die Exponenten ohne Werthänderung der Facultät *willkührlich versetzt* werden.

Dies sind die nämlichen Gesetze, wie in §. 3. für Facultäten mit positiven Exponenten. Für die *formelle* Darstellung entnehmen wir aus (5. bis 8.) folgende Gesetze:

$$12)\quad a^{-n-m-p\ldots|\pm d} = a^{-m-n-p\ldots|\pm d} = a^{-p-n-m\ldots|\pm d} = \ldots,$$

oder auch

$$13)\quad a^{-n-m-p-\ldots|d} = a^{-n|d}(a-md)^{-m|d}(a-(m+n)d)^{-p|d}\ldots$$
$$= \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} \times \frac{1}{(a-(m+n)d)^{m|d}} \times \frac{1}{(a-(m+n+p)d)^{p|d}}\ldots$$
$$= \frac{1}{(a-d)^{n|-d}} \times \frac{1}{(a-(n+1)d)^{m|-d}} \times \frac{1}{(a-(n+m+1)d)^{p|-d}}\ldots$$

u. s. w.

$$14)\quad a^{-n-m-p-\ldots|-d} = a^{-n|-d}(a+nd)^{-m|-d}(a+(n+m)d)^{-p|-d}\ldots$$
$$= \frac{1}{(a+nd)^{n|-d}}\cdot\frac{1}{(a+(n+m)d)^{m|-d}}\cdot\frac{1}{(a+(n+m+p)d)^{p|-d}}\ldots$$
$$= \frac{1}{(a+d)^{n|d}}\cdot\frac{1}{(a+(n+1)d)^{m|d}}\cdot\frac{1}{(a+(n+m+1)d)^{p|d}}\ldots$$

u. s. w. Auch hier sind folgende besondere Fälle hervorzuheben:

$$15)\quad a^{-n|d}(a-nd)^{-m|d} = a^{-m|d}(a-md)^{-n|d}$$

$$16)\quad a^{-n|-d}(a+nd)^{-m|-d} = a^{-m|-d}(a+md)^{-n|-d}.$$

Werden in den Fällen (12. bis 14.) die Exponenten unter sich gleich gesetzt, so ergiebt sich

$$17)\quad a^{-rm|d} = a^{-m|d}(a-md)^{-m|d}(a-2md)^{-m|d}\dots(a-(r-1)md)^{-m|d}$$

$$= 1:[(a-rmd)(a-(rm-1)d)\dots(a-3\delta)(a-2d)(a-d)]$$

$$= \frac{1}{(a-rmd)^{rm|d}} = \frac{1}{(a-d)^{rm|-d}}$$

$$= \frac{1}{(a-rmd)^{m|d}(a-(r-1)md)^{m|d}(a-(r-2)md)^{m|d}\dots(a-2md)^{m|d}(a+md)^{m|d}},$$

$$18)\quad a^{-rm|-d} = a^{-m|-d}(a+md)^{-m|-d}(a+2md)^{-m|-d}\dots(a+(r-1)md)^{-m|-d}$$

$$= 1:[(a+rmd)(a+(rm-1)d)\dots(a+3d)(a+2d)(a+d)]$$

$$= \frac{1}{(a+rmd)^{rm|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{rm|d}}$$

$$= \frac{1}{(a+rmd)^{m|-d}(a+(r-1)md)^{m|-d}(a+(r-2)md)^{m|-d}\dots(a+2md)^{m|-d}(a+md)^{m|-d}}.$$

Jeder dieser Ausdrücke enthält rm Factoren. Nichts hindert, die in der entwickelten Darstellung enthaltenen Factoren nach der Zahl r abzutheilen, und dann entstehen folgende Ausdrücke:

$$19)\quad a^{-mr|d} = a^{-r|d}(a-rd)^{-r|d}(a-2rd)^{-r|d}\dots(a-(m-1)rd)^{-r|d}$$

$$20)\quad a^{-mr|-d} = a^{-r|-d}(a+rd)^{-r|-d}(a+2rd)^{-r|-d}\dots(a-(m-1)rd)^{-r|-d}.$$

Ordnet man nun die entwickelte Darstellung in (17. und 18.) nach der Zunahme md, so ergibt sich

$$21)\quad a^{-rm|d} = a^{-r|md}(a+d)^{-r|md}(a+2d)^{-r|md}\dots(a+(m-1)d)^{-r|md}$$

$$22)\quad a^{-rm|-d} = a^{-r|-md}(a-d)^{-r|-md}(a-2d)^{-r|md}\dots(a-(m-1)d)^{-r|-md}.$$

Bildet man für (19. und 20.) ebenfalls einen entwickelten Ausdruck und ordnet nach der Zunahme rd, so erhält man

$$23)\quad a^{-rm|d} = a^{-m|rd}(a+d)^{-m|rd}(a+2d)^{-m|rd}\dots(a+(r-1)d)^{-m|rd}$$

$$24)\quad a^{-rm|-d} = a^{-m|-rd}(a-d)^{-m|-rd}(a-2d)^{-m|-rd}\dots(a-(r-1)d)^{-m|-rd}.$$

Nun kann auch hier, wie in (§. 3.), die Rechnung, welche mit jedem Factor einer Facultät gemacht werden soll, nur einmal angezeigt und auf jeden einzelnen Factor bezogen werden. Dadurch gehen die Formeln (17. bis 24.) in folgende über:

$$25)\quad a^{-rm|d} = (a^{r|-md})^{-m|d}$$

$$a^{-rm|-d} = (a^{r|+md})^{-m|-d},$$

$$26)\quad a^{-rm|d} = (a^{m|-rd})^{-r|d}$$

$$a^{-rm|-d} = (a^{m|rd})^{-r|-d},$$

$$27)\quad a^{-rm|d} = (a^{m|d})^{-r|md}$$
$$a^{-rm|-d} = (a^{m|-d})^{-r|-md},$$
$$28)\quad a^{-rm|d} = (a^{r|d})^{-m|rd}$$
$$a^{-rm|-d} = (a^{r|-d})^{-m|-rd}.$$

Die Gleichungen (25. bis 28.) stimmen mit denen (23. bis 28. §. 3.) überein. Sie werden aus jenen gefunden, wenn m oder r negativ gesetzt wird. Es gelten demnach die nämlichen Gesetze von den Facultäten mit negativen Exponenten, die von denen mit positiven Exponenten gelten. Aus (25. bis 28.) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$29)\quad (a^{r|-md})^{-m|d} = (a^{m|-rd})^{-r|d} = (a^{m|d})^{-r|md} = (a^{r|d})^{-m|rd}$$
$$30)\quad (a^{r|md})^{-m|-d} = (a^{m|rd})^{-r|-d} = (a^{m|-d})^{-r|-md} = (a^{r|-d})^{-m|-rd}.$$

Auch diese Gesetze sind allgemeiner als die der Potenzen und lassen sich leicht auf dieselben anwenden.

§. 6.

Nachdem die Grundbestimmungen für die Facultäten mit positiven und negativen Exponenten festgestellt sind, werden sich leicht weitere Folgerungen daran knüpfen lassen. Zu diesem Ende bringen wir die beiden Arten von Facultäten in Verbindung mit einander und behalten die bisherige Entwicklungsart bei.

Untersucht man nun zuerst die Facultäten mit *verschiedenen* Zunahmen, also von der Form

$$a^{n|\pm d-m|\pm h},\quad a^{-n|\pm d+m|\pm h}\;\ldots.$$
$$a^{n|\pm d-m|\pm h+p|\pm k},\quad a^{-n|\pm d+m|\pm h-p|\pm k}\;\ldots.,$$

oder auch

$$a^{n|d-m|-d},\quad a^{-m|-d+n|d}\;\ldots.$$

u. s. w., so wird man leicht sehen, dass die Exponenten in diesen Fällen ohne Werthänderung der Facultät *nicht* versetzt werden können. Demnach gelten auch in den vorstehenden Fällen die Gesetze, welche in (§. 3.; 2., 5., 10. und §. 5.; 9., 10., 11.) aufgestellt wurden.

Untersuchen wir aber die Facultäten

$$a^{m|d-n|d} = a^{m-n|d}\quad \text{und}\quad a^{m|-d-n|-d} = a^{m-n|-d},$$

so ergiebt sich

$$1)\quad a^{m|d-n|d} = a^{m|d}(a+md)^{-n|d}$$
$$= \frac{a^{m|d}}{(a+md-nd)^{n|d}} = \frac{a(a+d)(a+2d)\;\ldots.\;(a+(m-1)d)}{(a+(m-n)d)(a+(m-n+1)d)\;\ldots.\;(a+(m-1)d)}.$$

Nun ist entweder $m > n$, oder $m < n$. Im ersten Fall werden die Factoren des Nenners ausgestossen und es findet sich

$$2)\qquad a^{m|d-n|d} = a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(m-n-1)d) = a^{m-n|d}.$$

Im zweiten Falle werden die Factoren im Zähler weggeschafft und es ergieb sich

$$3)\qquad a^{m|d-n|d} = \frac{1}{(a-(n-m)d)(a-(n-m-1)d)\ldots\ldots(a-2d)(a-d)} = a^{-(n-m)|d}.$$

Versetzt man die Exponenten in (1), so erhält man

$$a^{-n|d+m|d} = a^{-n|d}(a-nd)^{m|d} = \frac{(a-nd)(a-nd+d)(a-nd+2d)\ldots\ldots(a-nd+(m-1)d)}{(a-nd)(a-nd+d)(a-nd+2d)\ldots\ldots(a-d)}$$

Nun ist, wie vorhin, $m>n$, oder $m<n$. Ist m grösser als n, so ergiebt sich

$$4)\qquad a^{-n|d+m|d} = \frac{(a-nd)(a-nd+d)\ldots\ldots(a-2d)(a-d)a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(m-n-1)d)}{(a-nd)(a-nd+d)\ldots\ldots(a-2d)(a-d)}$$
$$= a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(m-n-1)d) = a^{m-n|d}.$$

Ist $m<n$, so findet sich

$$5)\qquad a^{-n|d+m|d} = \frac{(a-nd)(a-nd+d)\ldots\ldots(a-(n-m+1)d)}{(a-nd)(a-nd+d)\ldots\ldots(a-(n-m+1)d)(a-(n-m)d)(a-(n-m-1)d)\ldots\ldots(a-2d)(a-d)}$$
$$= \frac{1}{(a-(n-m)d)(a-(n-m+1)d)\ldots\ldots(a-2d)(a-d)} = a^{-(n-m)|d}.$$

Aus (2. und 4.) erhält man $a^{m|d-n|d} = a^{-n|d+m|d}$, wenn $m>n$ ist.
Aus (3. und 5.) erhält man $a^{m|d-n|d} = a^{-n|d+m|d}$, wenn $m<n$ ist.
Demnach ist, wie auch m und n unter einander beschaffen sein mögen:

$$6)\qquad a^{m-n|d} = a^{-n+m|d}.$$

Auf gleiche Weise folgt auch

$$7)\qquad a^{m-n|-d} = a^{-n+m|-d}.$$

Von Facultäten, welche *zwei* Exponenten haben, lässt sich leicht auf solche übergehen, welche deren drei und mehrere haben, und es ist

$$8)\qquad a^{m-n+p-q\ldots|\pm d} = a^{-n+m+p-q\ldots|\pm d} = a^{-n-q+m+p\ldots|\pm d} = \ldots\ldots$$

Dies führt zu folgendem sehr wichtigen Satze:

9) Bei Facultäten, welche mehrere, durch verschiedene Zeichen unter einander verbundene Exponenten haben, können die Exponenten ohne Werthveränderung der Facultäten *beliebig* unter einander *versetzt* werden; oder:

10) Soll der Werth einer Facultät, welche mehrere, durch verschiedene Zeichen unter einander verbundene Exponenten hat, ermittelt werden, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung die durch die Exponenten bedingten Factoren entwickelt werden.

Demnach hat man eine grosse Freiheit bei der Darstellung der Facultäten. Es ist z. B.

$$a^{m-n+p-q\ldots|\pm d} = a^{-(n-m-p+q\ldots)|\pm d} = a^{+(p+m-n-q\ldots)|\pm d} = \ldots.$$

§. 7.

Wir wenden uns jetzt zu der Entwicklung des Begriffs einer Facultät *mit gebrochenem Exponenten.* Wir knüpfen die Entwicklung dieses Begriffs an den einer *Potenz* mit gebrochenem Exponenten. Eben so wie der Uebergang von einer Grösse, die als Potenz betrachtet wird, auf die Grundgrösse, aus welcher sie entstand, durch eine Potenz mit gebrochenem Exponenten dargestellt wird: eben so wird auch der Uebergang von einer Grösse, die als Facultät betrachtet wird, auf die Grundgrösse oder Basis, aus welcher sie entstand, durch eine Facultät mit gebrochenem Exponenten dargestellt werden können.

Demnach steht eine Facultät mit *ganzem* Exponenten zu einer mit *gebrochenem* Exponenten in der nämlichen Beziehung, wie *Potenz* und *Wurzelgrösse* zu einander. Diese Parallele wird *deshalb* folgerichtig sein, weil ein Potenz als eine Facultät betrachtet werden kann, deren Zunahme 0 ist. Wenn nun eine Grösse mit gebrochenem Exponenten andeutet, dass man die Grösse in so viele unter sich gleiche Factoren zerlegen soll, als der Nenner des Bruchs angiebt (welche Factoren also die Eigenschaft haben, dass sie, mit einander multiplicirt, die ursprüngliche Grösse geben), und dass man den *einen* von diesen gleichen Factoren nehmen soll, so wird eine Facultät mit gebrochenem Exponenten andeuten, man solle eine gegebene Grösse in so viele Factoren, als der Nenner des Bruchs angiebt, welche sich nach einem bestimmten Gesetze verändern (zu- oder abnehmen), und deren Product die gegebene Grösse wieder hervorbringt, zerlegen, und dann den *ersten* von diesen Factoren (die Basis) nehmen. Demnach deutet eine Facultät mit gebrochenem Exponenten ein *Zerlegen in Factoren* an, die einem bestimmten Gesetze unterliegen, und dann das Zurückgehen auf den *ersten* Factor (die Basis) insbesondere; oder, wenn man den Begriff allgemeiner stellen will: auf *irgend einen* bestimmten unter den darzustellenden Factoren. Dabei versteht es sich, dass die zu ermittelnden Factoren denjenigen Gesetzen unterliegen müssen, welche bisher von den Facultäten im Allgemeinen aufgestellt wurden. Dies letztere wird um so weniger Anstand finden, da die Gültigkeit dieser Gesetze von positiven und von negativen Exponenten nachgewiesen ist, und da gebrochene Zahlen immer

nur Zwischenglieder von positiven und negativen Zahlen sind, folglich den Gesetzen, welche sich auf jene erstrecken, folgen müssen.

Diesen Erörterungen zufolge kann es sich bei der Darstellung einer Facultät mit gebrochenem Exponenten nicht mehr um die bisher aufgestellte Form handeln, weil hier die Facultät nur ein einziger Factor ist, oder als solcher wenigstens gedacht werden kann, sondern nur darum, welche Gesetze von ihr gelten, und wie ihr Werth darzustellen sei.

Man kann sich nun, um eine noch weitere Aehnlichkeit zwischen den Potenzen und den Facultäten mit gebrochenen Exponenten herbeizuführen, des *Wurzelzeichens* bedienen und

$$\sqrt[m|d]{a^{n|d}}$$

schreiben, so dass folgende *formelle* Gleichung entsteht:

$$1) \quad \sqrt[m|d]{a^{n|d}} = a^{\frac{n}{m}|d}.$$

In dieser Gleichung können n und d das positive und das negative Zeichen haben.

Nachdem Begriff und Bezeichnung der Facultäten mit gebrochenen Exponenten festgestellt sind, werden sich leicht weitere Folgerungen daraus ziehen lassen. Soll eine um d wachsende oder fallende Facultät von n Factoren in m Factoren zerlegt und die hieraus sich ergebende Basis dargestellt werden, so ist dies offenbar Dasselbe, als wenn eine um d wachsende oder fallende Facultät von 2, 3, 4 .... p mal n Factoren in 2, 3, 4 .... p mal m Factoren zerlegt und die hieraus gefundene Basis angegeben werden soll. Dies giebt folgende Vergleichung:

$$2) \quad a^{\frac{n}{m}|\pm d} = a^{\frac{2n}{2m}|\pm d} = a^{\frac{3n}{3m}|\pm d} = \dots\dots a^{\frac{pn}{pm}|\pm d}.$$

Hieraus folgt, dass man den gebrochenen Exponenten einer Facultät beliebig umformen kann, wenn nur sein Werth unverändert bleibt. Dadurch erhalten wir leicht andere Darstellungen, wenn wir nämlich einen Bruch in andere Brüche, die ihm gleichbedeutend sind, zerlegen, oder mehrere Brüche in einen ihnen gleichbedeutenden zusammenziehen. Setzen wir nämlich

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{m} + \frac{q}{m} + \frac{r}{m} + \dots\dots$$

oder

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} + \frac{t}{u} + \dots\dots$$

so ergiebt sich hieraus:

3) $a^{\frac{n}{m}|\pm d} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{m}+\frac{r}{m}+\ldots|\pm d}$

4) $a^{\frac{n}{m}|\pm d} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}+\frac{\,}{u}+\ldots|\pm d} = a^{\frac{p.s.u\ldots}{q.s.u\ldots}+\frac{q.r.u\ldots}{q.s.u\ldots}+\frac{q.s.t\ldots}{q.s.u\ldots}\ldots|\pm d}.$

Diese Ausdrücke müssen nun, da sie Facultäten bezeichnen, auch ihren allgemeinen Bildungsgesetzen unterliegen. Es ist folglich aus den Bestimmungen in (§. 2. und 3.)

5) $a^{\frac{n}{m}|\pm d} = a^{\frac{p}{m}|\pm d}(a+\frac{p}{m}d)^{\frac{q}{m}|\pm d}(a\pm(\frac{p+q}{m})d)^{\frac{r}{m}|\pm d}(a\pm\frac{p+q+r}{m}d)^{\frac{s}{m}|\pm d}\ \ldots .$

6) $a^{\frac{n}{m}|\pm d} = a^{\frac{p}{q}|\pm d}(a\pm\frac{p}{q}d)^{\frac{r}{s}|\pm d}(a\pm(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})d)^{\frac{t}{u}|\pm d}(a\pm(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}+\frac{t}{u})d)^{\frac{v}{w}|\pm d}\ldots$

Die Zeichen sind gleichzeitig positiv oder negativ zu nehmen. Setzt man

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots = n.\frac{1}{m},$$

so ergiebt sich

7) $a^{\frac{n}{m}|\pm d} = a^{\frac{1}{m}|\pm d}(a\pm\frac{1}{m}d)^{\frac{1}{m}|\pm d}(a\pm 2.\frac{1}{m}d)^{\frac{1}{m}|\pm d}\ldots(a\pm\frac{n-1}{m}d)^{\frac{1}{m}|\pm d}.$

Die Gleichung (7.) ergiebt sich auch aus (15. und 16. §. 3.) unmittelbar, wenn dort $r=n$ und $\frac{1}{m}$ statt m gesetzt wird. Man kann nun auch die Operation, welche in (7.) an jedem einzelnen Factor ausgeführt werden soll, nur *einmal* andeuten, und bemerken, dass sie an allen Gliedern der Facultät vorgenommen werden soll. Dadurch geht (7.) in folgende veränderte formelle Darstellung über:

$$8)\quad a^{\frac{n}{m}|\pm d} = (a^{n|\pm\frac{d}{m}})^{\frac{1}{m}|\pm d}.$$

Diese Gleichung fällt mit (23. und 24. §. 4.) zusammen, wenn $r=n$ und $\frac{1}{m}$ statt m gesetzt wird. Man sieht, dass man auf die frühern Gesetze geführt wurde, und dass sich die Richtigkeit der gemachten Schlüsse bestätigt

Auch noch dadurch lässt sich zu andern Entwicklungen gelangen, dass man zuerst eine gegebene Facultät in die nöthige Anzahl von Factoren zerlegt, deren Verbindung die ursprüngliche Facultät wieder erzeugt, und dann für jeden einzelnen Factor die gesuchte Basis ausscheidet. Ist z. B. demzufolge die Facultät $a^{\frac{n}{m}|\pm d}$ darzustellen, so soll man die eine Facultät von n Factoren in m Factoren zerlegen, die, mit sich selbst multiplicirt, $a^{n|\pm d}$ geben. Man kann nun $a^{n|\pm d}$ in n Factoren zerlegen und dann jeden einzelnen hieraus entstandenen Factor in m Factoren, von denen der erste den Expo-

nenten $\frac{1}{m} \pm d$ haben muss. Es entstehen daraus mn Factoren, und man erhält folgende Darstellung für eine positive Zunahme:

$$\begin{aligned} a^{n|+d} = \; & a^{\frac{1}{m}|d}(a+d)^{\frac{1}{m}|d}(a+2d)^{\frac{1}{m}|d} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a+(n-1)d)^{\frac{1}{m}|d} \\ & \times (a+nd)^{\frac{1}{m}|d}(a+(n+1)d)^{\frac{1}{m}|d}(a+(n+2)d)^{\frac{1}{m}|d} \ldots (a+(2n-1)d)^{\frac{1}{m}|d} \\ & \times (a+2nd)^{\frac{1}{m}|d}(a+(2n+1)d)^{\frac{1}{m}|d}(a+(2n+2)d)^{\frac{1}{m}|d} \ldots (a+(3n-1)d)^{\frac{1}{m}d} \\ & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ & \times (a+(m-1)d)^{\frac{1}{m}|d}(a+(m-1)d+d)^{\frac{1}{m}|d}(a+(m-1)d+2d)^{\frac{1}{m}|d} \ldots (a+(mn-1)d)^{\frac{1}{m}|d}. \end{aligned}$$

Geht man nun auf die erste Factorenreihe zurück, so ist

$$9) \quad a^{\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{1}{m}|nd}(a+d)^{\frac{1}{m}|nd}(a+2d)^{\frac{1}{m}|nd} \ldots (a+(n-1)d)^{\frac{1}{m}|nd}$$

oder, in anderer formeller Darstellung:

$$10) \quad a^{\frac{n}{m}|d} = (a^{n|d})^{\frac{1}{m}|nd}.$$

Eben so ist

$$\begin{aligned} 11) \quad a^{\frac{n}{m}|-d} & = a^{\frac{1}{m}|-nd}(a-d)^{\frac{1}{m}|-nd}(a-2d)^{\frac{1}{m}|-nd} \ldots (a-(n-1)d)^{\frac{1}{m}|-nd} \\ & = (a^{n|-d})^{\frac{1}{m}|-nd}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind dieselben, wie die in (27. §. 3.) gefundenen, wenn dort $m = n$ und $r = \frac{1}{m}$ gesetzt wird.

Das Gesagte lässt sich leicht auch auf Facultäten mit gebrochenen *negativen* Exponenten ausdehnen. Es ist

$$\begin{aligned} 12) \quad a^{-\frac{1}{m}|d} & = a^{-\frac{p}{m}-\frac{q}{m}-\frac{r}{m}\ldots|d} = a^{-\frac{p}{m}|d}(a-\frac{p}{m}d)^{-\frac{q}{m}|d}(a-\frac{p+q}{m}d)^{-\frac{r}{m}|d} \ldots \\ & = 1:(a-\frac{p}{m}d)^{\frac{p}{m}|d}(a-\frac{p+q}{m}d)^{\frac{q}{m}|d}(a-\frac{p+q+r}{m}d)^{\frac{r}{m}|d} \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13) \quad a^{-\frac{n}{m}|-d} & = a^{-\frac{p}{m}-\frac{q}{m}-\frac{r}{m}\ldots|-d} = a^{-\frac{p}{m}|-d}(a+\frac{p}{m}d)^{-\frac{q}{m}|-d}(a+\frac{p+q}{m}d)^{-\frac{r}{m}|-d} \ldots \\ & = 1:(a+\frac{p}{m}d)^{\frac{p}{m}|-d}(a+\frac{p+q}{m}d)^{\frac{q}{m}|-d}(a+\frac{p+q+r}{m}d)^{\frac{r}{m}|-d} \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14) \quad a^{-\frac{n}{m}|\pm d} & = a^{-\frac{p}{q}-\frac{r}{s}-\frac{t}{s}\ldots|\pm d} = a^{-\frac{p}{q}|\pm d}(a\mp\frac{p}{q}d)^{-\frac{r}{s}|\pm d}(a\mp(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})d)^{-\frac{t}{u}|\pm d} \ldots \\ & = 1:(a\pm\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|\pm d}(a\mp(\frac{p}{q}+\frac{r}{s})d)^{\frac{r}{s}|\pm d}(a\mp(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}+\frac{t}{u})d)^{\frac{t}{u}|\pm d} \ldots \end{aligned}$$

u. s. w. Auch hier zeigt sich, dass die in (§. 5. und 6.) entwickelten Gesetze auch von den Facultäten mit gebrochenen Exponenten gelten. Eben so gelten die in (§. 6.) gefundenen Gesetze auch von Facultäten mit gebrochenen Exponenten. Es ist

15) $a^{\frac{n}{m}|d-\frac{p}{q}|d+\frac{r}{s}d\dots} = a^{\frac{n}{m}|d}(a+\frac{n}{m}d)^{-\frac{p}{q}|d}(a+(\frac{n}{m}-\frac{p}{q})d)^{\frac{r}{s}|d}\dots$

$$= a^{-\frac{p}{q}|d}(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{n}{m}|d}(a-(\frac{p}{q}-\frac{n}{m})d)^{\frac{r}{s}|d}\dots$$

$$= \frac{a^{\frac{n}{m}|d}(a+(\frac{n}{m}-\frac{p}{q}(d)^{\frac{r}{s}|d}\dots}{(a+(\frac{n}{m}-\frac{p}{q})d)^{\frac{p}{q}|d}}$$

$$= \frac{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{n}{m}|d}(a-(\frac{p}{q}-\frac{n}{m})d)^{\frac{r}{s}|d}\dots}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}}$$

u. s. w. Ferner ist

16) $a^{\frac{n}{m}-\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\dots|-d} = a^{\frac{n}{m}|-d}(a-\frac{n}{m}d)^{-\frac{p}{q}|-d}(a-(\frac{n}{m}-\frac{p}{q})d)^{\frac{r}{s}|-d}\dots$

$$= \frac{a^{\frac{n}{m}|-d}(a-(\frac{n}{m}-\frac{p}{q})d)^{\frac{r}{s}|-d}\dots}{(a-(\frac{n}{m}-\frac{p}{q})d)^{\frac{p}{q}|-d}}$$

$$= a^{-\frac{p}{q}+\frac{n}{m}+\frac{r}{s}\dots|-d}$$

$$= a^{\frac{p}{q}|-d}(a+(\frac{p}{q}d)^{\frac{n}{m}|-d}(a+(\frac{p}{q}-\frac{n}{m})d)^{\frac{r}{s}|-d}\dots$$

$$= \frac{(a+\frac{p}{q}d)^{\frac{n}{m}|-d}(a+(\frac{p}{q}-\frac{n}{m}(d)^{\frac{r}{s}|-d}\dots}{(a+\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|-d}}$$

u. s. w. Dies zeigt, dass alle in den Paragraphen (2. bis 6.) aufgestellten Gesetze allgemein sind und von ganzen, so wie von gebrochenen Exponenten, also auch dann noch gelten, wenn ganze und gebrochene Exponenten mit einander in *Verbindung* treten. Specielle Fälle ergeben sich hieraus leicht. Wir heben folgende heraus:

17) $a^{-\frac{p}{q}|d} = \frac{1}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}}$

18) $a^{-\frac{p}{q}|-d} = \frac{1}{(a+\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|-d}}$

19) $a^{\frac{n}{m}|d}(a+\frac{n}{m}d)^{\frac{p}{q}|d} = a^{\frac{p}{q}|d}(a+\frac{p}{q}d)^{\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{nq+mp}{mq}|d}$

$$20)\quad a^{-\frac{n}{m}|d+\frac{p}{q}|d} = \frac{1}{(a-\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|d}(a-(\frac{n}{m}+\frac{p}{q})d)^{\frac{p}{q}|d}} = \frac{1}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}(a-(\frac{p}{q}+\frac{n}{m})d)^{\frac{n}{m}|d}}$$

$$21)\quad a^{\frac{p}{q}+n|d} = a^{n+\frac{p}{q}|d} = a^{\frac{p}{q}|d}(a+\frac{p}{q}d)^{n|d} = a^{n|d}(a+nd)^{\frac{p}{q}|d}.$$

Die letzte (21.) ist eine sehr wichtige Gleichung. Wir geben ihr daher folgende vier besondere Formen:

$$22)\quad a^{\frac{p}{q}+n|d} = a^{\frac{p}{q}|d}\frac{(aq+pd)^{n|qd}}{q^n} = \frac{a^{\frac{p}{q}|d}(aq+pd)(aq+pd+qd)\ldots\ldots(aq+pd+(n-1)qd)}{q^n}$$

$$= a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(n-1)d)(a+nd)^{\frac{p}{q}|d}$$

$$= a^{\frac{p}{q}|d}(a+\frac{p}{q}d)(a+\frac{p}{q}d+d)(a+\frac{p}{q}d+2d)\ldots\ldots(a+\frac{p}{q}d+(n-1)d)$$

$$23)\quad a^{-\frac{p}{q}+n|d} = a^{-\frac{p}{q}|d}(a-\frac{p}{q}d)^{n|d} = a^{n|d}(a+nd)^{-\frac{p}{q}|d}$$

$$= \frac{(aq-pd)^{n|qd}}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}.q^n} = \frac{(aq-pd)(aq-pd+qd)\ \ldots\ldots\ (aq-pd+(n-1)qd)}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}.q^n}$$

$$= \frac{a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(n-1)d)}{(a+nd-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}}$$

$$24)\quad a^{\frac{p}{q}-n|d} = a^{\frac{p}{q}|d}(a+\frac{p}{q}d)^{-n|d} = a^{-n|d}(a-nd)^{\frac{p}{q}|d}$$

$$\frac{a^{\frac{p}{q}|d}.q^n}{(aq+pd-d)(aq+pd-2d)\ldots\ldots(aq+pd-nd)} = \frac{(a-nd)^{\frac{p}{q}|d}}{(a-d)(a-2d)\ldots\ldots(a-nd)}$$

$$25)\quad a^{-\frac{p}{q}-n|d} = a^{-\frac{p}{q}|d}(a-\frac{p}{q}d)^{-n|d} = a^{-n|d}(a-nd)^{-\frac{p}{q}|d}$$

$$= \frac{q^n}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}(aq-pd-d)(aq-pd-2d)\ldots\ldots(aq-pd-nd)} = \frac{1}{(a-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}(a-\frac{p}{q}d-nd)^{n|d}}$$

$$= \frac{1}{(a-d)(a-2d)\ldots\ldots(a-nd)(a-nd-\frac{p}{q}d)^{\frac{p}{q}|d}}.$$

Geht $+d$ in $-d$ über, so ergeben sich die hiedurch bedingten Ausdrücke aus (22. bis 25.) leicht. Ist n negativ, so ist nicht jede von den Formen (24. und 25.) gleich brauchbar. Aus (21.) ergiebt sich der Zusammenhang zwischen $a^{\frac{p}{q}|d}$ und $(a+nd)^{\frac{p}{q}|d}$. Die Gleichung (21.) eröffnet eine Reihe von Sätzen, die vieler Anwendungen fähig sind; wie sich im Folgenden zeigen wird.

Es ist von selbst klar, dass die Anwendung auf Facultäten mit *Zahlen-Exponenten* den bekannten Gesetzen unterliegt; wobei nur zu bemerken ist,

dass die Rechnung mit diesen Exponenten mehr Mannigfaltigkeit hat, als die mit Wurzelgrössen. So ist z. B.

$$a^{\frac{1}{2}|d+\frac{1}{3}|d} = a^{\frac{1}{2}|d}(a+\tfrac{1}{2}d)^{\frac{1}{3}|d} = a^{\frac{1}{3}|d}(a+\tfrac{1}{3}d)^{\frac{1}{2}|d} = a^{\frac{5}{6}|d}$$

$$a^{\frac{1}{2}|d-\frac{1}{3}|d} = a^{\frac{1}{2}|d}(a+\tfrac{1}{6}d)^{-\frac{1}{3}|d} = \frac{a^{\frac{1}{2}|d}}{(a+\frac{1}{6}d)^{\frac{1}{3}|d}} = a^{-\frac{1}{3}|d}(a-\tfrac{1}{3}d)^{\frac{1}{2}|d}$$

$$= \frac{(a-\frac{1}{3}d)^{\frac{1}{2}|d}}{(a-\frac{1}{3}d)^{\frac{1}{3}|d}} = a^{\frac{1}{6}|d}$$

u. s. w. Die in diesem Paragraph gefundenen Gleichungen deuten Operationen an, und sind formell. Sie dienen daher, die gegebenen Ausdrücke auf andere Formen überzuführen. Den *Werth* einer Facultät mit gebrochenem Exponenten aber geben sie nicht. Wir werden daher auf die Aufgabe geführt, den *Werth* einer Facultät mit gebrochenem Exponenten darzustellen. Wie er gefunden wird, soll im Folgenden gezeigt werden. Zu dem Ende sind die Facultäten in *Reihen* zu entwickeln.

II.

§. 8.

Die Entwicklung einer Facultät in eine nach den Potenzen der Zunahme geordnete Reihe ergiebt sich aus den bekannten Ausdrücken:

$$1)\quad (x\pm a_1)(x\pm a_2)\dots(x\pm a_n) = x^n \pm \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3 \dots a_n)}{C^1 x^{n-1} + C^2 x^{n-2} \pm C^3 x^{n-3} \dots (\pm)^n C^n x^0}$$

$$2)\quad \frac{1}{(x\pm a_1)(x\pm a_2)(x\pm a_3)\dots(x\pm a_n)} = x^{-n} \mp \underset{(a_1,\, a_2,\, a_3 \dots a_n)}{C'^1 x^{-n-1} + C'^2 x^{-n-2} \mp C'^3 x^{-n-3} \dots (\mp)^n C'^n x^{-2n}},$$

wo

$$\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3 \dots a_n)}{C^r} = C(a_1, a_2, a_3 \dots a^n)^r$$

die Summe der Verbindungen *ohne* Wiederholungen aus n Elementen zur ersten Classe und

$$\underset{(a_1,\, a_2,\, a_3 \dots a_n)}{C'^r} = C'(a_1, a_2, a_3 \dots a_n)^r$$

die Summe der Verbindungen *mit* Wiederholungen aus n Elementen zur ersten Classe ist.

Aus 1. und 2. erhalten wir folgende Ausdrücke für die vier Formen einer Facultät mit ganzem Exponenten:

$$3)\quad a^{n|d} = a^n + C(1, 2, \dots n-1)^1 a^{n-1} d + C(1, 2, \dots n-1)^2 a^{n-2} d^2 + \dots C(1, 2, \dots n-1)^{n-n} a d^{n-1}$$

$$4)\quad a^{n|-d} = a^n - C(1, 2, \dots n-1)^1 a^{n-1} d + C(1, 2, \dots n-1)^2 a^{n-2} d^2 - \dots (-)^{n-1} C(1, 2, \dots n-1)^{n-1} a d^{n-1}$$

$$5)\quad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} = \frac{1}{(a-d)(a-2d)\dots(a-nd)}$$
$$= a^{-n} + C'(1, 2, \dots n)^1 a^{-n-1} d + C'(1, 2, \dots n)^2 a^{-n-2} d^2 + \dots C'(1, 2, \dots n)^n a^{-2n} d^n + \dots$$

$$6)\quad a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+nd)^{n|-d}} = \frac{1}{(a+d)(a+2d)(a+3d)\dots(a+nd)}$$
$$= a^{-n} - C'(1, 2, \dots n)^1 a^{-n-1} d + C'(1, 2, \dots n)^2 a^{-n-2} d^2 - \dots (-)^n C'(1, 2, \dots n)^n a^{-2n} d^n \dots$$

Diese Ausdrücke sind bekannt. In dieser Form sind sie jedoch nicht brauchbar. Sie lassen sich zwar durch Ausführung der angezeigten Verbindungen zur entwickelten Darstellung der Facultäten mit ganzen Exponenten

benutzen, aber nicht für gebrochene Exponenten. Letzteres wird erst dann möglich, wenn man an die Stelle der Ausdrücke

7) $C(1, 2, \ldots n-1)^1, \quad C(1, 2, \ldots n-1)^2, \quad C(1, 2, \ldots n-1)^3 \ldots$

8) $C'(1, 2, \ldots n)^1, \quad C'(1, 2, \ldots n)^2, \quad C'(1, 2, \ldots n)^3 \ldots$

Formeln setzen kann, die ihre Werthe in entwickelter Darstellung geben. Diese Formeln müssen offenbar Functionen von n sein. Gelingt es, sie darzustellen, so ist die Aufgabe gelöset und das Gesetz für die Entwicklung der Facultäten mit ganzen und gebrochenen positiven und negativen Exponenten gegeben.

Nach den obigen Bemerkungen können wir die Ausdrücke in (7.) allgemeiner auch durch

9) $F_1(n), \quad F_2(n), \quad F_3(n), \ldots$

darstellen, wenn wir der Reihe nach unter den Ausdrücken in (9.) die Functionen für die Vorzahl des ersten, zweiten, dritten Gliedes u. s. w. in $a^{n|d}$ verstehen. Danach ist

10) $a^{n|d} = a^n + F_1(n)a^{n-1}d + F_2(n)a^{n-2}d^2 + F_3(n)a^{n-3}d^3 + \ldots$

Die entwickelte Darstellung von $a^{n|-d}$ ergibt sich aus (10.), wenn $-d$ statt $+d$ gesetzt wird. Nun ist früher gezeigt worden, dass für $a^{-n|d}$ und $a^{n|d}$ die nämlichen Gesetze gelten, und dass $a^{-n|d}$ aus $a^{n|d}$ abgeleitet wird, wenn man $-n$ statt $+n$ setzt. Wenden wir diese Bemerkung auf (10.) an, so muss folgerichtig

11) $a^{-n|d} = a^{-n} + F_1(-n)a^{-n-1}d + F_2(-n)a^{-n-2}d^2 + F_3(-n)a^{-n-3}d^3 + \ldots$

sein. Aus (11.) findet sich die entwickelte Darstellung für $a^{-n|-d}$, wenn $-d$ statt $+d$ gesetzt wird. Nun sieht man leicht aus der Vergleichung von (10. und 11.) dass die Entwicklung der Facultäten mit positiven und mit negativen Exponenten auf einer und derselben Grundform beruht und dass aus jeder von den beiden Formen alle übrigen abgeleitet werden können, wenn $-n$ statt $+n$ und $-d$ statt $+d$ gesetzt wird; woraus vier Fälle entstehen.

Durch diese Bemerkungen ist die Aufgabe darauf zurückgebracht, nur die eine Art der Functionen, die wir allgemein durch $F_r(n)$ und $F_r(-n)$ bezeichnen, entwickelt darzustellen. Dies kann auf unabhängigem oder zurücklaufendem Wege geschehen. Es sind schon manche Versuche gemacht worden, diese Aufgabe zu lösen. Man hat aber immer nur die Versuche auf die beiden Fälle $F_r(n)$ und $F_r(-n)$ in ihrer Specialität gerichtet und nie den allgemeineren Standpunct betreten, welcher die Bildungsgesetze auf einmal giebt. Bei dieser Isolirung blieb auch *Kramp* stehen. Hält man den allgemeinen

Standpunct fest, so vereinfacht sich zugleich die Aufgabe und man hat den Vortheil, allgemeinere Resultate zu erhalten.

Die Gleichungen (10. und 11.) geben vorerst nur formelle Darstellungen, da wir die durch sie angedeuteten Gebilde nicht kennen. Da wir aber durch die Gleichungen (3. und 5.) schon andere Darstellungen gewonnen haben, so führt uns die Vergleichung dieser Entwicklungen zu einem wichtigen Resultate.

Die Functionen

$$F_1(n), \quad F_2(n), \quad F_3(n), \quad F_n(n), \ldots$$

stellen nämlich der Reihe nach Gebilde vor, welche entstehen, wenn für

$$C(1,2,\ldots a-1)^1, \; C(1,2,\ldots n-1)^2, \; C(1,2,\ldots n-1)^3, \; C(1,2,\ldots n-1)^4 \ldots$$

algebraische Ausdrücke gegeben werden. Eben so stellen die Functionen

$$F_1(-n), \quad F_2(-n), \quad F_3(-n), \quad F_4(-n), \ldots$$

der Reihe nach Gebilde vor, welche entstehen, wenn für

$$C'(1,2,\ldots n)^1, \; C'(1,2,\ldots n)^2, \; C'(1,2,\ldots n)^3, \; C'(1,2,\ldots n)^4, \ldots$$

algebraische Ausdrücke gegeben sind. Da nun dem Obigen zufolge $F_r(-n)$ aus $F_r(+n)$ und umgekehrt abgeleitet wird, wenn $-n$ statt $+n$ gesetzt wird, so wird dies auch von der zweiten Art von Gebilden gelten (7. und 8.). Daraus erhalten wir folgende wichtige Gleichung:

$$12) \quad SC'(1,2,\ldots n)^r = SC(1,2,\ldots n-1)^r,$$

wenn in dem einen Ausdrucke $-n$ statt $+n$ gesetzt wird. Unter $SC'(1,2,\ldots n)^r$ ist nämlich der algebraische Ausdruck von $C'(1,2,\ldots n)^r$ und unter $SC(1,2,\ldots n-1)^r$ der von $C(1,2,\ldots n-1)^r$ zu verstehen. Die Bedeutung dieser Gleichung ist folgende:

13) Ist der Summenausdruck für die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $r$ten Classe gefunden, so ergiebt sich der Ausdruck für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $n-1$ Elementen zur nämlichen Classe unmittelbar, wenn in demselben $-n$ statt $+n$ gesetzt wird. Und umgekehrt:

14) Ist der Summenausdruck für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $n-1$ Elementen zu irgend einer Classe gefunden, so ergiebt sich der Ausdruck für die Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur nämlichen Classe unmittelbar, wenn in demselben $-n$ statt $+n$ gesetzt wird.

Es versteht sich von selbst, dass diese Uebertragung nur dann möglich ist, wenn der gefundene Summenausdruck eine solche Gestalt hat, dass durch

die Einführung ein reeller Ausdruck entsteht. Nicht alle Ausdrücke werden diese Eigenschaft haben.

Der vorstehende Satz ist deshalb von grosser Wichtigkeit, weil er die Entwicklung der Facultäten in Reihen einem eben so allgemeinen Gesetze unterwirft, als dasjenige ist, welches für das Binomium gilt, und weil dadurch noch andre Entwicklungen in der Analysis, die bisher gleichfalls vereinzelt lagen, unter das nämliche allgemeine Gesetz gebracht werden können, wie es sich später zeigen wird.

Wir wenden uns nun zur Aufsuchung der Ausdrücke von $F_r(n)$ und $F_r(-n)$.

§. 9.

In meinem Differenzen- und Differentialcalcul (§. 127. Pg. 216 u. ff.) habe ich bei der Bildung der Unterschiede der Potenzialfunctionen gezeigt, dass sich die Vorzahlen der einzelnen Glieder durch Versetzungen der Facultäten zu bestimmten Summen und durch die Verbindungen mit Wiederholungen darstellen lassen. Hieraus folgt die Gleichheit der beiden letzten Arten von Gebilden. Die Gleichung, welche man hiedurch erhält, ist

$$1)\quad SC'(1,2,\dots n)^m = \frac{1^{m+n|1}}{1^{n|1}} P'\left(s(m+n);\ \frac{1}{1^{1|1}},\ \frac{1}{1^{2|1}},\ \frac{1}{1^{3|1}},\ \dots \frac{1}{1^{m+1|1}}\right)^n.$$

Nach Vorschrift dieser Gleichung sind hier die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe $m+n$ in der $n$ten Classe zu bilden; wobei die höchsten Factoren der angezeigten Facultäten als Elemente dienen. Die Aufgabe zeigt sich in der vorliegenden Form als unbestimmt, so lange m und n nicht bestimmte Werthe bekommen. Sie wird aber bestimmt, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen zur Summe $m+n$ auf die Verbindungen zu bestimmten Summen, oder, was dasselbe ist, auf die Zerfällung der Zahlen mit Wiederholungen zurückführt, dieselben niederschreibt und angiebt, wie oft die bei einer Zerfällung vorkommenden Elemente unter sich Versetzungen eingehen können. Diese Anzahl wird eine Function von n sein. Bezeichnen wir die dabei nöthigen Ausdrücke der Reihe nach durch $N_1, N_2, N_3 \dots$, so geht der Ausdruck (2.) in folgenden über:

$$2)\quad SC'(1,2,\dots n)^m = \frac{1^{m+n|1}}{1^{n|1}} \Big[N_1 \frac{1}{1^{m+1}(1^{1|1})^{n-1}}$$
$$+ N_2^{(1)} \frac{1}{1^{m|1}1^{2|1}(1^{1|1})^{n-2}} + N_2^{(2)} \frac{1}{1^{m-1|1}1^{3|1}(1^{1|1})^{n-2}} + N_2^{(3)} \frac{1}{1^{m-2|1}1^{4|1}(1^{1|1})^{n-2}} + \dots$$
$$+ N_3^{(1)} \frac{1}{1^{m-1|1}1^{2|1}1^{2|1}(1^{1|1})^{n-3}} + N_3^{(2)} \frac{1}{1^{m-2|1}1^{3|1}1^{2|1}(1^{1|1})^{n-3}} + \dots$$
$$+ N_4^{(1)} \frac{1}{1^{m-2|1}1^{2|1}1^{2|1}1^{2|1}(1^{1|1})^{n-4}} + N_4^{(2)} \frac{1}{1^{m-3|1}1^{3|1}1^{2|1}1^{2|1}(1^{1|1})^{n-4}} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \Big]$$

In diesem Ausdruck sind m und n veränderlich. Beschränkt man sich auf ein bestimmtes m, oder nimmt m beständig an, so kann n von 1 an wachsen und die ganzen Zahlen durchlaufen. Geschieht dies, so nimmt Summe und Classe in (1.) um die Einheit gleichzeitig zu, während das höchste Element $\frac{1}{1^{m+1|1}}$ unverändert bleibt. Es kommt daher der in (32. Pg. 28.) meiner Combinationslehre aufgestellte Lehrsatz zur Anwendung, nach welchem

$$3)\quad C'(s(2m);\ a_1, a_2, \dots a_{m+1})^m = C'(s(2m+1);\ a_1, a_2, \dots a_{m+1})^{m+1}$$
$$= C'(s(2m+1);\ a_1, a_2, \dots a_{m+1})^{m+2} = \dots$$

Nach diesem Satze tritt eine bestimmte Anzahl von Verbindungen, die von m abhängen, auf, die nicht überschritten wird. Das Schlussglied in (2.) nimmt daher folgende Form an:

$$4)\quad N_m \frac{1}{(1^{2|1})^m (1^{1|1})^{n-m}}.$$

Diesen Bemerkungen zufolge lässt sich (2.) auch so darstellen:

$$5)\ SC'(1,2,\dots n)^m = (n+1)^{m|1}\big[N_1 C'(s(m+1))^1 + N_2 C'(s(m+2))^2 + N_3 C'(s(m+3))^3 + \dots$$
$$\dots + N_{m-1} C'(s(2m-1))^{m-1} + N_m C'(s(2m))^m\big]$$
$$\left(\frac{1}{1^{2|1}}, \frac{1}{1^{3|1}}, \frac{1}{1^{4|1}}, \dots \frac{1}{1^{m|1}}, \frac{1}{1^{m+1|1}}\right).$$

Bei der Ausführung der vorgezeichneten Operationen ist eine bestimmte Zahl von Versetzungen auszuschliessen, sobald mehrere einander gleiche Elemente vorkommen. Nimmt man diese Bemerkung in den Calcul auf und führt die Werthe von N_1, N_2, N_3 .... ein, so ergiebt sich folgende allgemeine und unabhängige Bildungsweise für die Summenausdrücke der Verbindungen mit Wiederholungen:

6) $$SC'(1,2,\ldots n)^m = (n+1)^m \Big[\frac{n}{1^{m+1|1}} + n^{2|-1}\Big(\frac{1}{1^{m|1}1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-1|1}1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-2|1}1^{4|1}} + \ldots\Big)$$
$$+ n^{3|-1}\Big(\frac{1}{1^{m-1|1}.1^{2|1}.1^{2|1}\times 1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-2|1}1^{3|1}1^{2|1}} + \frac{1}{1^{m-3|1}1^{4|1}.1^{2|1}} + \ldots\Big)$$
$$+ n^{4|-1}\Big(\frac{1}{1^{m-2|1}1^{2|1}1^{2|1}1^{2|1}\times 1^{3|1}} + \frac{1}{1^{m-3|1}1^{3|1}1^{2|1}1^{2|1}\times 1^{2|1}} + \ldots\Big)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ n^{m-1|-1}\frac{1}{1^{3|1}(1^{2|1})^{m-3}\times 1^{m-2|1}}$$
$$+ n^{m|-1}\frac{1}{(1^{2|1})^m\times 1^{m|1}}\Big].$$

Die Anzahl der Versetzungen, welchen wegen der gleichen Facultäten in diesem Ausdruck auszuschliessen sind, ist durch das Zeichen ($\times$) angedeutet. Setzt man nun in (6.) der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 .... statt m, so erhält man ohne alle schwierige Rechnung folgende Ausdrücke für die Summen der Verbindungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur 1ten, 2ten, 3ten, ... Classe, also folgende Ausdrücke für $F_1(-n)$, $F_2(-n)$, $F_3(-n)$ .....

7) $$SC'(1,2,\ldots n)^1 = [n]_2 \text{ *)}$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^2 = \Big(1+\frac{3(n-1)}{4}\Big)[n]_3$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^3 = \Big(1+2(n-1)+\frac{(n-1)^{2|-1}}{2}\Big)[n]_4$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^4 = \Big(1+\frac{25}{6}(n-1)+\frac{5}{2}(n-1)^{2|-1}+\frac{5}{16}(n-1)^{3|-1}\Big)[n]_5$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^5 = \Big(1+8(n-1)+\frac{35}{4}(n-1)^{2|-1}+\frac{5}{2}(n-1)^{3|-1}+\frac{3}{16}(n-1)^{4|-1}\Big)[n]_6$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^6 = \Big(1+\frac{119}{8}(n-1)+\frac{959}{36}(n-1)^{2|-1}+\frac{105}{8}(n-1)^{3|-1}+\frac{35}{16}(n-1)^{4|-1}$$
$$+\frac{7}{64}(n-1)^{5|-1}\Big)[n]_7$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^7 = \Big(1+\frac{82}{3}(n-1)+\frac{455}{6}(n-1)^{2|-1}+\frac{518}{9}(n-1)^{3|-1}+\frac{385}{24}(n-1)^{4|-1}$$
$$+\frac{7}{4}(n-1)^{5|-1}+\frac{(n-1)^{6|-1}}{16}\Big)[n]_8$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^8 = \Big(1+\frac{501}{10}(n-1)+\frac{417}{2}(n-1)^{2|-1}+\frac{5509}{25}(n-1)^{3|-1}+\frac{763}{8}(n-1)^{4|-1}$$
$$+\frac{273}{16}(n-1)^{5|-1}+\frac{21}{16}(n-1)^{6|-1}+\frac{9}{256}(n-1)^{7|-1}\Big)[n]_8$$
$$SC'(1,2,\ldots n)^9 = \Big(1+92(n-1)+563(n-1)^{2|-1}+\frac{2645}{3}(n-1)^{3|-1}+\frac{6055}{12}(n-1)^{4|-1}$$
$$+\frac{388}{3}(n-1)^{5|-1}+\frac{945}{32}(n-1)^{6|-1}+\frac{15}{16}(n-1)^{7|-1}+\frac{5}{256}(n-1)^{8|-1}\Big)[n]_{10}.$$

*) Im Folgenden wird der Kürze wegen, und um den Setzer zu erleichtern, das Zeichen $[n]_p$ statt $\frac{n^{p|1}}{1^{p|1}} = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}$ u. $(n)_p$ statt $\frac{n^{p|-1}}{1^{p|1}} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}$ gebraucht werden.

u. s. w. Eine andere Entwicklung giebt folgende noch zweckmässigeren Ausdrücke:

8) $SC'(1,2,\ldots n)^1 = [n]_2$

$$SC'(1,2,\ldots n)^2 = \frac{3n+1}{4}[n]_3$$

$$SC'(1,2,\ldots n)^3 = [n]_2[n]_4$$

$$SC'(1,2,\ldots n)^4 = \frac{15n^3+30n^2+5n-2}{48}[n]_5$$

$$SC'(1,2,\ldots n)^5 = \frac{3n^4+10n^3+5n^2-2n}{16}[n]_6$$

$$SC'(1,2,\ldots n)^6 = \frac{63n^5+315n^4+315n^3-91n^2-42n+16}{24.24}[n]_7$$

$$SC'(1,2,\ldots n)^7 = \frac{9n^6+63n^5+105n^4-7n^3-42n^2+16n}{6.24}[n]_8$$

$$SC'(1,2,\ldots n)^8 = \frac{135n^7+1260n^6+3150n^5+840n^4-2345n^3+540n^2+404n-144}{120.2^5}[n]_9$$

u. s. w.

Wenden wir nun den Satz (12. §. 8.) auf diese Ausdrücke an, so erhalten wir unmittelbar folgende Summenausdrücke für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus $n-1$ Elementen zu den verschiedenen Classen:

9) $SC(1,2,\ldots n-1)^1 = (n)_2$

$$SC(1,2,\ldots n-1)^2 = (-1+\tfrac{8}{4}(n+1))(n)_3$$

$$SC(1,2,\ldots n-1)^3 = (1-2(n+1)+\frac{(n+1)^{2|1}}{2})(n)_4$$

$$SC(1,2,\ldots n-1)^4 = (-1+\tfrac{25}{6}(n+1)-\tfrac{5}{2}(n+1)^{2|1}+\tfrac{5}{16}(n+1)^{3|1})(n)_5$$

$$SC(1,2,\ldots n-1)^5 = (1-8(n+1)+\tfrac{35}{4}(n+1)^{2|1}-\tfrac{5}{2}(n+1)^{3|1}$$
$$\tfrac{3}{16}(n+1)^{4|1})(n)_6$$

$$SC(1,2,\ldots n-1)^6 = (-1+\tfrac{119}{8}(n+1)-\tfrac{959}{36}(n+1)^{2|1}+\tfrac{165}{8}(n+1)^{3|1}$$
$$-\tfrac{35}{16}(n+1)^{4|1}+\tfrac{7}{64}(n+1)^{5|1})(n)_7$$

. . . .

oder, durch eine andere Entwicklung:

$$10)\quad SC(1,2,\ldots n-1)^1 = (n)_2$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^2 = \frac{3n-1}{1}(n)_3$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^3 = (n)_2(n)_4$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^4 = \frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48}(n)_5$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^5 = \frac{3n^4-10n^3+5n^2+2n}{16}(n)_6$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^6 = \frac{63n^5-315n^4+315n^3+91n^2-42n-16}{1^{4|1}.1^{4|1}}(n)_7$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^7 = \frac{9n^6-63n^5+105n^4+7n^3-42n^2-16n}{6.24}(n)_8$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^8 = \frac{135n^7-1260n^6+3150n^5-840n^4-2345n^3-540n^2+404n+144}{120.2^5}(n)_9$$

. . . .

Wir theilen noch eine zurücklaufende Bildungsart für die Summenausdrücke der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen mit. Es ist bekanntlich

$$11)\quad SC(1,2,\ldots n)^m$$
$$= nSC(1,2,\ldots n-1)^{m-1}+(n-1)SC(1,2\ldots n-2)^{m-1}+(n-2)SC(1,2,\ldots n-3)^{m-1}+\ldots$$

Bezeichnet man den Summenausdruck für diese Verbindungen zur $x$ten Classe durch $\varphi(n^x)$, so ist aus (11.)

$$12)\quad SC(1,2,\ldots n)^m = \Sigma n\varphi[(n-1)^x]$$

Zur Auffindung der Summenausdrücke benutzen wir folgende leicht zu rechtfertigende Gleichung:

$$13)\quad \Sigma(R+n)[n]_r = (R+1)[n]_{r+1}+(r+1)[n-1]_{r+2}.$$

Es ist bekanntlich

$$SC(1,2,\ldots n)^1 = [n]_2.$$

Nun ist nach (11. und 12.) hieraus

$$SC(1,2,\ldots n)^2 = \Sigma n[n-1]_2.$$

Wird also in (13.) $n-1$ statt n und $R=1$, $r=2$ gesetzt, so ergiebt sich

$$SC(1,2,\ldots n)^2 = 2[n-1]_3+3[n-2]_4.$$

Behandelt man nun den eben erhaltenen Ausdruck wie vorhin und setzt in (11. und 12.) 3 statt m, so findet sich

$$SC(1,2,\ldots n)^3 = 2\Sigma n[n-2]_3+3\Sigma n[n-3]_4.$$

Hier müssen beide Ausdrücke rechts nach (13.) behandelt werden. Dies geschieht, wenn zuerst $n-2$ statt n, $R=2$, $r=3$, und dann $n-3$ statt n, $R=3$, $r=4$ gesetzt wird. Dies giebt

$$SC(1,2,\ldots n)^3 = 2.3[n-2]_4 + 2.4[n-3]_5 + 3.5[n-3]_5 + 3.5[n-4]_6$$
$$= 2.3[n-2]_4 + 20[n-3]_5 + 15[n-4]_6.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man die gesuchten Ausdrücke, und das Ableitungsgesetz tritt deutlich hervor. Nennt man die Vorzahl des $q$ten Gliedes im Summenausdrucke, welcher für die $m$te Classe gilt, A_q^m, so hat man folgende Ableitungsgleichung:

$$14)\quad A_q^m = (m+q-1)[A_{q-1}^{m-1} + A_q^{m-1}].$$

Daraus entstehen folgende Ausdrücke für die Summen der Verbindungen ohne Wiederholungen:

$$15)\quad SC(1,2,\ldots n-1)^1 = [n-1]_2$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^2 = 2[n-2]_3 + 3[n-3]_4$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^3 = 6[n-3]_4 + 20[n-4]_5 + 15[n-5]_6$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^4 = 24[n-4]_5 + 130[n-5]_6 + 210[n-6]_7 + 105[n-7]_8$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^5 = 120[n-5]_6 + 924[n-6]_7 + 2380[n-7]_8 + 2520[n-8]_9 + 945[n-9]_{10}$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^6 = 720[n-6]_7 + 7308[n-7]_8 + 26432[n-8]_9 + 44100[n-9]_{10} + 34650[n-10]_{11} + 10395[n-11]_{12}$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^7 = 5040[n-7]_8 + 64224[n-8]_9 + 303660[n-9]_{10} + 705320[n-10]_{11} + 866250[n-11]_{12} + 540540[n-12]_{13} + 135135[n-13]_{14}$$
$$SC(1,2,\ldots n-1)^8 = 40320[n-8]_9 + 623376[n-9]_{10} + 3678840[n-10]_{11} + 11098780[n-11]_{12} + 18858840[n-12]_{13} + 18288270[n-13]_{14} + 9459450[n-14]_{15} + 2027025[n-15]_{16}$$

u. s. w.

Dies sind die Ausdrücke, welche *Kramp* (Anal. d. réfr. Pg. 75.) gegeben hat. Der von *Kramp* befolgte Entwicklungsgang ist von dem hiesigen verschieden. *Kramp* hat nur die Vorzahlen bis zur siebenten Classe berechnet. Hier sind sie um eine Classe weiter berechnet. Man sieht, dass die Vorzahlen ungemein schnell wachsen, daher sehr unbeweglich und also bald beinahe unbrauchbar werden, während die in (7. bis 10.) aufgestellten Ausdrücke diesen Fehler nicht haben. Man kann sie etwas beweglicher machen, wenn man die allen Gliedern gemeinschaftlichen Factoren ausscheidet. Dadurch erhalten sie folgende Gestalt:

16) $SC(1,2,\dots n-1)^1 = (n)_2$

$SC(1,2,\dots n-1)^2 = (2+\frac{3}{4}(n-3))\,(n)_3$

$SC(1,2,\dots n-1)^3 = (6+4(n-4)+\frac{(n-4)^{2|-1}}{2})\,(n)_4$

$SC(1,2,\dots n-1)^4 = (24+\frac{65}{3}(n-5)+5(n-5)^{2|-1}+\frac{(n-5)^{3|-1}}{16})\,(n)_5$

$SC(1,2,\dots n-1)^5 = (120+132(n-6)+\frac{85}{2}(n-6)^{2|-1}+5(n-6)^{3|-1}$
$+\frac{(3n-6)^{4|-1}}{16})\,(n)_6$

$SC(1,2,\dots n-1)^6 = (720+\frac{1827}{2}(n-7+\frac{3304}{9}(n-7)^{2|-1}+\frac{245}{4}(n-7)^{3|-1}$
$+\frac{485}{99}(n-7)^{4|-1}+\frac{7}{64}(n-7)^{5|-1})\,(n)_7$

$SC(1,2,\dots n-1)^7 = (5040+7136(n-8)+3374(n-8)^{2|-1}+\frac{6412}{11}(n-8)^{3|-1}$
$+875(n-8)^{4|-1}+\frac{7}{2}(n-8)^{5|-1}+\frac{(n-8)^{6|-1}}{16})\,(n)_8$

. . . .

u. s. w. Wendet man uun auf (15. und 16.) den Satz (12. §. 8.) an, so erhält man

17) $SC'(1,2,\dots n)^1 = [n]_2$

$SC'(1,2,\dots n)^2 = -2[n]_3+3[n]_4$

$SC'(1,2,\dots n)^3 = 6[n]_4-20[n]_5+16[n]_6$

$SC'(1,2,\dots n)^4 = -24[n]_5+130[n]_6-210[n]_7+105[n]_8$

$SC'(1,2,\dots n)^5 = 120[n]_6-924[n]_7+2380[n]_8-2520[n]_9+945[n]_{10}$

. . . .

18) $SC'(1,2,\dots n)^1 = [n]_2$

$SC'(1,2,\dots n)^2 = (-2+\frac{3}{4}(n+3))\,[n]_3$

$SC'(1,2,\dots n)^3 = (6-4(n+4)+\frac{(n+4)^{2|1}}{2})\,[n]_4$

$SC'(1,2,\dots n)^4 = (-24+\frac{65}{3}(n+5)-5(n+5)^{2|1}+\frac{(n+5)^{3|1}}{16})\,[n]_5$

$SC'(1,2,\dots n)^5 = (120-132(n+6)+\frac{85}{2}(n+6)^{2|1}+5(n+6)^{3|1}+\frac{3(n+6)^{4|1}}{16})[n]_6$

. . . .

Eben so leicht lassen sich die Summenausdrücke für die Verbindungen mit Wiederholungen nach der nämlichen Methode finden. Für sie erhält man folgende Gleichung:

19) $SC'(1,2,\dots n)^m$
$= nSC'(1,2,\dots n)^{m-1}+(n-1)SC'(1,2,\dots n-1)^{m-1}+(n-2)SC'(1,2,\dots n-2)^{m-1}\dots$

also

20) $SC'(1,2,\dots n)^m = \Sigma n\varphi(n^x)$.

Nun ist $SC'(1,2,\ldots n)^1 = [n]_2$ und wenn in (13.) $m=2$ und dann $R=0$, $r=2$ gesetzt wird, so ergiebt sich

$$SC'(1,2,\ldots n)^2 = \Sigma n.[n]_2 = [n]_3 + 3[n-1]_4.$$

Um den Calcul weiter zu führen, ist in (20.) $m=3$ zu setzen. Dies giebt

$$SC'(1,2,\ldots n)^3 = \Sigma n.[n]_3 + 3\Sigma n.[n-1]_4.$$

Man hat nun beide Ausdrücke rechts nach (13.) zu behandeln und $R=0$, $r=3$, $n-1$ statt n, und $R=1$, $r=4$ zu setzen. Dies giebt

$$SC'(1,2,\ldots n)^3 = [n]_4 + 4[n-1]_5 + 3.2[n-1]_5 + 3.5[n-2] = [n]_4 + 10[n-1]_5 + 15[n-2]_6$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man folgende Ausdrücke für die Summen der Verbindungen mit Wiederholnngen:

21)
$$\begin{aligned}
SC'(1,2,\ldots n)^1 &= [n]_2\\
SC'(1,2,\ldots n)^2 &= [n]_3 + 3[n-1]_4\\
SC'(1,2,\ldots n)^3 &= [n]_4 + 10[n-1]_5 + 15[n-2]_6\\
SC'(1,2,\ldots n)^4 &= [n]_5 + 25[n-1]_6 + 105[n-2]_7 + 105[n-3]_8\\
SC'(1,2,\ldots n)^5 &= [n]_6 + 56[n-1]_7 + 490[n-2]_8 + 1260[n-3]_9\\
&\quad + 945[n-4]_{10}\\
SC'(1,2,\ldots n)^6 &= [n]_7 + 119[n-1]_8 + 1918[n-2]_9 + 9450[n-3]_{10}\\
&\quad + 17325[n-4]_{11} + 10395[n-5]_{12}\\
SC'(1,2,\ldots n)^7 &= [n]_8 + 246[n-1]_9 + 6825[n-2]_{10} + 56980[n-3]_{11}\\
&\quad + 190575[n-4]_{12} + 270270[n-5]_{13} + 136135[n-6]_{14}\\
SC'(1,2,\ldots n)^8 &= [n]_9 + 501[n-1]_{10} + 22935[n-2]_{11} + 302995[n-3]_{12}\\
&\quad + 1636635[n-4]_{13} + 4099095[n-5]_{14}\\
&\quad + 4729725[n-6]_{15} + 2027025[n-7]_{16}
\end{aligned}$$

. . . .

Das Ableitungsgesetz für die vorstehenden Entwicklungen ist

$$22)\qquad A_q^m = (m+q-1)A_{q-1}^{m-1} + qA_q^{m-1}.$$

Kramp hat (Anal. d. réfr. Pg. 76. et 77.) die in (21.) angegebenen Ausdrücke mitgetheilt, jedoch nur bis zur 7ten Classe. Auch diese Ausdrücke führen bald zu grossen Zahlen; wie leicht zu sehen. Wendet man auf sie den Satz (12. §. 8.) an, so hat man für die Summenausdrücke der Verbindungen ohne Wiederholungen:

$$23)\quad \begin{aligned} SC(1,2,\dots n-1)^1 &= (n)_2 \\ SC(1,2,\dots n-1)^2 &= -(n)_3+3(n+1)_4 \\ SC(1,2,\dots n-1)^3 &= (n)_4+10(n+1)_5+15(n+2)_6 \\ SC(1,2,\dots n-1)^4 &= -(n)_5+25(n+1)_6-105(n+2)_7+105(n+3)_8 \\ SC(1,2,\dots n-1)^5 &= (n)_6-56(n+1)_7+490(n+2)_8-1260(n+3)_9 \\ &\quad +945(n+4)_{10} \end{aligned}$$

. . . .

Scheidet man nun in den Ausdrücken (22. und 23.) die den Gliedern gemeinschaftlichen Factoren aus, wie in (15. bis 18.) geschah, so wird man durch die hieraus sich ergebenden Abkürzungen auf die in (7. und 9.) gefundenen Gleichungen geführt. Ueberblickt man die in diesem Paragraph gegebenen Ausdrücke, so zeigt sich leicht, dass die Formeln (8. und 10.) die zweckmässigsten sind. Alle übrigen hier gegebenen Entwicklungen müssen, wie natürlich, auf sie zurückführen, und die Formeln haben die nämliche Bedeutung für die Entwicklung der Facultäten in Reihen, wie die Vorzahlen des Binomiums für die Entwicklung des letztern.

Es werden sich noch auf andern Wegen Summenausdrücke für die Verbindungen mit und ohne Wiederholungen finden lassen. Dies ist aber weder unser Zweck, noch unserer Ansicht nach Hauptsache. Die Auffindung des allgemeinen Gesetzes ist der Hauptzweck, und diese ist in diesem und dem vorigen Paragraph ausgeführt.

Wir setzen jedoch noch einige andere Summenausdrücke für die Verbindungen mit und ohne Wiederholungen her, die in bestimmter Beziehung allgemeiner als die vorstehenden, in so weit aber specieller sind, als sie nur für die eine oder die andere Art der Verbindungen gelten. Für die Verbindungen *ohne* Wiederholungen ist

$$24)\quad SC(x, x+\Delta x, \dots x+(n-1)\Delta x)^{q} = \frac{[\lg(1+\Delta)]^{n-q}x^{n|\Delta x}}{1^{n-q|1}(\Delta x)^n}.$$

Hier ist

$$\lg(1+\Delta)x^{n|\Delta x} = \Delta x^{n|\Delta x} - \tfrac{1}{2}\Delta^2 x^{n|\Delta x} + \tfrac{1}{3}\Delta^3 x^{n|\Delta x} - \tfrac{1}{4}\Delta^4 x^{n|\Delta x}.$$

Für die Verbindungen *mit* Wiederholungen ist

$$25)\quad SC(x, x+\Delta x, x+2\Delta x \dots x+n\Delta x)^q = \frac{\Delta^n x^{q+n}}{1^{n|1}(\Delta x)^n}$$

$$= \frac{1}{(\Delta x)^n . 1^{n|1}}[(x+n\Delta x)^{q+n} - \frac{n}{1}(x+(n-1)\Delta x)^{q+n} + (n)_2(x+(n-2)\Delta x)^{q+n}$$

$$-(n)_3(x+(n-3)\Delta x)^{q+n} \dots (-1)^n . (n)_n x^{q+n}.$$

Dass sich diese Gleichungen nicht auf die andere Art der Verbindungen

anwenden lassen, zeigt sich, wenn $-n$ statt n gesetzt wird, weil alsdann die Ausdrücke nach (15. §. 4.) verschwinden. Die beiden Gleichungen finden sich entwickelt in meiner Lehre von den Combinationen (26., 27. und 28. S. 48. u. ff.) und in meinen Forschungen in der Analysis (S. 71. u. ff.). Eine weitere abhängige Bildungsweise für diese Ausdrücke setzen wir hier her, jedoch ohne Beweis, nämlich:

$$26)\quad SC(a_1, a_2 \ldots a_n)^q = \frac{1}{q}\Big([n-q+1]_2\, SC(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-1} + [n-q+1]_3\, SC(a_1, a_2 \ldots a_n)^{q-2} + \ldots + [n-q+1]_q\, SC(a_1, a_2 \ldots a_n)^1 + [n-q+1]_{q+1}\Big).$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar die Anwendung auf $SC(1, 2, 3, \ldots n)^q$.

§. 10.

Um die Darstellung der Facultäten in Reihen zu erhalten, deren Glieder nach den *fallenden* Potenzen der Basis und den *steigenden* der Zunahme geordnet sind, benutzen wir die Ausdrücke (3. bis 6. §. 8.) und (8. und 10. §. 9.). Sie geben

$$1)\quad a^{n|d} = a^n + (n)_2 a^{n-1} d + \frac{3n-1}{4}(n)_3 a^{n-2} d^2 + (n)_2 (n)_4 a^{n-3} d^3$$
$$+ \frac{15n^3 - 30n^2 + 5n + 2}{48}(n)_5 a^{n-4} d^4$$
$$+ \frac{3n^4 - 10n^3 + 5n^2 + 2n}{16}(n)_6 a^{n-5} d^5$$
$$+ \frac{63n^5 - 315n^4 + 315n^3 + 91n^2 - 42n - 16}{1^{4|1}.1^{4|1}}(n)_7 a^{n-6} d^6$$
$$+ \frac{9n^6 - 63n^5 + 105n^4 + 7n^3 - 42n^2 - 16n}{6.24}(n)_8 a^{n-7} d^7$$
$$+ \frac{135n^7 - 1260n^6 + 3150n^5 - 840n^4 - 2345n^3 + 540n^2 + 404n + 144}{1^{5|1}.2^5}(n)_9 a^{n-8} d^8.$$

. . . .

Dieser Ausdruck ist allgemeiner und gilt für ein positives und negatives, ganzes und gebrochenes n, für $+d$ und $-d$, wenn die gehörigen Werthe eingeführt werden. Für eine Facultät mit negativem Exponenten ergiebt sich

$$2)\quad a^{-n|d}=a^{-n}+[n]_2\frac{d}{a^{n+1}}+\frac{3n+1}{4}[n]_3\frac{d^2}{a^{n+2}}+[n]_2[n]_4\frac{d^3}{a^{n+3}}$$
$$+\frac{15n^3+30n^2+5n-2}{48}[n]_5\frac{d^4}{a^{n+4}}$$
$$+\frac{3n^4+10n^3+5n^2-2n}{16}[n]_6\frac{d^5}{a^{n+}}$$
$$+\frac{63n^5+315n^4+315n^3-91n^2-42n+16}{24.24}[n]_7\frac{d^6}{a^{n+6}}$$
$$+\frac{9n^6+63n^5+105n^4-7n^3+42n^2+16n}{6.24}[n]_8\frac{d^7}{a^{n+7}}.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

In beiden Fällen hängt der Zeichenwechsel von d ab, wenn $-d$ statt $+d$ gesetzt wird. Für einen gebrochenen Exponenten ergiebt sich folgende Formel:

$$3)\quad a^{\frac{n}{m}|d}=a^{\frac{n}{m}|d}+\frac{n^{2|-m}}{1^{2|1}m^2}a^{\frac{n}{m}-1}d+\frac{3n-m}{4m}\frac{n^{3|-m}}{1^{3|1}m^3}a^{\frac{n}{m}-2}d^2$$
$$+\frac{n^{2|-m}.n^{4|-m}}{1^{2|1}1^{4|1}m^6}a^{\frac{n}{m}-3}d^3$$
$$+\frac{15n^3-30n^2m+5nm^2+2m^3}{48.m^3}\cdot\frac{n^{5|-m}}{1^{5|1}m^5}a^{\frac{n}{m}-4}d^4$$
$$+\frac{3n^4-10n^3m+5n^2m^2+2nm^3}{16.m^4}\cdot\frac{n^{6|-m}}{1^{6|1}m^6}a^{\frac{n}{m}-5}d^5$$
$$+\frac{63n^5-315n^4m+315n^3m^2+91n^2m^3-42nm^4-16n^5}{1^{4|1}1^{4|1}}\cdot\frac{n^{7|-m}}{1^{7|1}m^7}a^{\frac{n}{m}-6}d^6$$
$$+\frac{9n^6-63n^5m+105n^4m^2+7n^3m^3-42n^2m^4-16nm^5}{1^{3|1}1^{4|1}m^6}\cdot\frac{n^{8|-m}}{1^{8|1}m^8}a^{\frac{n}{m}-7}d^7$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Eben so

$$4)\quad a^{-\frac{n}{m}|d}=a^{-\frac{n}{m}}+\frac{n^{2|m}}{1^{2|1}m^2}a^{-\frac{n}{m}-1}d+\frac{3n+m}{4m}\cdot\frac{n^{3|m}}{1^{3|1}m^3}a^{-\frac{n}{m}-2}d^2$$
$$+\frac{n^{2|m}}{1^{2|1}m^2}\cdot\frac{n^{4|m}}{1^{4|1}m^4}a^{-\frac{n}{m}-1}d^3$$
$$+\frac{15n^3+30n^2m+5nm^2-2m^3}{48m^3}\cdot\frac{n^{5|m}}{1^{5|1}m^5}a^{-\frac{n}{m}-4}d^4$$
$$+\frac{3n^4+10n^3m+5nm^2-2nm^3}{16m^4}\cdot\frac{n^{6|m}}{1^{6|1}m^6}a^{-\frac{n}{m}-5}d^5$$
$$+\frac{63n^5+315n^4m+315n^3m^2-91n^2m^3-42nm^4+16m^5}{1^{4|1}.1^{4|1}m^5}\cdot\frac{n^{7|m}}{1^{7|1}m^7}a^{-\frac{n}{m}-6}d^6$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Der Zeichenwechsel der Glieder in (3. und 4.) wird theils von n und m, theils von d bedingt. Aus (3. und 4.) lassen sich leicht Anwendungen machen. Da es hier auf die Darstellung specieller Fälle ankommt, so geben wir folgende:

$$5)\quad a^{\frac{1}{2}|d} = a^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{d}{8a}+\frac{d^2}{2^7a^2}+\frac{5d^3}{2^{10}.a^3}-\frac{21d^4}{2^{15}a^4}-\frac{399d^5}{2^{18}a^5}+\frac{869d^6}{2^{22}a^6}+\frac{53625d^7}{2^{26}a^7}-\ldots\right),$$

$$a^{\frac{1}{2}|-d} = a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{d}{8a}+\frac{d^2}{2^7a^2}-\frac{5d^3}{2^{10}a^3}-\frac{21d^4}{2^{15}a^4}+\frac{399d^5}{2^{18}a^5}+\ldots\right),$$

$$a^{-\frac{1}{2}|d} = a^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3d}{8a}+\frac{25d^2}{128a^2}+\frac{105d^3}{2^{10}a^3}+\frac{1659d^4}{2^{15}a^4}+\frac{6237d^5}{2^{18}.a^5}+\ldots\right),$$

$$a^{-\frac{1}{2}|-d} = a^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3d}{8a}+\frac{25d^2}{128a^2}-\frac{105d^3}{2^{10}a^3}+\frac{1659d^4}{2^{15}a^4}-\frac{6237d^5}{2^{18}a^5}+\ldots\right),$$

$$a^{\frac{1}{3}|d} = a^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{d}{3^2a}+\;0\;+\frac{10d^3}{3^7a^3}+\frac{11d^4}{3^9a^4}-\frac{77d^5}{3^{10}a^5}+\ldots\right),$$

$$a^{-\frac{1}{3}|d} = a^{-\frac{1}{3}}\left(1+\frac{2d}{3^2a}+\frac{d^2}{3^2a^2}+\frac{13d^3}{3^5a^3}+\frac{221d^4}{5.3^7a^4}+\frac{1547d^5}{20.3^8a^5}+\ldots\right),$$

$$a^{\frac{1}{4}|d} = a^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{3d}{2.4^2a}-\frac{7d^2}{2.4^4a^2}+\frac{231d^3}{4^8a^3}+\frac{103.77d^4}{4^{11}.2a^4}-\frac{171.1463d^5}{4^{14}.a^5}-\ldots\right),$$

u. s. w. *Kramp* hat in seiner Anal. d. réfr. (Pg. 89.) gleichfalls Entwicklungen von Facultäten mit gebrochenen Exponenten gegeben, die ganz mit den hiesigen übereinstimmen. Die von ihm befolgte Methode ist (Pg. 69. bis 89. a. a. O.) vorgetragen. Sie ist ziemlich weitläufig und die Ausführung der von ihm angezeigten Operationen macht viele Mühe. Dabei entbehrt die von ihm angewendete Entwicklungsweise der Allgemeinheit und Einfachheit.

Die in (5.) gefundenen Reihen convergiren stark, wenn $a > d$, und selbst dann noch, wenn $a = d$ ist. Im ersten Falle sind oft schon wenige Glieder hinreichend, um den Werth einer Facultät mit gebrochenem Exponenten zu finden. Setzt man $a = 100$, $d = 1$, so ist aus (5.)

$$\begin{aligned}100^{\frac{1}{2}|1} &= 10\left(1-\frac{1}{800}+\frac{1}{1280000}+\frac{5}{1024.10^6}-\frac{21}{32768.10^8}-\ldots\right)\\ &= 10(1-0{,}00125+0{,}00000078125-0{,}0000000048828125\;\ldots)\\ &= 9{,}987507863\;\ldots\\ 100^{\frac{1}{2}|-1} &= 10\left(1+\frac{1}{800}+\frac{1}{1280000}-\frac{5}{1024.10^6}-\ldots\right)\\ &= 10{,}012507763\;\ldots\end{aligned}$$

Diese Werthe können positiv oder negativ sein.

Man kann auch jeden der im vorhergehenden Paragraph gefundenen Ausdrücke für die Summen der Verbindungen wählen, um die Facultäten in eine Reihe zu entwickeln. Dadurch ergeben sich dann andere Formen für denselben Gegenstand. Die Gleichungen (85. §. 9.) z. B. geben

$$6)\quad a^{n|d} = a^n(1 + (n)_2 \frac{d}{a} + [2(n)_3 + 3(n)_4] \frac{d^2}{a^2}$$
$$+ [6(n)_4 + 20(n)_5 + 15(n)_6] \frac{d^3}{a^3}$$
$$+ [24(n)_5 + 130(n)_6 + 210(n)_7 + 105(n)_8] \frac{d^4}{a^4}$$
$$+ [120(n)_6 + 924(n)_7 + 2380(n)_8 + 2520(n)_9 + 915(n)_{10}] \frac{d^5}{a^5}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese Formel lässt sich nach Facultäten von n ordnen und es ergiebt sich

$$7)\quad a^{n|d} = a^n(1 + \frac{d}{a}(n)_2 + 2\frac{d^2}{a^2}(n)_3 + 3[\frac{d^2}{a^2} + 2\frac{d^3}{a^3}](n)_4$$
$$+ 4[5\frac{d^3}{a^3} + 6\frac{d^4}{a^4}](n)_5$$
$$+ 5[3\frac{d^3}{a^3} + 26\frac{d^4}{a^4} + 24\frac{d^5}{a^5}](n)_7$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots)$$

Die Formel (7.) hat *Crelle* in seiner Theorie der analytischen Facultäten (§. 50. No. 340.) aufgestellt.

§. 11.

Ehe wir uns zu weitern Anwendungen der bisher gefundenen Sätze wenden, wird es nöthig sein, einige Umformungen, welche mit den verschiedenen Elementen einer Facultät vorgenommen werden können, zu betrachten.

Dividirt und multiplicirt man eine Facultät durch ihre Zunahme so oft als der Exponent bestimmt, so erhält man

$$1)\quad a^{n|d} = d^n \frac{a}{d}(\frac{a}{d}+1)(\frac{a}{d}+2)\ldots(\frac{a}{d}+n-1) = d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1}.$$

Die Facultät wurde also, ohne Werthänderung, in eine andere mit der Zunahme 1 umgeformt. Die Formel gilt für alle Werthe von n. Es ist

$$2)\quad a^{-n|d} = d^{-n}\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|1} = \frac{1}{d^n(\frac{a}{d}-n^{\,n|1}} = \frac{1}{d^n(\frac{d}{a}-1)^{n|-1}},$$

$$3)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = d^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}|1},$$

$$4)\quad \left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}|d}}{d^{\frac{n}{m}}}.$$

Wird (1.) mit a multiplicirt und dividirt, so ergiebt sich

$$5)\quad a^{n|d} = a^n\, 1^{n|\frac{d}{a}}.$$

Hier ändert sich die Basis und mit ihr die Zunahme. Es ist

$$6)\quad a^{-n|d} = \frac{1}{a^n(1-n\frac{d}{a})^{n|\frac{d}{a}}} = \frac{1}{a^n(1-\frac{d}{a})^{n|-\frac{d}{a}}},$$

$$7)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{n}{m}}1^{\frac{n}{m}|\frac{d}{a}}.$$

Wird (1.) mit h^n dividirt und multiplicirt, so findet sich

$$8)\quad a^{n|d} = \frac{d^n}{h^n}\cdot\frac{ah}{d}\cdot(\frac{ah}{d}+h)(\frac{ah}{d}+2h)\ldots.(\frac{ah}{d}+(n-1)h) = \frac{d^n}{h^n}\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|h}.$$

Die Zunahme einer Facultät kann in jede beliebige verwandelt werden. Dies giebt

$$9)\quad a^{-n|d} = \frac{h^n}{d^n(\frac{ah}{d}-nh)^{n|h}} = \frac{h^n}{d^n(\frac{ah}{d}-h)^{n|-h}},$$

$$10)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{ah}{d}\right)^{\frac{n}{m}|h}.$$

Wird (5.) mit b^n dividirt und multiplicirt, so erhält man

$$11)\quad a^{n|d} = \frac{a^n}{b^n}b(b+\frac{bd}{a})(b+2\frac{bd}{a})\ldots.(b+(n-1)\frac{bd}{a}) = \frac{a^n}{b^n}b^{n|\frac{bd}{a}}.$$

Die Basis einer Facultät kann demnach in jede beliebige umgeformt werden.

Endlich kann auch noch Basis und Zunahme jeder Facultät gleichzeitig auf die Einheit zurückgeführt werden. Aus (22. §. 7.) ist

$$1^{\frac{a}{d}+n-1|1} = 1^{\frac{a}{d}}(1+\frac{a}{d})(1+\frac{a}{d}+1)(1+\frac{a}{d}+2)\ldots.(\frac{a}{d}+n-1),$$

$$1^{\frac{a}{d}-1|1} = 1^{\frac{a}{d}|1}(1+\frac{a}{d})^{-1|1} = \frac{d}{a}1^{\frac{a}{d}|1}.$$

Wird die erste Gleichung durch die zweite dividirt, so erhält man

$$\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = \frac{a}{d}(\frac{a}{d}+1)(\frac{a}{d}+2)\ldots.(\frac{a}{d}+n-1).$$

Wird dieser Werth in (1.) gesetzt, so ergiebt sich

$$12)\quad a^{n|d} = d^n\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}}.$$

Ist n ein Bruch, so wird

$$13)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = d^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}}.$$

Bis jetzt wurde die Zunahme *positio* angenommen. Aendert man ihr Zeichen, so ergeben sich folgende Formeln:

$$a^{n|-d} = d^n \frac{a}{d}\left(\frac{a}{d}-1\right)\left(\frac{a}{d}-2\right)\dots\left(\frac{a}{d}-(n-1)\right) = (-d)^n\left(\frac{a}{-d}\right)\left(\frac{a}{-d}+2\right)\left(\frac{a}{-d}+1\right)\dots\left(\frac{a}{-d}+n-1\right)$$

oder

$$14)\quad a^{n|-d} = d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1} = (-d)^n\left(\frac{a}{-d}\right)^{n|1} \quad \text{und}$$

$$15)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = d^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}|-1} = (-d)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{-d}\right)^{n|1}.$$

Eben so ist

$$a^{-n|-d} = \frac{1}{d^n\left(\frac{a}{d}+1\right)\left(\frac{a}{d}+2\right)\dots\left(\frac{a}{d}+n\right)} = \frac{1}{d^n\left(\frac{a}{d}+n\right)^{n|-1}}$$

$$= \frac{1}{(-d)^n\left(\frac{a}{-d}-1\right)\left(\frac{a}{-d}-2\right)\dots\left(\frac{a}{-d}-n\right)} = \frac{1}{(-d)^n\left(\frac{a}{-d}-n\right)^{n|1}}.$$

oder

$$16)\quad a^{-n|-d} = d^{-n}\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|-1} = (-d)^{-n}\left(\frac{a}{-d}\right)^{-n|1} \quad \text{und}$$

$$17)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = d^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|-1} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{-d}\right)^{-\frac{n}{m}|1}$$

Wird $a^{n|-d}$ mit h^n dividirt und multiplicirt, so ergiebt sich auf ganz einfache Weise:

$$18)\quad a^{n|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^n\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^n\left(\frac{ah}{-d}\right)^{n|h},$$

$$19)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{ah}{d}\right)^{\frac{n}{m}|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{ah}{-d}\right)^{\frac{n}{m}|h}.$$

Auf gleiche Weise findet sich

$$20)\quad a^{-n|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-n}\left(\frac{ah}{d}\right)^{-n|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^n\left(\frac{ah}{-d}\right)^{-n|h},$$

$$21)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{ah}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{ah}{-d}\right)^{-n|h}$$

Aus (2.) erhalten wir

$$a^{-n|d} = \frac{1}{d^n\left(\frac{a}{d}-n\right)^{n|1}} = \frac{1^{\frac{a}{d}|1}\cdot\frac{a}{d}}{d^n 1^{\frac{a}{d}|1}\frac{a}{d}\left(\frac{a}{d}-1\right)\left(\frac{a}{d}-2\right)\dots\left(\frac{a}{d}-n\right)}$$

$$= \frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{d^n 1^{\frac{a}{d}|1}\left(1+\frac{a}{d}\right)^{-1|1}\cdot\left(1+\frac{a}{d}-n-1\right)^{n+1|1}} = \frac{1^{\frac{a}{d}|1}\left(1+\frac{a}{d}\right)^{-n-1|1}}{d^n 1^{\frac{a}{d}-1|1}}.$$

Dies giebt

$$22)\quad a^{-n|d} = d^{-n}\frac{1^{\frac{a}{d}-n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}}.$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichung (12.) auch für ein negatives n gilt. Es findet sich

$$23)\quad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}}.$$

Aus der Formel, aus welcher die Gleichung (14.) abgeleitet wurde, erhält man leicht auf dem eben gezeigten Wege:

$$24)\quad a^{n|-d} = d^{n}\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|-1}}{1^{\frac{a}{d}-1|-1}} = (-d)^{n}\frac{1^{\frac{-a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{-a}{d}-1|1}} \quad \text{und}$$

$$25)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = d^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{-a}{d}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{-a}{d}-1|1}}.$$

Daraus folgt

$$26)\quad a^{-n|-d} = d^{-n}\frac{1^{\frac{a}{d}-n-1|-1}}{1^{\frac{a}{d}-1|-1}} = (-d)^{-n}\frac{1^{\frac{-a}{d}-n-1|1}}{1^{\frac{-a}{d}-1|1}} \quad \text{und}$$

$$27)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = d^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{d}-1|-1}}{1^{\frac{a}{d}-1|-1}} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{-a}{d}-\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{-a}{d}-1|1}}.$$

Aus den Gleichungen (22. bis 27.) zeigt sich, dass die Gleichung (12.) ganz allgemein gilt.

Aendert die Basis das Zeichen, so entstehen gleichfalls Veränderungen der Facultät. Eine negative Basis giebt

$$28)\quad (-a)^{n|d} = (-a)(-a+d \ldots . (-a+(n-1)d) = (-1)^{n}a^{n|-d}.$$

Hieraus folgt

$$29)\quad (-a)^{2n|d} = a^{2n|-d},$$
$$(-a)^{2n+1|d} = -a^{2n+1|-d},$$

$$30)\quad (-a)^{\frac{n}{m}|d} = (-1)^{\frac{n}{m}}a^{\frac{n}{m}|-d}.$$

Ist Basis und Zunahme negativ, so ergiebt sich

$$31)\quad (-a)^{n|-d} = (-a)(-a-d)(-a-2d)\ldots . (-a-(n-1)d) = (-1)^{n}a^{n|+d},$$

$$32)\quad (-a)^{2n|-d} = a^{2n|d},$$
$$(-a)^{2n+1|-d} = -a^{2n+1|d},$$

$$33)\quad (-a)^{\frac{n}{m}|-d} = (-)^{\frac{n}{m}}a^{\frac{n}{m}|d}.$$

Eben so ist

$$34)\quad (-a)^{-n|d} = \frac{1}{(-a-d)(-a-2d)\dots(-a-nd)} = \frac{1}{(-1)^n(a+nd)^{n|-d}} = (-1)^n a^{-n|-d},$$

$$35)\quad (-a)^{-2n|d} = a^{-2n|-d} \quad \text{und} \quad (-a)^{-2n-1|d} = -a^{-2n-1|-d},$$

$$36)\quad (-a)^{-\frac{n}{m}|d} = (-1)^{-\frac{n}{m}} a^{-\frac{n}{m}|-d},$$

$$37)\quad (-a)^{-n|-d} = \frac{1}{(-a+d)(-a+2d)\dots(-a+nd)} = (-1)^{-n} a^{-n|d},$$

$$38)\quad (-a)^{-2n|-d} = a^{-2n|d} \quad \text{und} \quad (-a)^{-2n-1|-d} = -a^{-2n-1|+d},$$

$$39)\quad (-a)^{-\frac{n}{m}|-d} = (-1)^{-\frac{n}{m}} a^{-\frac{n}{m}|d}.$$

Diese Ausdrücke (14. bis 25.) folgen einem und demselben Grundgesetze und stimmen mit den entwickelten Darstellungen, welche sich aus (3. und 4. §. 10.) fanden, genau überein; was ihre Richtigkeit beweiset. Bringt man nun mit diesen Ausdrücken die schon früher bekannten von

$$(+a)^{n|d},\quad (+a)^{n|-d},\quad (+a)^{-n|d},\quad (-^{n|d},\quad (+a)^{-n|-d}$$

zusammen, so lassen sich daraus weitere Folgerungen ziehen. Dahin gehören folgende Sätze.

> 40) Eine Facultät, deren Exponent eine gerade Zahl ist und die einen positiven Werth und eine positive Zunahme hat, kann aus einer positiven Basis mit positiver Zunahme, oder aus einer negativen Basis mit negativer Zunahme entstanden sein.
>
> 41) Eine Facultät, deren Exponent eine ungerade Zahl ist und die einen positiven Werth und eine positive Zunahme hat, kann nicht aus einer negativen Basis und negativen Zunahme entstanden sein, u. dergl.

Aus (1, 5, 17) ziehen wir noch folgende Vergleichung

$$42)\quad a^{n|d} : (-a)^{n|-d} = a^n . 1^{n|\frac{d}{a}} : (-a)^n 1^{n|\frac{-d}{-a}} = 1 : (-1)^n.$$

Dies gilt für jedes n und giebt in Uebereinstimmung mit den übrigen in diesem Paragraph mitgetheilten Sätzen:

$$43)\quad a^{2n|d} : (-a)^{2n|-d} = 1:1$$
$$a^{2n+1|d} : (-a)^{2n+1|-d} = 1:-1$$

$$44)\quad a^{\frac{n}{m}|d} : (-a)^{\frac{n}{m}|-d} = (+1)^{\frac{n}{m}} : (-1)^{\frac{n}{m}}.$$

Diese Sätze scheint *Kramp* ungeachtet seiner Vorsicht übersehen oder wenigstens nicht gewürdigt zu haben, denn er kommt (S. 55. bis 61. und S. 91. No. 149.) zu Resultaten, die mit den vorstehenden und mit denen (§. 10.) im Widerspruch stehen.

Es lässt sich auch eine Facultät mit positiver Zunahme in eine gleichgeltende mit negativer Zunahme und umgekehrt verwandeln. Es ist nämlich

$$a^{n|d} = a(a+d)(a+2d)\ldots.(a+nd-d) = (a+nd-d)^{n|-d},$$

also

$$45)\quad a^{n|d} = (a+(n-1)d)^{n|-d}.$$

Eben so ist umgekehrt für die Verwandlung einer Facultät mit negativer Zunahme in eine andere mit positiver Zunahme:

$$46)\quad a^{n|-d} = (a-nd+d)^{n|d}.$$

Aus (§. 4.) ergiebt sich folgender Ausdruck:

$$47)\quad \frac{1}{a^{n|d}} = (a+nd)^{-n|d} \text{ und } \frac{1}{a^{n|-d}} = (a-nd)^{-n|-d}.$$

Derselbe enthält folgende Regel:

Eine Facultät im Divisor wird in eine Facultät als Factor umgeformt, wenn man zur Basis das Product aus der Zunahme in den Exponenten zählt und das Zeichen des Exponenten in das entgegengesetzte verwandelt.

Nun ist ferner aus (§. 4.)

$$a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}} \text{ und}$$

$$a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+nd)^{n|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{n|d}}.$$

Wendet man die aus (47.) sich ergebende Regel auf die zweite Form der eben gefundenen Ausdrücke an, so ergiebt sich

$$48)\quad a^{-n|d} = (a-nd-d)^{-n|-d} \text{ und}$$

$$49)\quad a^{-n|-d} = (a+nd+d)^{-n|d}.$$

Aus (45., 46., 48. und 49.) ergiebt sich folgende Zusammenstellung:

$$50)\quad \begin{aligned} a^{n|d} &= (a+(n-1)d)^{n|-d} = (a+(n-1)(+d))^{n|-d};\\ a^{n|-d} &= (a-(n-1)d)^{n|d} = (a+(n-1)(-d))^{n|+d};\\ a^{-n|d} &= (a-(n+1)d)^{-n|-d} = (a+(-n-1)(+d))^{-n|-d};\\ a^{-n|-d} &= (a+(n+1)d)^{-n|+d} = (a+(-n-1)(-d))^{-n|+d}. \end{aligned}$$

Hieraus findet sich folgendes Gesetz.

51) Um das Zeichen der Zunahme einer Facultät in das entgegengesetzte verwandeln zu dürfen, erniedrige man den Exponenten um die Einheit und multiplicire ihn mit der Zunahme, zähle das erhaltene Product zur Basis und ändere hierauf das Zeichen der Zunahme.

Die Formel (50.) gilt auch für gebrochene Exponenten und man hat

$$52)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = (a+(\tfrac{n}{m}-1)d)^{\frac{n}{m}|-d},$$

$$a^{\frac{n}{m}|-d} = (a-(\tfrac{n}{m}-1)d)^{\frac{n}{m}|d},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|d} = (a-(\tfrac{n}{m}+1)d)^{-\frac{n}{m}|d},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = (a+(\tfrac{n}{m}+1)d)^{-\frac{n}{m}|d}.$$

Auf diese Gleichungen kann man auch die Gleichungen (12., 13., 22. bis 27.) anwenden, woraus noch weitere Umformungen entstehen. So ist z. B.

$$53)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = d^{\frac{n}{m}} \frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}|1}},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{d^{\frac{n}{m}} 1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}|1}},$$

$$a^{\frac{n}{m}|d} = d^{\frac{n}{m}} \frac{1^{\frac{a}{d}+\frac{2n}{m}-2|-1}}{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}-2|-1}},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{1^{\frac{a}{d}-\frac{2n}{m}-2|-1}}{d^{\frac{n}{m}} 1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}-2|-1}}$$

u. s. w.

Da der Gleichung (12.) zufolge jede Facultät von beliebiger Basis und Zunahme in eine andere gleichbedeutende verwandelt werden kann, deren Basis und Zunahme die Einheit ist, so könnte die Untersuchung der Facultäten auf die specielle Form $1^{\sigma|1}$ beschränkt und dadurch, wie es scheint, sehr erleichtert werden. Doch ist der Gewinn nur scheinbar, denn die Reduction führt auf *zwei* Facultäten mit gebrochenen Exponenten, deren Ermittlung die Operationen anhäuft, welche mit denen durch $a^{n|d}$ angedeuteten in keinem Verhältnisse stehen. Andererseits giebt die Form $a^{n|d}$ der Untersuchung eine grössere Allgemeinheit, während sie die Operationen nicht erschwert, sondern in den meisten Fällen erleichtert, und begreift zugleich Fälle in sich, welche die specielle Form ausschliesst, die aber füglich nicht ausgeschlossen werden dürfen. Aus diesem Grunde wird im Folgenden die allgemeine Form beibehalten werden.

§. 12.

Es ist nöthig, die Werthe der Facultäten mit gebrochenen Exponenten leicht bestimmen zu können. Dies wird geschehen, falls die Reihen (3. bis 5. §. 10.) stark convergiren. Die Convergenz nimmt ab, wenn die Basis abnimmt. Es giebt aber ein einfaches Mittel, den Reihen jede beliebige Convergenz zu geben. Es dient dazu die Gleichung (21. §. 7.), nämlich:

$$a^{r+\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{n}{m}+r|d}.$$

Je nachdem r, n, d positiv oder negetiv angenommen werden, ergeben sich folgende vier Gleichungen:

$$1)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{r|d}} = \frac{(am)^{r|md}(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}}{(am+nd)^{r|md}}.$$

$$2)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+d)^{r|d}(a+rd)^{\frac{n}{m}|-d}}{(a+d)^{r|d}} = \frac{(am-nd+md)^{r|md}(a+rd)^{\frac{n}{m}|-d}}{(am+md)^{r|md}}$$

$$3)\quad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|d}}{(a-\frac{n}{m}d)^{r|d}} = \frac{(am)^{r|md}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|d}}{(am-nd)^{r|md}}$$

$$4)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a+\frac{n}{m}d+d)^{r|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}}{(a+d)^{r|d}} = \frac{(am+nd+md)^{r|md}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}}{(a+d)^{r|d}}.$$

Die Gleichung (2.) wird aus (1.) abgeleitet, wenn $-d$ statt d und $-r$ statt r gesetzt wird, die Gleichung (3.) wenn $-n$ statt n gesetzt wird; die Gleichung (4.) folgt aus (2.), wenn $-n$ statt n gesetzt wird. Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch Umkehrung folgende Ausdrücke:

$$5)\quad (a+rd)^{\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{n}{m}|d}\,\frac{(a+\frac{n}{m}d)^{r|d}}{a^{r|d}} = a^{\frac{n}{m}|d}\,\frac{(am+nd)^{r|md}}{(am)^{r|md}}$$

$$6)\quad (a+rd)^{\frac{n}{m}|-d} = a^{\frac{n}{m}|-d}\,\frac{(a+d)^{r|d}}{(a-\frac{n}{m}d+d)^{r|d}} = a^{\frac{n}{m}|-d}\,\frac{(am+md)^{r|md}}{(am-nd+md)^{r|md}}$$

$$7)\quad (a+rd)^{-\frac{n}{m}|d} = a^{-\frac{n}{m}|d}\,\frac{(a-\frac{n}{m}d)^{r|d}}{a^{r|d}} = a^{-\frac{n}{m}|d}\,\frac{(am-nd)^{r|md}}{(am)^{r|md}}$$

$$8)\quad (a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d} = a^{-\frac{n}{m}|-d}\,\frac{(a+d)^{r|d}}{(a+\frac{n}{m}d+d)^{r|d}} = a^{-\frac{n}{m}|-d}\,\frac{(am+md)^{r|md}}{(am+nd+md)^{r|md}}.$$

Die Gleichungen (1. bis 4.) dienen, die Berechnung der Werthe von

$a^{\frac{n}{m}|d}$, $a^{\frac{n}{m}|-d}$, ... auf stark convergirende Reihen zu bringen. Die Gleichungen (5. bis 8.) dienen, durch die Werthe von $a^{\frac{n}{m}|d}$, $a^{\frac{n}{m}|-d}$, ..., welche auf irgend einem Wege gefunden wurden, die Werthe von $(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}$, $(a+rd)^{\frac{n}{m}|-d}$, ... durch Multiplication und Division darzustellen. Endlich geben diese Gleichungen noch folgende merkwürdige Relationen:

$$9)\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|d}}{(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}} = \frac{a^{r|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{r|d}} = \frac{(am)^{r|md}}{(am+nd)^{r|md}}$$

$$10)\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|-d}}{(a+rd)^{\frac{n}{m}|-d}} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+d)^{r|d}}{(a+d)^{r|d}} = \frac{(am-nd+md)^{r|md}}{(am+md)^{r|md}}$$

$$11)\quad \frac{a^{-\frac{n}{m}|+d}}{(a+rd)^{-\frac{n}{m}|d}} = \frac{a^{r|d}}{(a-\frac{n}{m}d)^{r|d}} = \frac{(am)^{r|md}}{(am-nd)^{r|md}}$$

$$12)\quad \frac{a^{-\frac{n}{m}|-d}}{(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}} = \frac{(a+\frac{n}{m}d+d)^{r|d}}{(a+d)^{r|d}} = \frac{(am+nd+md)^{r|md}}{(am+md)^{r|md}}.$$

Sie zeigen, dass sich das Verhältniss zweier Facultäten, welche den nämlichen Exponenten, die nämliche Zunahme und eine ähnliche Basis (a, $a+rd$) haben, auf ganze Zahlen zurückbringen lässt. Ferner sieht man, wie sich von einer Basis auf die andere bei gleichem Exponenten und gleicher Zunahme übergehen lässt.

Um die Gleichungen (1. bis 4.) benutzen zu können, bezeichnen wir der Kürze wegen die Vorzahlen der Glieder in (3. §. 10.), der Reihe nach von dem zweiten an, durch A_1, A_2, A_3 ...., und die in der Formel (4. §. 10.) durch B_1, B_2, B_3, ... Dadurch gehen die beiden Formeln in folgende über:

$$13)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{n}{m}}\left(1+A_1\frac{d}{a}+A_2\frac{d^2}{a^2}+A_3\frac{d^3}{a^3}+....\right)$$

$$14)\quad a^{-\frac{n}{m}|d} = a^{-\frac{n}{m}}\left(1+B_1\frac{a}{a}+B_2\frac{d^2}{a^2}+B_3\frac{d^3}{a^3}+....\right).$$

Nehmen wir nun die Gleichung (1.) zu Hülfe und setzen aus ihr in (13.) $a+rd$ statt a, so ergiebt sich

$$15)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{(am)^{r|md}(a+rd)^{\frac{n}{m}}}{(am+nd)^{r|md}}\left(1+A_1\frac{d}{a+rd}+A_2\frac{d^2}{(a+rd)^2}+A_3\frac{d^3}{(a+rd)^3}+....\right)$$

Auf gleiche Weise erhält man für (2., 3., 4.):

$$16)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{(am-nd+md)^{r|mb}(a+rd)^{\frac{n}{m}}}{(am+md)^{r|md}}\left(1-A_1\frac{d}{a+rd}+A_2\frac{d^2}{(a+rd)^2}-A_3\frac{d^3}{(a+rd)^3}+\ldots\right)$$

$$17)\quad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{(am)^{r|md}}{(am-nd)^{r|md}(a+rd)^{\frac{n}{m}}}\left(1+B_1\frac{d}{a+rd}+B_2\frac{d^2}{(a+rd)^2}+B_3\frac{d^3}{(a+rd)^3}+\ldots\right)$$

$$18)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{(am+nd+md)^{r|md}}{(am+md)^{r|md}(a+rd)^{\frac{n}{m}}}\left(1-B_1\frac{d}{a+rd}+B_2\frac{d^2}{(a+rd)^2}+B_3\frac{d^3}{(a+rd)^3}+\ldots\right)$$

In allen den Gleichungen (1. bis 4. und 15. bis 18.) kann die Grösse r ganz willkührlich angenommen werden. Man kann daher die Convergenz der begleitenden Reihen beliebig steigern. Nimmt man r unendlich gross an, so verschwinden in (15. bis 18.) die Glieder der begleitenden Reihen. Deuten wir diesen besondern Fall für r durch den griechischen Buchstaben α an, so ergeben sich aus (15. bis 18.) folgende Ausdrücke:

$$19)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\alpha|d}(a+ad)^{\frac{n}{m}}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = \frac{(am)^{\alpha|md}(a+ad)^{\frac{n}{m}}}{(am+nd)^{\alpha|md}}$$

$$20)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+d)^{\alpha|d}(a+ad)^{\frac{n}{m}}}{(a+d)^{\alpha|d}} = \frac{(am-nd+md)^{\alpha|md}(a+ad)^{\frac{n}{m}}}{(am+md)^{\alpha|d}}$$

$$21)\quad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{-\frac{n}{m}}}{(a-\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = \frac{(am)^{\alpha|md}}{(am-nd)^{\alpha|md}(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}}$$

$$22)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a+\frac{n}{m}d+d)^{\alpha|d}}{(a+d)^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}} = \frac{(an+nd+md)^{\alpha|md}}{(am+md)^{\alpha|md}(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}}.$$

Da die Grösse α auf die Ausführung einer unendlichen Zahl von Operationen, oder auf eine unendliche Anzahl von Factoren deutet, und erst nach Ausführung dieser Operationen das in $(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}$ Enthaltene vorgenommen werden soll, so heisst dies so viel, als es soll niemals vorgenommen werden. Daher kann man die Wurzelgrösse in diesen Formeln weglassen, wodurch man auf Folgendes geführt wird:

$$23)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)(a+\frac{n}{m}d+3d)\ldots}$$

$$= \frac{am(am+md)(am+2md)(am+3md)\ldots}{(am+nd)(am+nd+md)(am+nd+2md)(am+nd+3md)\ldots}$$

$$24)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+d)(a-\frac{n}{m}d+2d)(a-\frac{n}{m}d+3d)(a-\frac{n}{m}d+4d)\ldots}{(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)}$$
$$= \frac{(am-nd+md)(am-nd+2md)(am-nd+3md)\ldots}{(am+md)(am+2md)(am+3md)}$$

$$25)\quad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a(a+d)(a+2d)(a+3d)}{(a-\frac{n}{m}d)(a-\frac{n}{m}d+d)(a-\frac{n}{m}d+2d)(a-\frac{n}{m}d+3d)\ldots}$$
$$= \frac{am(am+md)(am+2md)(am+3md)\ldots}{(am-nd)(am-nd+md)(am-nd+2md)(am-nd+3md)\ldots}$$

$$26)\quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)(a+\frac{n}{m}d+3d)(a+\frac{n}{m}d+4d)\ldots}{(a+d)(a+2d)(a+3d)(a+4d)}$$
$$= \frac{(am+nd+md)(am+nd+2md)(am+nd+3md)(am+nd+4md)\ldots}{(am+md)(am+2md)(am+3md)(am+4md)}.$$

Hiedurch gelangen wir zu folgendem Resultate:

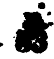
27) Jede Facultät mit gebrochenem Exponenten lässt sich durch einen Quotienten zweier ins Unendliche fortlaufende Facultäten darstellen, deren Fortschreitungsgesetz von der Basis und von Zähler und Nenner des Exponenten und der Zunahme auf die hier vorliegende Weise abhängt. Umgekehrt:

28) Facultäten, die ins Unendliche fortlaufen und welche Zähler und Nenner eines Bruches bilden, lassen sich unter bestimmten Bedingungen durch eine Facultät mit gebrochenem Exponenten darstellen.

Bei dem Uebergange von unendlichen Facultäten auf die erzeugende Facultät mit gebrochenem Exponenten muss man mit Vorsicht zu Werke gehen. Es wird gut sein, dabei auf die Ausdrücke (19. bis 22.) Rücksicht zu nehmen, um Unrichtigkeiten vorzubeugen.

Folgende weitere, nicht unwichtige Folgerung ziehen wir aus der Vergleichung von (19. bis 22.) mit (5. bis 8.) hinsichtlich des Werths der Ausdrücke $(a+rd)^{\frac{n}{m}|\pm d}$ und $(a+rd)^{\frac{n}{m}}$, nämlich:

29) Die Werthe einer Wurzelgrösse (Potenz mit gebrochenem Exponenten) und einer Facultät, welche die nämliche Grundgrösse, den nämlichen Exponenten und irgend eine Zunahme hat, nähern sich, wenn die Grundgrösse wächst, immer mehr und mehr, ohne je zusammenzufallen, oder werden in der Unendlichkeit, d. h. nie, einander gleich. Beide Werthe stehen daher zu einander in dem Verhältnisse, wie eine Curve und ihre Asymptote.



§. 13.

Durch Verbindung der Gleichungen (19. bis 26.) lässt sich eine Reihe von Sätzen ableiten. Wir heben folgende hervor:

$$1)\quad a^{\frac{n}{m}|d} \,.\, a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots}{(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots\ldots} \cdot \frac{(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots\ldots}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)\ldots\ldots}$$

$$= \frac{am}{am+nd},$$

$$2)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} \,.\, a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{am}{am-nd}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich folgender Zusammenhang:

$$3)\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{am}{(am+nd)\,a^{-\frac{n}{m}|-d}} = \frac{am \times (a+\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|-d}}{am+nd},$$

$$4)\quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{am}{(am-nd)\,a^{-\frac{n}{m}|d}} = \frac{am \times (a-\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|d}}{am-nd},$$

$$5)\quad a^{\frac{n}{m}|d} \,.\, a^{\frac{n}{m}|-d} = a\,\frac{(a-\frac{n}{m}d+d)(a-\frac{n}{m}d+2d)\ldots\ldots}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)\ldots\ldots}.$$

Diese Gleichung kann in manchen Fällen auf einen endlichen Werth führen, nämlich:

$$6)\quad a^{-\frac{n}{m}|d}\, a^{-\frac{n}{m}|-d} = a\,\frac{(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots\ldots}{(a-\frac{n}{m}d)(a-\frac{n}{m}d+d)\ldots\ldots},$$

$$7)\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|d}}{a^{-\frac{n}{m}|d}} = \frac{(a-\frac{n}{m}d)(a-\frac{n}{m}d+d)\ldots\ldots}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)\ldots\ldots},$$

$$8)\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|-d}}{a^{-\frac{n}{m}|-d}} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots\ldots}{(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots\ldots}.$$

Aus (1. und 2.), oder (7. und 8.) ist

$$9)\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|d} \,.\, a^{-\frac{n}{m}|-d}}{a^{\frac{n}{m}|-d} \,.\, a^{-\frac{n}{m}|d}} = \frac{am-nd}{am+nd},$$

$$10)\quad a^{-1+\frac{n}{m}|d} = \frac{a(a+d)(a+2d)\,....}{(a-d+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)\,....} = \frac{a^{\alpha|d}}{(a-d+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{-\frac{n}{m}}},$$

$$11)\quad a^{-1+\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+2d)(a-\frac{n}{m}d+3d)\,....}{(a+d)(a+2d)(a+3d)} = \frac{(a-\frac{n}{m}d+2d)^{\alpha|d}}{(a+d)^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{-\frac{n}{m}}},$$

$$12)\quad a^{1-\frac{n}{m}|d} = \frac{a(a+d)(a+2d)\,....}{(a-\frac{n}{m}d+d)(a-\frac{n}{m}d+2d)\,....} = \frac{a^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{-\frac{n}{m}}}{(a+d-\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}},$$

$$13)\quad a^{1-\frac{n}{m}|-d} = \frac{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)\,....}{(a+d)(a+2d)\,....} = \frac{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{-\frac{n}{m}}}{(a+d)^{\alpha|d}}.$$

Diese Entwicklungen lassen sich beliebig fortsetzen. Durch die Verbindung der in diesem und dem vorigen Paragraph gefundenen Sätze lassen sich noch weitere Ableitungen machen. Beschränkt man sich auf den einfachsten Fall, wenn die Basis und Zunahme 1 ist, so findet sich

$$14)\quad 1^{\frac{n}{m}|1} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\,....}{(\frac{n}{m}+1)(\frac{n}{m}+2)(\frac{n}{m}+3)\,....} = \frac{m\cdot2m\cdot3m\cdot4m\,....}{(n+m)(n+2m)(n+3m)\,....},$$

$$15)\quad 1^{\frac{n}{m}|-1} = \frac{(2-\frac{n}{m})(3-\frac{n}{m})(4-\frac{n}{m}\,....}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,....} = \frac{(-n+2m)(-n+3m)(-n+4m)\,....}{2m\cdot3m\cdot4m\cdot5m\,....},$$

$$16)\quad 1^{-\frac{n}{m}|1} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\,....}{(1-\frac{n}{m})(2-\frac{n}{m})(3-\frac{n}{m}\,....} = \frac{m\cdot2m\cdot3m\,....}{(-n+m)(-n+2m)(-n+3m)\,....},$$

$$17)\quad 1^{-\frac{n}{m}|-1} = \frac{(2+\frac{n}{m})(3+\frac{n}{m})(4+\frac{n}{m}\,....}{2\cdot3\cdot4\cdot5\,....} = \frac{(n+2m)(n+3m)(n+4m)\,....}{2m\cdot3m\cdot4m\,....},$$

$$18)\quad 1^{-1+\frac{n}{m}|1} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\,....}{\frac{n}{m}(\frac{n}{m}+1)(\frac{n}{m}+2)\,....} = \frac{m\cdot2m\cdot3m\cdot4m\,....}{n(n+m)(n+2m)(n+3m)\,....},$$

$$19)\quad 1^{-1+\frac{n}{m}|-1} = \frac{(-\frac{n}{m}+3)(-\frac{n}{m}+4)(-\frac{n}{m}+5)\,....}{2\cdot3\cdot4\,....} = \frac{(-n+3m)(-n+4m)(-n+5m)\,....}{2m\cdot3m\cdot4m\,....},$$

$$20)\quad 1^{1-\frac{n}{m}|1} = \frac{1.2.3.4\,....}{(-\frac{n}{m}+2)(-\frac{n}{m}+3)(-\frac{n}{m}+4)\,....} = \frac{m.2m.3m.4m\,....}{(-n+2m)(-n+3m)(-n+4m)\,....},$$

$$21)\quad 1^{1-\frac{n}{m}|-1} = \frac{(\frac{n}{m}+1)(\frac{n}{m}+2)(\frac{n}{m}+3)\,....}{2.3.4\,....} = \frac{(n+m)(n+2m)(n+3m)\,....}{2m.3m.4m\,....}.$$

Bekanntlich ist

$$22)\qquad \tfrac{1}{2}\pi = \frac{2.2.4.4.6.6.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots}.$$

Wird nun $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$ gesetzt, so ist aus (14. und 16.):

$$1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{+\frac{1}{2}|1} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}.$$

Folglich ist auch

$$23)\qquad 1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{+\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Durch die Gleichung (22.) ist es möglich, jede der vier Facultäten $1^{\frac{1}{2}|1}$, $1^{\frac{1}{2}|-1}$, $1^{-\frac{1}{2}|1}$, $1^{-\frac{1}{2}|-1}$ auf die Grösse π, welche das bekannte Verhältniss beim Kreise bezeichnet, zurückzubringen. Zu dem Ende ist aus (19. §. 12.), wenn $a=d=n=1$ und $m=2$ gesetzt wird:

$$1^{\frac{1}{2}|1}.1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{2^{\alpha|2}.2^{\alpha|2}(1+\alpha)}{3^{\alpha|2}.3^{\alpha|2}}.$$

Um zu einer Harmonie zwischen dieser Gleichung und (22.) zu gelangen, darf man nur im Nenner mit der Einheit multipliciren. Dies giebt

$$1^{\frac{1}{2}|1}.1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{2^{\alpha|2}.2^{\alpha|2}(1+\alpha)}{1^{\alpha|2}.3^{\alpha|2}(2\alpha+1)} = \frac{2^{\alpha|2}.2^{\alpha|2}}{1^{\alpha|2}.3^{\alpha|2}}.\tfrac{1}{2},$$

indem bei unendlich grossem Werthe $\alpha+1=\alpha$ und $2\alpha+1=2\alpha$ ist. Man erhält also

$$24)\qquad 1^{\frac{1}{2}|1}.1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots} = \tfrac{1}{2}\pi;$$

folglich

$$25)\qquad 1^{\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Es ergiebt sich nun

$$26)\qquad 1^{-\frac{1}{2}|1} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1^{\frac{1}{2}|1}} = \sqrt{\pi},$$

$$27)\qquad 1^{-\frac{1}{2}|-1} = \frac{2}{3.1^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}},$$

$$28)\qquad 1^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{2}{1^{-\frac{1}{2}|1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Die Gleichung (26.) ergiebt sich aus (23. und 25.); die Gleichung (27.) ergiebt sich aus (1. und 25.); die Gleichung (28.) endlich aus (2. und 26). Aus den Gleichungen (5. bis 8. §. 12.) und aus (25. bis 28. dieses §.) folgt, dass die Werthe aller Facultäten, welche den Exponenten $\frac{1}{2}$ haben, auf die Grösse π zurückgebracht werden können. Es findet sich, wenn dort $r-1$ statt r, und $m=2$, $a=d=n=1$ gesetzt wird:

$$29)\quad r^{\frac{1}{2}|1} = 1^{\frac{1}{2}|1} \cdot \frac{3^{r-1|2}}{2^{r-1|2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3^{r-1|2}}{2^{r-1|2}},$$

$$30)\quad r^{\frac{1}{2}|-1} = 1^{\frac{1}{2}|-1} \cdot \frac{4^{r-1|2}}{3^{r-1|2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{r|2}}{3^{r-1|2}},$$

$$31)\quad r^{-\frac{1}{2}|1} = 1^{-\frac{1}{2}|1} \cdot \frac{1^{r-1|2}}{2^{r-1|2}} = \sqrt{\pi}\cdot\frac{1^{r-1|2}}{2^{r-1|2}},$$

$$32)\quad r^{-\frac{1}{2}|-1} = 1^{-\frac{1}{2}|1} \cdot \frac{4^{r-1|2}}{5^{r-1|2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{r|2}}{3^{r|2}}.$$

Diese Gleichungen lassen sich auch umformen. Wird Zähler und Nenner in (29.) mit $2^{r-1|2}$ multiplicirt und die Facultät mit der Einheit begonnen, so ergiebt sich

$$r^{\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1^{2r-1|1}}{2^{2r-2}.1^{r-1|1}.1^{r-1|1}} = 2\sqrt{\pi}\frac{1^{2r-1|1}}{2^{2r}.1^{r-1|1}.1^{r-1|1}},$$

und hieraus

$$33)\quad 1^{r-1|1}.1^{r-\frac{1}{2}|1} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{1^{2r-1|1}}{2^{2r}}.$$

Wird Zähler und Nenner in (31.) mit $2^{r-1|1}$ multiplicirt, werden dann die nöthigen Reductionen gemacht und wird $r+1$ statt r gesetzt, so erhält man

$$34)\quad 1^{r|1}.1^{r-\frac{1}{2}|1} = \sqrt{\pi}.\frac{1^{2r|2}}{2^{2r}}.$$

Wird Zähler und Nenner in (30. und 32.) mit $2^{r|2}$ multiplicirt, so findet sich

$$35)\quad \frac{r^{\frac{1}{2}|-1}}{1^{r|1}.1^{r|1}} = \frac{2^{2r}}{\sqrt{\pi}.1^{2r|1}},$$

$$36)\quad \frac{r^{-\frac{1}{2}|-1}}{1^{r|1}.1^{r|1}} = \frac{2^{2r+1}}{\sqrt{\pi}.1^{2r+1|1}}.$$

Die Gleichung (33.) hat *Legendre* (Exerc. d. Calc. int. T. II. Pg. 25.) gegeben, unter der Form

$$\Gamma(r)\,\Gamma(r+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2r).(2\pi)^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}-2r}.$$

Aus den Gleichungen (14. bis 21.) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$37)\quad 1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1} = \frac{m.m.2m.2m\ldots.}{(n+m)(-n+m)(n+2m)(-n+2m)\ldots} = \frac{m^2}{m^2-n^2}\cdot\frac{2^2m^2}{4m^2-n^2}\cdot\frac{3^2m^2}{9m^2-n^2},$$

$$38)\quad 1^{\frac{n}{m}|-1}.1^{-\frac{n}{m}|1} = \frac{(-n+2m)(n+2m)(-n+3m)(n+3m)\ldots.}{2m.2m.3m.3m\ldots.} = \frac{4m^2-n^2}{2^2m^2}\cdot\frac{9m^2-n^2}{3^2m^2}\cdot\frac{16m^2-n^2}{4^2m^2}\ldots.$$

$$1^{\frac{n}{m}|1} \,.\, 1^{1-\frac{n}{m}|-1} = 1,$$

oder allgemein:

$$39)\qquad a^{\frac{n}{m}|d}\, a^{1-\frac{n}{m}|-d} = a \quad \text{und}$$

$$1^{-\frac{n}{m}|-1} . 1^{-\frac{m-n}{m}|1} = \frac{m^2}{n(n+m)},$$

oder auch allgemeiner:

$$40)\qquad a^{-\frac{n}{m}|-d} . a^{-\frac{m-n}{m}|d} = \frac{am^2}{(am-md+nd)(am+nd)},$$

$$41)\qquad 1^{-\frac{n}{m}|1} . 1^{-1+\frac{n}{m}|d} = \frac{1.1.2.2.3.3.4.4\ldots}{(\frac{n}{m})(1-\frac{n}{m})(\frac{n}{m}+1)(2-\frac{n}{m})(\frac{n}{m}+2)(3-\frac{n}{m})(\frac{n}{m}+3)\ldots}$$

$$= \frac{m.m.2m.2m.3m.3m\ldots}{n(m-n)(m+n)(2m-n)(2m+n)(3m-n)(3m+n)\ldots}.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (14. bis 21.) folgende Gleichungen:

$$42)\qquad \frac{1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{m-n}{m}|1}} = \frac{n}{m}, \quad \frac{1^{-\frac{n}{m}|-1}}{1^{-\frac{n}{m}|-1}} = \frac{m}{m+n}, \quad \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{-\frac{n}{m}|1}} = \frac{m}{m-n},$$

welche sich unmittelbar aus (21. §. 7.) ableiten lassen. Diese Ausdrücke wurden deshalb auf dem eben bezeichneten Wege abgeleitet, um die Richtigkeit der angewendeten Schlussweise zu zeigen. Auf gleiche Art erhält man

$$a^{\frac{n}{m}|d} (a+\tfrac{n}{m}d)^{1-\frac{n}{m}|d} = a;$$

wie es sein muss, weil nach (§. 7.)

$$a^{\frac{n}{m}|d} (a+\tfrac{n}{m}d)^{1-\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{n}{m}+1-\frac{n}{m}|d} = a$$

ist, während die Darstellung specieller Fälle die Zurückleitung oft nicht vermuthen lässt. So ist z. B. nach (14.)

$$1^{\frac{1}{6}|1} . \left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{5}{6}|1} = \frac{6.7.12.13.18.19\ldots}{7.12.13.18.19.24\ldots}.$$

Die in diesem und dem vorigen Paragraph gefundenen Resultate sind von vielfältiger Anwendung. Sie umschliessen unter andern alle die von *Euler* im 9ten Cap. des Iten Theils seiner Integr.-Rechnung über unendliche Factorenfolgen gegebenen Sätze und begründen sie auf eine einfache Weise; wie hier kurz gezeigt werden soll. Aus der Gleichung (18.) ergiebt sich nämlich, wenn man $\frac{n}{m}$ beibehält, aber p statt n und $p+n$ statt n setzt:

$$43)\qquad \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1} . 1^{\frac{p}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p}{m}-1|1}} = \frac{n+p}{np} . \frac{m(n+p+m)}{(n+m)(p+m)} . \frac{2m(n+p+2m)}{(n+2m)(p+2m)} \ldots;$$

was *Euler* durch $\left(\frac{n}{p}\right)$ ausdrückt. Aus der hier gegebenen Formel folgt ohne Weiteres

$$44)\quad \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p}{m}-1|1}} = \frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+n}{m}-1|1}},$$

oder, nach der *Euler*'schen Bezeichnung: $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{p}{n}\right)$. Nimmt man noch eine dritte Grösse $\frac{q}{m}$ hinzu, so ist

$$45)\quad \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{m}-1|1}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{m}-1|1}} \cdot \frac{1^{\frac{n+p}{m}-1|1}.1^{\frac{q}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p+q}{m}-1|1}} = \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{q}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+q}{m}-1|1}} \cdot \frac{1^{\frac{n+q}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+q+m}{m}-1|1}}$$

$$= \frac{1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{q}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+q}{m}-1|1}} \cdot \frac{1^{\frac{p+q}{m}-1|1}\,1^{\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{p+q+n}{m}-1|1}} = \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}\,1^{\frac{p}{m}-1|1}\,1^{\frac{q}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p+q}{m}-1|1}},$$

oder, in *Euler*'schen Zeichen:

$$\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n+p}{q}\right) = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n+q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{n}\right).$$

Die Gleichung (45.) drückt einen ganz elementaren Satz aus, und man wird eben so durch seine Einfachheit, als durch die ungewöhnlichen Mittel überrascht, die *Euler* zu seiner Begründung durch bestimmte Integrale aufbietet.

Bedienen wir uns für den vorliegenden speciellen Zweck folgender Bezeichnung:

$$46)\quad F\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right) = \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p}{m}-1|1}},$$

so ergiebt sich, wenn zu den in (45.) betrachteten Grössen noch eine vierte tritt, folgende Vergleichung:

$$F\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{q}\right)F\left(\frac{n+p}{m}, \frac{q}{m}\right)F\left(\frac{n+p+q}{m}, \frac{r}{m}\right) = F\left(\frac{n}{m}, \frac{q}{m}\right)F\left(\frac{n+q}{m}, \frac{p}{m}\right)F\left(\frac{n+q+p}{m}, \frac{r}{m}\right)$$

$$= F\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right)F\left(\frac{n+p}{m}, \frac{r}{m}\right)F\left(\frac{n+p+r}{m}, \frac{q}{m}\right) = \ldots = \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{p}{m}-1|1}.1^{\frac{q}{m}-1|1}.1^{\frac{r}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p+q+r}{m}-1|1}}.$$

In dieser Darstellung sind so viele Formen möglich, als Versetzungen der Grössen n, p, q und r unter einander in den verschiedenen Symbolen. *Euler* hat nur vier von diesen Formen angegeben, obgleich es deren mehre giebt.

Der vorstehende Satz lässt sich nun leicht allgemein darstellen; was *Euler* nicht gethan hat. Es ist

47) $$F\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right) F\left(\frac{n+p}{m}, \frac{q}{m}\right) F\left(\frac{n+p+q}{m}, \frac{r}{m}\right) \ldots\ldots F\left(\frac{n+p+q \ldots y}{m}, \frac{z}{m}\right)$$
$$= \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1} . 1^{\frac{p}{m}-1|1} . 1^{\frac{q}{m}-1|1} \ldots\ldots 1^{\frac{z}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p+q \ldots + z}{m}-1|1}},$$

48) $$P\left[F\left(\frac{n}{m}, \frac{p}{m}\right) F\left(\frac{n+p}{m}, \frac{q}{m}\right) F\left(\frac{n+p+q}{m}, \frac{r}{m}\right) \ldots\ldots F\left(\frac{n+p+q \ldots + y}{m}, \frac{z}{m}\right)\right].$$
$$= \frac{1^{\frac{n}{m}-1|1} . 1^{\frac{p}{m}-1|1} . 1^{\frac{q}{m}-1|1} \ldots\ldots 1^{\frac{z}{m}-1|1}}{1^{\frac{n+p+q+r \ldots + z}{m}-1|1}}.$$

Hier soll P alle Versetzungen bedeuten, welche sich mit den Grössen n, p, q, r .... z in den verschiedenen Ausdrücken machen lassen.

In den bisher gefundenen Resultaten haben sämmtliche Brüche den nämlichen Nenner. In dieser Beschränkung wurde der Satz bis jetzt dargestellt. Die Beschränkung ist jedoch nicht nöthig, denn man sieht leicht, dass

$$\frac{1^{\frac{a}{m}-1|1} . 1^{\frac{b}{p}-1|1}}{1^{\frac{a}{n}+\frac{b}{p}-1|1}} = \frac{1^{\frac{b}{p}-1|1} . 1^{\frac{a}{n}-1|1}}{1^{\frac{b}{p}+\frac{a}{n}-1|1}}$$

ist, oder auch

$$F\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{p}\right) = F\left(\frac{b}{p}, \frac{a}{n}\right).$$

Dies führt nun auf dem eben gezeigten Wege zu folgenden Sätzen:

49) $$F\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{p}\right) F\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{p}, \frac{c}{q}\right) F\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{p}+\frac{c}{q}, \frac{d}{r}\right) \ldots\ldots F\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{q} \ldots\ldots \frac{o}{y}, \frac{m}{z}\right)$$
$$= \frac{1^{\frac{a}{n}-1|1} . 1^{\frac{b}{p}-1|1} . 1^{\frac{c}{q}-1|1} \ldots\ldots 1^{\frac{m}{z}-1|1}}{1^{\frac{a}{n}+\frac{b}{p} \ldots\ldots \frac{m}{z}-1|1}},$$

50) $$P\left[F\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{p}\right) F\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{p}, \frac{c}{q}\right) F\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{p}+\frac{c}{q}, \frac{d}{r}\right) \ldots\ldots F\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{q}+\ldots\frac{o}{y}, \frac{m}{z}\right)\right]$$
$$= \frac{1^{\frac{a}{n}-1|1} . 1^{\frac{b}{p}-1|1} . 1^{\frac{c}{q}-1|1} \ldots\ldots 1^{\frac{m}{z}-1|1}}{1^{\frac{a}{n}+\frac{b}{p}+\frac{c}{q} \ldots \frac{m}{z}-1|1}}$$
$$= \frac{\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{p}+\frac{c}{q}+\ldots\frac{m}{z}\right) 1^{\frac{a}{n}|1} . 1^{\frac{b}{p}|1} .. 1^{\frac{c}{q}|1} \ldots\ldots 1^{\frac{m}{z}|1}}{\frac{a}{n} . \frac{b}{p} . \frac{c}{q} \ldots\ldots \frac{m}{z} . 1^{\frac{a}{n}+\frac{b}{p}+\frac{c}{q}+\ldots\frac{m}{z}|1}}.$$

Das letzte ist ein Satz aus der Combinationslehre, der bei der Verthei-

lung der Elemente einer Reihe in Fächer vorkommt, wenn die Exponenten ganze Zahlen sind. (S. m. Combinationslehre S. 89. §. 37. No. 116.) *Binet* beschäftigt sich (Mémoire sur les intégrales définies Eulériennes, Journ. d. l'écol. polyt. T. XVI.) des Weitern mit den hieher gehörigen Sätzen, die sich, wie eben gezeigt, so einfach entwickeln lassen, und zu denen man in der angeführten Abhandlung mit ungewöhnlichem Aufwande von Mitteln gelangt.

§. 14.

Wir gehen nun zu einer weiteren Folge aus den bisher gefundenen Sätzen über. Setzt man in (21. §. 7.) der Reihe nach $0,\ -\frac{1}{m},\ -\frac{2}{m}$, $\ldots\ -\frac{m-1}{m}$ statt $\frac{p}{q}$ und multiplicirt die erhaltenen Resultate mit einander, so ergiebt sich

$$1)\quad 1^{n|1}.1^{n-\frac{1}{m}|1}.1^{n-\frac{2}{m}|1}\ldots 1^{n-\frac{m-1}{m}|1}$$
$$=1^{-\frac{1}{m}|1}.1^{-\frac{2}{m}|1}.1^{-\frac{3}{m}|1}\ldots 1^{-\frac{m-1}{m}|1}.\frac{1^{n|m}.2^{n|m}.3^{n|m}\ldots(m-2)^{n|m}.(m-1)^{n|m}.1^{n|1}}{m^{n(m-1)}}$$
$$=1^{-\frac{1}{m}|1}.1^{-\frac{2}{m}|1}.1^{-\frac{3}{m}|1}\ldots 1^{-\frac{m-1}{m}|1}.\frac{1^{nm|1}}{m^{nm}};$$

denn es ist $1^{n|1}=\frac{m^{n|m}}{m^n}$. Man setze der Kürze wegen

$$2)\quad 1^{-\frac{1}{m}|1}.1^{-\frac{2}{m}|1}.1^{-\frac{3}{m}|1}\ldots 1^{-\frac{m-1}{m}|1}=\Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right),$$

wo statt x der Reihe nach $1, 2, 3, \ldots m-1$ zu schreiben ist, so hat man für (1.):

$$3)\quad \Sigma_0^{m-1}\left(1^{n-\frac{x}{m}|1}\right)=\Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\frac{1^{mn|1}}{m^{nm}}.$$

Setzt man nun in den Exponenten aller Facultäten von 1, $n-\frac{1}{2m}$ statt n, so bilden die gebrochenen Exponenten die Reihe $\frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{5}{2m}, \ldots \frac{2m-1}{2m}$ und man erhält aus (1.) folgenden Ausdruck:

$$4)\quad \Sigma_0^{m-1}\left(1^{n-\frac{2x+1}{2m}|1}\right)=\Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\frac{1^{mn-\frac{1}{2}|1}}{m^{mn-\frac{1}{2}}}.$$

Verbindet man (1.) oder (3.) mit (4.), so bilden die gebrochenen Exponenten auf der linken Seite des Gleichheitszeichens die Reihe

$$0,\ \frac{1}{2m},\ \frac{2}{2m},\ \frac{3}{2m},\ \frac{4}{2m},\ \ldots\ \frac{2m-1}{2m},$$

indem sich ohne Werthänderung der Facultät Zähler und Nenner eines jeden

gebrochenen Exponenten mit 2 multipliciren lässt (§. 7.). Hiedurch erhält man folgende Formel:

$$5)\quad 1^{n|1}.1^{n-\frac{1}{2m}|1}.1^{n-\frac{2}{2m}|1}\ldots.1^{n-\frac{m}{2m}|1}.1^{n-\frac{m+1}{2m}|1}.1^{n-\frac{m+2}{2m}|1}\ldots.1^{n-\frac{2m-1}{2m}|1}$$
$$= \Sigma^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\Sigma^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\frac{1^{mn|1}.1^{mn-\frac{1}{2}|1}}{m^{2mn}.m^{-\frac{1}{2}}}.$$

Wendet man auf den Zähler im Ausdrucke rechts vom Gleichheitszeichen die Gleichung (34. §. 13.) an und setzt mn statt r, so geht (5.) über in:

$$6)\quad \Sigma_0^{2m-1}\left(1^{n-\frac{x}{2m}|1}\right) = \Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\frac{\sqrt{\pi}.1^{2nm|1}}{m^{2mn}m^{-\frac{1}{2}}.2^{2nm}}.$$

Da die Ordnung der Factoren in (5.) willkürlich ist, so kann man links auch schreiben:

$$1^{n|1}.1^{n-\frac{m}{2m}} \times 1^{n-\frac{1}{2m}}.1^{n-\frac{1}{2m}-\frac{1}{2}} \times 1^{n-\frac{2}{2m}}.1^{n-\frac{2}{2m}-\frac{1}{2}} \ldots. \times 1^{n-\frac{m-1}{2m}}.1^{n-\frac{m-1}{2m}-\frac{1}{2}}.$$

Alle diese Factorenpaare unterliegen dem in (34. §. 13.) angegebenen Gesetze. Man darf daher nur in jener Gleichung statt r der Reihe nach n, $n-\frac{1}{2m}$, $n-\frac{2}{2m}$, ... $n-\frac{m-1}{m}$ setzen, so wird die Zahl der Factoren auf die Hälfte reducirt und die Gleichung (6.) geht in folgende über:

$$\Sigma_0^{2m-1}\left(1^{n-\frac{x}{2m}|1}\right) = (\sqrt{\pi})^m \frac{1^{2n-\frac{1}{m}|1}.1^{2n-\frac{2}{m}|1}.1^{2n-\frac{3}{m}|1}\ldots.1^{2n-\frac{m-1}{m}|1}}{2^{2nm}.2^{-\frac{1}{2}(m-1)}},$$

Der Zähler im Ausdruck rechts lässt sich selbst wieder nach (1. oder 3.) behandeln, indem man $2n$ statt n setzt. Dies giebt

$$7)\quad \Sigma_0^{2m-1}\left(1^{n-\frac{x}{2m}|1}\right) = \Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right)\frac{(\sqrt{\pi})^m\,1^{2nm|1}}{m^{2nm}.2^{2nm}.2^{-\frac{1}{2}(m+1)}},$$

Nun hat man aus (6. und 7.) zwei unter sich gleiche Ausdrücke, aus welchen sich folgende Gleichung ergiebt:

$$8)\quad \frac{(\sqrt{\pi})^{m-1}2^{\frac{1}{2}(m-1)}}{\sqrt{m}} = \Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right) = 1^{-\frac{1}{m}|1}.1^{-\frac{2}{m}|1}.1^{-\frac{3}{m}|1}\ldots.1^{-\frac{m-1}{m}|1}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in (3.) erhält man

$$9)\quad 1^{n|1}.1^{n-\frac{1}{m}|1}.1^{n-\frac{2}{m}|1}\ldots.1^{\frac{m-1}{m}|1} = (\sqrt{2\pi})^{m-1}.1^{mn|1}.m^{-nm-\frac{1}{2}}.$$

Diesen Satz hat *Gauss* (Comment. Soc. reg. Gotting. ad an. 1811—13. Tom II. Pg. 29.) gegeben und seine Entwicklung auf ein Product von Sinus gegründet. *Legendre* hat ihn (Exerc. d. calc. intégr. T. II. Pg. 3. etc.) auf gleiche, jedoch sehr weitläufige Art bewiesen. Die hier gegebene Entwick-

lungsart ist elementar und einfach und unmittelbar aus der Natur der Facultäten genommen. Sie hat den Vortheil, dass sie keine fremden Mittel zu Hülfe nimmt. *Binet* hat die Gleichung (Journal d. l'école polyt. Cah. 27, Pg. 208. bis 212.) auf eine ähnliche, aber ziemlich complicirte Weise entwickelt. Dabei beruht sein Beweis auf einer Annahme, die hier umgangen ist. *Cauchy* giebt einen Beweis der Gleichung in Exercices d. Mathém. sec. année. Pg. 91. *Crelle* hat in seinem Journal Bd. VII. Pg. 375. einen Beweis dieses Satzes gegeben, der auf das Product der Sinus gegründet ist. Ferner haben *Lejeune Dirichlet* (S. d. Journ. 15ter Band S. 258.) und *Stern* (S. d. Journ. 21ter Bd. S. 377.) Beweise des Satzes mitgetheilt, die aus bestimmten Integralen abgeleitet sind. Die Form, unter welcher der Satz bei *Legendre*, *Gauss* und *Crelle* steht, ist

$$10)\quad \Gamma(n)\Gamma(n+\tfrac{1}{m})\Gamma(n+\tfrac{2}{m})\ldots\Gamma(n+\tfrac{m-1}{m}) = \Gamma(nm)(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{\frac{1}{2}-nm}$$

$$\Pi(n)\Pi(n-\tfrac{1}{m})\Pi(n-\tfrac{2}{m})\ldots\Pi(n-\tfrac{m-1}{m}) = \Pi(nm)(2\pi)^{\frac{m-1}{2}} m^{-nm-\frac{1}{2}}$$

$$(1,+1)^n(1,+1)^{n-\frac{1}{m}}(1,+1)^{n-\frac{2}{m}}\ldots(1,+1^{n-\frac{m-1}{m}} = (1,+1)^{nm}(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{-nm-\frac{1}{2}},$$

wo $\Gamma(x) = 1^{x-1|1}$, $\Pi(x) = (1,+1)^x = 1^{x|1}$ ist.

§. 15.

Es ist noch übrig, zu zeigen, wie die Werthe der Facultäten mit gebrochenen Exponenten in *Zahlen* dargestellt werden können. Zu dem Ende wählen wir die Berechnung der Facultät $1^{\frac{1}{2}|1}$, welche nach (25. §. 13.) der Grösse $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ gleichkommt. Um für die Ausführung der Rechnung eine stark convergirende Reihe zu haben, setzen wir in (16. §. 12.) $a=1$, $m=2$, $n=1$, $d=1$, $r=9$ und führen für A_1, A_2, A_3 .... die Vorzahlen aus (5. §. 11.) in (16. §. 12.) ein. Dies giebt

$$1)\quad 1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.\sqrt{10}.2^9}{3.5.7.9.11.13.17.19}\left(1-\frac{1}{80}+\frac{1}{12800}+\frac{1}{1024000}-\frac{21}{2^{15}.10^4}-\frac{399}{1^{18}.10^5}+\ldots\right)$$

Nun ist

$$-\frac{1}{80} = -0{,}0125 \qquad -\frac{21}{2^{15}.10^4} = -0{,}0000000640869140625$$

$$+\frac{1}{12800} = 0{,}000078125 \qquad -\frac{399}{2^{18}.10^5} = -0{,}00000001522064208\ldots$$

$$+\frac{5}{2^{10}.1000} = 0{,}0000048828125 \qquad +\frac{869}{2^{22}10^{16}} = 0{,}000000000207185\ldots$$

Werden die Rechnungen ausgeführt, so ergiebt sich

$$2)\qquad 1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{2^{16}.3{,}162277660168.0{,}98758292871\ldots}{5.11.13.17.19} = 0{,}8862269253502\ldots$$

Dieser Werth ist auf 11 bis 12 Decimalstellen richtig. *Kramp* hat den Werth für $1^{\frac{1}{2}|1}$ (Anal. d. réfr. Pg. 91.) auf 9 Decimalstellen berechnet, hat aber bei seiner Rechnung andere Zahlen ($r=8$) genommen. Sein Resultat stimmt genau mit dem hiesigen und mit dem Werthe von $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Ist der Werth für $1^{\frac{1}{2}|1}$ gefunden, so lässt sich der Werth für die Facultäten der übrigen Zahlen, mit dem Exponenten $\frac{1}{2}$, leicht nach (29. §. 13.) ableiten. So ist z. B.

$$3)\qquad 5^{\frac{1}{2}|1} = \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\,1^{\frac{1}{2}|1} = 2{,}1409490740774.$$

Vergleicht man mit den bisher gefundenen Werthen der Facultäten mit gebrochenen Exponenten die Werthe der correspondirenden Wurzelgrössen, so ergiebt sich aus (§. 10.) und den hier gefundenen Resultaten:

$$4)\qquad 1^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{1}{2}} : 100^{\frac{1}{2}} = 1 : 2{,}236067977500\ldots : 10$$

$$5)\qquad 1^{\frac{1}{2}|1} : 5^{\frac{1}{2}|1} : 100^{\frac{1}{2}|1} = 0{,}886226\ldots : 2{,}140949\ldots : 9{,}9875\ldots$$

Man sieht hierdurch den in (29. §. 12.) aufgestellten Satz bestätigt.

Die Gleichungen (15. bis 18. §. 12.), welche der angegebenen Methode zum Grunde liegen, sind jedoch mit Vorsicht zu gebrauchen. Sie können nach unserer Ansicht zu keinem andern Zwecke benutzt werden, als um die Convergenz der sie begleitenden Reihen zu steigern. Benutzt man sie zu andern Zwecken, etwa zu Schlussfolgerungen über die Natur der Facultäten, so entrückt man sie dem Kreise, worin sie Geltung haben. Dies hat *Kramp* gethan. Er hat sie benutzt, um die Werthe der Facultäten, welche gebrochene Exponenten und eine negative Basis haben, und welche nach den in (§. 10. und 11.) aufgestellten Sätzen auf unmögliche Werthe führen. zu finden. In diesem Falle kann man durch sie allerdings die Form der unmöglichen Grössen umgehen. Da aber dies der Natur der Facultäten, wie aus den angeführten Paragraphen hervorgeht, nicht gemäss ist, so muss man nach unserer Ansicht zuerst auf die Grundform der Facultäten zurückgehen, um sich bei ihnen Rath zu holen, und dann die Resultate, welche die abgeleiteten Formen an die Hand geben, berichtigen, oder wenigstens sie nur dann anwenden, wenn beide mit einander übereinstimmen.

Soll hiernach der Werth der Facultät $(-1)^{\frac{1}{2}|-1}$ gefunden werden, so erhalten wir aus den Gleichungen (7. und 33. §. 11.), welche auf verschiedenem Wege gefunden wurden:

$$6)\qquad (-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \sqrt{-1}\,.\,1^{\frac{1}{2}|1}.$$

Hiemit stimmt genau das Resultat, welches wir aus (5. §. 10.) durch Reihen-Entwicklung, also auf einem von dem genannten verschiedenen Wege erhielten. Wählen wir aber zur Werthbestimmung von $(-1)^{\frac{1}{2}|-1}$ die Formel (16. §. 12.), so erhalten wir

$$7)\quad (-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{(-1)^{r|2}}{0^{r|2}}(r-1)^{\frac{1}{2}}\left(1 - A_1 \cdot \frac{1}{r-1} + A_2 \cdot \frac{1}{(r-1)^2} - \dots\right).$$

Dieses Resultat findet *Kramp* (Pg. 91. No. 136.), hält es für richtig, weil es gerade seinen Zwecken dient, und sagt „ainsi cette dernière faculté $[(-1)^{\frac{1}{2}|-1}]$ doit être un infini du premier ordre", während offenbar aus (7.) nichts anderes gefolgert werden kann, als dass die Formel (16. §. 12.) in dem vorliegenden Falle ihre Dienste versagt und auf einen noch näher zu bestimmenden Ausdruck $\frac{1}{0}$ führt. Dies stimmt ganz gut, indem der Ausdruck $\frac{1}{0}$ zu den sogenannten unbestimmten gerechnet wird. Danach dürften alle Facultäten mit gebrochenen Exponenten und negativer Basis, die bei *Kramp* vorkommen, zu beurtheilen sein. Es giebt eine ganze Classe von Facultäten mit gebrochenen Exponenten, die auf einen unendlich grossen Werth führen, wenn man die Gleichung (17. §. 12.) anwendet. Ihre Form ist $1^{-\frac{1}{d}|d}$. Diese Facultäten geben dann nach der Elementar-Form (17. §. 7.) folgenden Ausdruck:

$$8)\quad 1^{-\frac{1}{d}|d} = \frac{1}{0^{\frac{1}{d}|d}}$$

und können nach den Entwicklungen in (§. 10.) auf Zahlenwerthe führen. Bei Berechnung der Facultäten mit gebrochenen Exponenten gewährt die Form (7. §. 11.) eine Erleichterung, in dem Fall wenn Basis und Zunahme gleich sind. Man hat dann

$$9)\quad a^{\frac{n}{m}|a} = a^{\frac{n}{m}} . 1^{\frac{n}{m}} .$$

Anmerkung des Herausgebers dieses Journals zu §. 1 der Untersuchungen des Herrn Prof. *Oettinger* über die Facultäten.

Der Herr Verfasser urtheilt, wie es scheint, sehr richtig, dass von den verschiedenen vorgeschlagenen Bezeichnungsarten der Facultäten nur die beiden $a^{n|d}$ und $(a, +d)^n$ ausdrücken, was nöthig ist. Von diesen beiden giebt er der ersten Bezeichnung $a^{n|d}$ den Vorzug vor der zweiten, und stellt *Gründe* für seine Wahl auf. Der Herausgeber dieses Journals, obgleich er selbst es ist, welcher die *zweite* Bezeichnungsart vorgeschlagen hat, würde mit Vergnügen der Erste sein, der dem Herrn Verfasser beipflichtete, wenn nur die von diesem angegebenen Gründe ihn befriedigen könnten; denn es liegt ihm auch hier, wie immer, weniger an seiner eigenen Ansicht, als am Rechten und Wahren. Allein den Gründen des Herrn Verfassers stehen nach der Ueberzeugung des Herausgebers andere Gründe entgegen, welche jene *wenigstens* aufwiegen. Verhält es sich so mit den Gründen und Gegengründen, so sind es dann das natürliche, *einfache Urtheil* und die *Bequemlichkeit* beim Gebrauch der Zeichen, welche die Wahl bestimmen; und diese dürften für die *zweite* Bezeichnungsart entscheiden.

Der Herr Verfasser sagt, es liege in

$$1)\quad a^{n|d} = (a, +d)^n = a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots.(a+(n-1)d)$$

deutlich vor Augen, dass der Exponent n und die Zunahme d mit einander als Factoren in Verbindung treten, während sich daran die Basis mit positivem oder negativem Zeichen nur anschliesse; der Zusammenhang zwischen Exponent und Zunahme sei daher offenbar enger, als der zwischen Basis und Zunahme, und daher müsse die Zunahme d, wie in $a^{n|d}$, neben den *Exponenten* n, und nicht, wie in $(a, +d)^n$, neben die *Basis* gesetzt werden.

Allerdings kommt in dem letzten Factor $a+(n-1)d$ der Facultät (1.) das Product der Factoren $n-1$ und d vor und schliesst sich mit dem Zeichen $+$ oder $-$ an die Basis an; auch in den übrigen Factoren $a+(n-2)d$ $a+(n-3)d$ u. s. w., bis zu $a+(n-n)d = a+o.d = a$ hinauf, kommen $n-2$, $n-3$ .... $n-n$ und d als Factoren vor, und es tritt auf diese Weise allerdings der *Exponent* n mit der Zunahme d in Verbindung. Aber auch die *Basis* a kommt ja in allen Factoren der Facultät vor, und die Zunahme d tritt auch mit der *Basis* in Verbindung. Alle drei: *Exponent, Zunahme* und *Basis* treten in Verbindung. Der Exponent verbindet sich mit der Zunahme durch *Multiplication*, die Basis durch *Addition* oder *Subtraction*; was am Ende

schon von gleicher Bedeutung ist. Aber dann sind die Factoren der Facultät immer *Summen* zweier Glieder, deren eins die Basis, das andere ein durch den Exponenten bestimmtes Vielfache der *Zunahme* ist. Wollte man nun Das, was das zweite Glied andeutet, nicht neben das erste, sondern, an eine ganz andere Stelle, neben den Exponenten setzen, der bloss die Vielfachheit der Zunahme bezeichnet, so würde man mindestens gegen alle sonstige Gewohnheit verstossen, indem man sonst zwei Glieder einer Summe niemals anders als *neben* einander schreibt.

Die *Gründe* für die Stellung der Zunahme d neben die *Basis* a, wie $(a, +d)^n$, statt neben den *Exponenten* n, wie in $a^{n|d}$, dürften daher eigentlich schon *überwiegend* sein.

Aber angenommen, sie wären auch nur *gleich* stark, was sie *jedenfalls* sind, und es bliebe also nun ein Zweifel und eine Wahl, so entscheidet unstreitig das einfache *natürliche Urtheil* für die Bezeichnung $(a, +d)^n$. Man setze nemlich, Jemand wisse, dass a^n ein Product von n *gleichen* Factoren (jeder $= a$) bezeichnet, aber er wisse nicht, was durch $a^{n|d}$ ausgedrückt werden soll: so wird er, wenn man ihm nun $a^{n|d}$ statt a^n hinschreibt, nothwendig glauben müssen, dass hier mit der *Zahl* n *der Factoren* irgend eine *Veränderung* vorgenommen werden solle; denn er weiss, dass, wenn man z. B. n', n'' .... n_1, n_2 .... n_m schreibt, oder sonst irgend etwas bei dem n anmerkt, dadurch etwas *Anderes* bezeichnet werden soll, als n. Sagt man hierauf dem Fragenden: in $a^{n|d}$ statt a^n solle keinesweges der *Exponent* n eine Veränderung erleiden, sondern vielmehr die *Basis* a, und die n Factoren sollen nicht mehr wie in a^n einander gleich, sondern jeder solle um d grösser sein als der vorige, so wird er sehr *natürlich* erwiedern: Ei, warum merkt man denn das nicht bei der *Basis* a an, statt bei dem Exponenten?! — Mag es sich also auch immerhin nicht mathematisch *beweisen* lassen, dass man $(a, +d)^n$ schreiben *müsse*, und nicht $a^{n|d}$ schreiben *dürfe*, so ist es doch jedenfalls *natürlich*, $(a, +d)^n$, und *nicht so natürlich*, $a^{n|d}$ zu schreiben. Dieses also *entscheidet*, wenn auch die *Gründe* für beide Bezeichungsarten nur für *gleich* sollten erachtet werden, *für* die Bezeichnung $(a, +d)^n$, und *gegen* die Bezeichnung $a^{n|d}$.

Aber auch noch die *Bequemlichkeit beim Gebrauch* entscheidet für $(a, +d)^n$. In der *Handschrift* ist $(a, +d)^n$ leichter zu *schreiben* (wenigstens sobald statt a mehr als ein Buchstabe steht), und deutlicher *lesbar*, als $a^{n|d}$. Und im *Druck* ist $(a, +d)^n$ *bei weitem* leichter zu *setzen*, als $a^{n|d}$. Man befrage nur darüber einen erfahrenen Setzer. Die hier folgenden Untersuchungen des Herrn

Verfassers über Facultäten würden ein Namhaftes weniger an Zeit zum Satz und Druck erfordern, wenn darin die Bezeichnung $(a,+d)^n$ statt $a^{n|d}$ angenommen wäre. Auch ist im *Druck* $(a,+d)^n$ deutlicher und bestimmter *lesbar*, als $a^{n|d}$. Denn die Exponenten werden bekanntlich immer mit kleinern Typen gesetzt, als die in der Zeile stehenden Buchstaben der Formeln; und die kleinen Buchstaben und Striche fallen leicht heraus; was Druckfehler giebt, ungeachtet der genauesten Correctur; so, dass es also in mehr als einer Rücksicht gut ist, wenn die Exponenten so einfach sind, als möglich.

Der Herr Verfasser sagt noch, die Bezeichnung $(a,+d)^n$ reiche ohne Abänderung und Ausdehnung nicht aus für weitere Entwicklungen, z. B. schon nicht für Fälle wie

$$2) \quad a(a+d)(a+2d)\ldots\ldots(a+(n-1)d)$$
$$\times(a+(n-1)d+k)(a+(n-1)d+2k)\ldots\ldots(a+(n-1)d+mk)$$

in (§. 2.). Der Herausgeber dieses Journals ist in den Untersuchungen über Facultäten, welche er bis jetzt bekannt gemacht hat, noch nicht zu solchen zusammengesetzten Fällen übergegangen und hatte daher auch noch keine Bezeichnung dafür vorzuschlagen. Natürlich muss, wenn der Gegenstand sich erweitert, auch die Bezeichnung erweitert werden. Allein dieser *Erweiterung* wegen ist das *Princip* der Bezeichnung $(a,+d)^n$ keinesweges aufzugeben nöthig, sondern z. B. die Facultät (2.) kann, wenn man nicht dafür $(a,+d)^n \times(a+(n-1)d,+k)^m$ schreiben, sondern das Product der beiden Facultäten $(a,+d)^n$ und $(a+(n-1)d,+k)^m$ auf einmal bezeichnen will, nach dem *Princip* der angenommenen Bezeichnungsart, völlig consequent und bestimmt, etwa durch $(a,+d_n,+k_m)^{n+m}$, oder durch $(a,+n|d,+m|k)^{n+m}$ bezeichnet werden; und so ähnlich in den noch weiter zusammengesetzten Fällen.

Aus allen diesen Gründen kann der Herausgeber dieses Journals, bei dem besten Willen, dem Herrn Verfasser nicht darin beistimmen, dass die Bezeichnung $a^{n|d}$ vor der Bezeichnung $(a,+d)^n$ den Vorzug habe. Er wird sich deshalb auch fernerhin seinerseits der Bezeichnung $(a,+d)^n$ für Facultäten vorzugsweise bedienen.

2.

Ueber periodische Kettenbrüche.

(Von Herrn Dr. *H. Siebeck* zu Breslau.)

---

1. Ist der Kettenbruch $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{a_n}}}$

gegeben, dessen entwickelter ganzer Zähler durch S_1^n und der Nenner durch S_2^n bezeichnet werden soll, so lässt sich bekanntlich S_1^n nicht gut allgemein darstellen. Es liesse sich zwar leicht beweisen, dass S_1^n gleich der Summe der *ganzen* Glieder in der Entwickelung von

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1 a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2 a_3}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3 a_4}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_{n-1} a_n}\right)$$

ist: allein auch diese Art der Darstellung leistet schwerlich mehr, als die gewöhnliche Methode.

Anders verhält es sich mit einem *periodischen* Kettenbruch, sobald der Werth der ersten Periode gegeben ist. Ist nämlich der periodische Kettenbruch $a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \text{etc.}}}}}$ gegeben und man bezeichnet den Zähler des rnten Näherungswerths durch S_1^{rn}, den Nenner folglich durch S_2^{rn}, so dass $K_1^{rn} = \frac{S_1^{rn}}{S_1^{rn}}$ die r ersten Perioden des Kettenbruchs umfasst, setzt darauf den Werth des ganzen Kettenbruchs $= x$, so ist $x = a + \cfrac{1}{a_2 + \dots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_1}}}$

(wo a_n am Ende der $r$ten Periode stehen mag). Folglich ist

$$x = \frac{x S_1^{rn} + S_1^{rn-1}}{x S_2^{rn} + S_2^{rn-1}};$$

demnach

$$x^2 - \frac{S_1^{rn} - S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}} x = \frac{S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}}.$$

Da hier (welche Grösse auch r haben mag) immer dieselbe Gleichung entsteht, so müssen die Grössen $\frac{S_1^{rn} - S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}}$ und $\frac{S_2^{rn-1}}{S_2^{rn}}$, die wir durch a und c bezeichnen wollen, für jedes beliebige r *denselben* Werth haben.

Bezeichnet man den $(rn+p)$ten Näherungswerth durch $K_1^{rn+p} = \frac{S_1^{rn+p}}{S_2^{rn+p}}$, so ist, wie leicht erweislich, $K_1^{rn+p} = \frac{S_1^{rn} S_1^p + S_1^{rn-1} S_2^p}{S_2^{rn} S_1^p + S_2^{rn-1} S_2^p}$.

Führt man hier die Constanten c und a ein, $S_1^{rn-1} = cS_2^{rn}$; $S_2^{rn-1} = S_1^{rn} - aS_2^{rn}$ setzend, so erhält man

$$K_1^{rn+p} = \frac{S_1^{rn} S_1^p + cS_2^{rn} S_2^p}{S_2^{rn} S_1^p + S_1^{rn} S_2^p - S_2^{rn} S_2^{rn}}.$$

Da nun $K_1^{rn} = \frac{S_1^{rn}}{S_2^{rn}}$, $K_1^p = \frac{S_1^p}{S_2^p}$ ist, so ist, wenn Zähler und Nenner durch $S_2^{rn} S_2^p$ dividirt wird:

$$1) \qquad K_1^{rn+p} = \frac{K_1^{rn} K_1^p + c}{K_1^{rn} + K_1^p - a}.$$

Bezeichnet man nun K_1^n durch x; ferner durch N_r das $r$te Glied einer recurrenten Reihe, in welcher $N_0 = 0$, $N_1 = 1$, $N_2 = a$, $N_r = aN_{r-1} + cN_{r-2}$ ist, so ist leicht zu beweisen, dass

$$2) \quad K_1^{rn} = \frac{x^r - rcN_0 x^{r-1} + \frac{r.r-1}{1.2} cN_1 x^{r-2} - \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} cN_2 x^{r-3} + \pm cN_{r-1}}{rN_1 x^{r-1} - \frac{r.r-1}{1.2} N_2 x^{r-2} + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} N_3 x^{r-3} - \mp N_r}.$$

Es erhellet dies durch den Schluss von r auf $r+1$. Setzt man nämlich in die Gleichung (1.) x statt K_1^p, und für K_1^{rn} den Werth aus der Gleichung (2.), so muss sich nothwendig die der Formel (2.) analoge Formel für $K_1^{(r+1)n}$ finden.

2. Setzt man demnach $K_1^{rn} = \xi$, so findet zwischen den Grössen ξ, x, a, c folgende Gleichung Statt:

$$3) \quad x^r - r(cN_0 + N_1\xi)x^{r-1} + \frac{r.r-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi)x^{r-2} - + (-1)^r(cN_{r-1} + N_r\xi) = 0.$$

Man kann nun versuchen, diese Gleichung *in ihre Factoren zu zerlegen*, d. h. *aus dem gegebenen Werthe von* K_1^{rn} *auf die* r *Werthe von* K_1^n *zu schliessen, welche diese Grösse dann haben kann.*

Es sei r nicht eine Primzahl, sondern $=mp$, so kann man $\xi = K_1^{rn} = K^{m.pn}$ auch als bloss m Perioden umfassend betrachten, deren jede p einfache Perioden enthält, und für welche die Constanten a und c dieselben bleiben. Setzt man daher $K_1^{pn} = X$, so verwandelt sich die Gleichung (3.), vom $r$ten, in folgende vom $n$ten Grade:

$$X^m - m(cN_0 + N_1\xi)X^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi)X^{m-2} - + (-1)^m(cN_{m-1} + N_m\xi) = 0.$$

Sind also $\xi', \xi'', \xi''', \ldots \xi^{(m)}$ die m Wurzeln dieser Gleichung, so sind sie zugleich die m Werthe, welche die $p$fache Periode K_1^{pn} in Bezug auf K^{mpn} haben kann. Sucht man daher die p Werthe von K_1^n in Bezug auf $K_1^{pn} = \xi'$; dann die p Werthe von K_1^n in Bezug auf $K_1^{pn} = \xi''$; dann die p Werthe von K_1^n in Bezug auf $K_1^{pn} = \xi'''$, etc., so müssen die so gefundenen mp Werthe zugleich die Wurzeln der Gleichung (3.) sein. Nun sind aber die mp Werthe von K_1^n in Bezug auf K_1^{pn}, nemlich $\xi', \xi'', \xi''', \ldots \xi^{(m)}$ nothwendig die Wurzeln der Gleichungen

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi')x^{p-1} + \frac{p.p-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi') - \pm (cN_{p-1} + N_p\xi') = 0,$$

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi'')x^{p-1} + \frac{p.p-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi'') - \pm (cN_{p-1} + N_p\xi'') = 0,$$

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi''')x^{p-1} + \frac{p.p-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi''') - \pm (cN_{p-1} + N_p\xi''') = 0,$$

. . . .

$$x^p - p(cN_0 + N_1\xi^{(m)})x^{p-1} + \frac{p.p-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi^{(m)}) - \pm (cN_{p-1} + N_p\xi^{(m)}) = 0.$$

Demnach muss das Product dieser m Gleichungen die Gleichung (3.) geben.

Hierdurch ist folgender Satz bewiesen:

Ist ξ eine beliebige unbestimmte Grösse und $r = mp$ (wo r, m, p ganze Zahlen sind), und bezeichnet man den Ausdruck

$$x^r - \frac{r}{1}(cN_0 + N_1\xi)x^{r-1} + \frac{r.r-1}{1.2}(cN_1 + N_2\xi)x^{r-2} - \pm (cN_{r-1} + N_r\xi)$$

durch $P_r(\xi)$, (während $N_0, N_1 \ldots N_r$ eine recurrente Reihe bilden, deren Beziehungsscale $N_r = aN_{r-1} + cN_{r-2}$ ist und in welcher $N_0 = 0$, $N_1 = 1$ ist): sind ferner $\xi', \xi'', \xi''', \ldots \xi^{(m)}$ die m Wurzeln des Ausdrucks $P_m(\xi)$ (nach x genommen), so findet folgende Gleichung Statt:

$$4) \qquad P_r(\xi) = P_p(\xi') \cdot P_p(\xi'') \cdot P_p(\xi''') \ldots P_p(\xi^{(m)}).$$

Eine Anwendung dieses Satzes ist in den folgenden Betrachtungen über recurrente Reihen gemacht.

3.

Die recurrenten Reihen, vom Standpuncte der Zahlentheorie aus betrachtet.

(Von Herrn Dr. *H. Siebeck* zu Breslau.)

Die Theorie der Kettenbrüche bildet bekanntlich ein so wesentliches Element der höhern Arithmetik, dass selbst in denjenigen Beweisen, in welchen jene nicht unmittelbar angewendet wird, doch die successive Art zu schliessen nicht selten darauf hindeutet, dass in der That das Wesen des Kettenbruchs zum Grunde liegt. Andererseits aber hängt jene Theorie mit der der reccurrenten Reihen zu eng zusammen, als dass man nicht der Vermuthung Raum geben dürfte, dass von dieser Seite eine Ausbeute für die Zahlentheorie zu hoffen sei. Vielleicht veranlassen die hier durch die einfachsten Mittel gewonnenen Resultate, jene Hoffnung nährend, andere Kräfte zur Behandlung dieses Gegenstandes.

Wir bemerken ein für allemal im Voraus, dass wir nur diejenigen recurrenten Reihen mit *zweitheiliger* Beziehungsscale betrachten, deren 0tes Glied $=0$, das erste $=1$ ist. Bezeichnet man also das $r$te Glied einer solchen Reihe durch N_r, und sind a und c irgend zwei *relative Primzahlen*, so sei $N_r = aN_{r-1} + cN_{r-2}$, und zwar $N_0=0$, $N_1=1$, $N_2=a$, $N_3=a^2+c$, etc. Die Zahlen a und c mögen die Beziehungscoefficienten heissen, die Zahl a^2+4c aber mag ein für allemal durch b bezeichnet werden.

Das allgemeine Glied N_r lässt sich nun von dreifachem Standpunct aus betrachten.

Erstens lässt es sich *unmittelbar durch einen ganzen rationalen* Ausdruck darstellen. Für ein ungerades r ist nämlich

$$1)\quad N_r = a^{r-1} + \frac{r-2}{1}a^{r-3}c + \frac{(r-3)(r-4)}{1.2}a^{r-3}c^2 + \frac{(r-4)(r-5)(r-6)}{1.2.3}a^{r-7}c^3 + \dots + \frac{r}{2}c^{\frac{r-1}{2}};$$

für ein gerades r aber

$$N_r = a^{r-1} + \frac{r-2}{1}a^{r-3}c + \frac{(r-3)\cdot(r-4)}{1.2}a^{r-5}c^2 + \dots + \frac{r}{2}ac^{\frac{r-2}{2}}.$$

In der That werden diese Gleichungen, welche auch auf N_1 und N_2 passen, durch den Schluss von r auf $r+1$ bestätigt.

Zweitens ist leicht zu sehen, dass, wenn man in der Entwickelung des Kettenbruches $a+\cfrac{c}{a+\cfrac{c}{a+\cfrac{c}{a+\text{ etc.}}}}$ den $r$ten Näheruugswerth $=\frac{C_r}{A_r}$ setzt, $C_r=N_{r+1}$ und $A_r=N_r$ ist. Hieraus folgt, dass man N_r als Nenner des $r$ten, oder auch als Zähler des $(r-1)$ten Näherungswerths des genannten Kettenbruchs betrachten darf.

Drittens giebt die Reihen-Entwickelung des Bruchs $\frac{1}{1-ax-cx^2}$ die Reihe $N_1+N_2x+N_3x^2+$ etc., deren allgemeines Glied N_rx^{r-1} ist. Zerlegt man aber diesen Bruch in Partialbrüche, entwickelt dieselben in Reihen und ordnet die Summe der letzteren nach Potenzen von x, so erhält man

$$2)\qquad N_r=\frac{(a+\sqrt{b})^r-(a-\sqrt{b})^r}{(a+\sqrt{b})-(a-\sqrt{b})}\cdot\frac{1}{2^{r-1}},$$

wo b die obige Bedeutung hat. Es versteht sich von selbst, dass dieser Bruch stets eine ganze rationale Zahl giebt. Wir werden bald sehen, dass für ein ganzes m auch allgemein

$$\frac{(a+\sqrt{b})^{mr}-(a-\sqrt{b})^{mr}}{(a+\sqrt{b})^m-(a-\sqrt{b})^m}\cdot\frac{1}{2^{(r-1)m}}$$

stets eine ganze rationale Zahl geben muss.

Anm. Ist $b=0$, so giebt die Gleichung (2.) $N_r=\frac{0}{0}$. In diesem Falle kann aber nur, da und c relative Primzahlen sind, $a=2$, $c=-1$ sein, d. h. man erhält die natürliche Zahlenreihe, und es ist daher $N_r=r$. Die Gleichungen (1.) geben dann

$$r=2^{r-1}-\frac{r-2}{1}2^{r-3}+\ldots.+(-1)\frac{r-2}{2}\text{ für ein ungerades } r;$$

$$r=2^{r-1}-\frac{r-2}{1}2^{r-3}+\ldots.+(-1)\frac{r-2}{2}\text{ für ein gerades } r.$$

§. 2.

Ist ξ eine beliebige unbestimmte Grösse und $q=rm$ (wo q, r, m ganze Zahlen sind), und bezeichnet man den Ausdruck $x^q-\frac{r}{1}(cN_0+N_1\xi)x^{r-1}+\frac{r.r-1}{1.2}(cN_1+N_2\xi)x^{r-2}-\ldots,+(-1)^r(cN_{q-1}+N_q\xi)$ durch $P_q(\xi)$, so ist, wie in dem Aufsatz über periodische Kettenbruche bewiesen

$$P_q(\xi)=P_m(\xi').P_m(\xi'').P_m(\xi''')\ldots.P_m(\xi^{(r)}),$$

wo $\xi', \xi'', \xi''' \ldots\ldots \xi^{(r)}$ die r Wurzeln von $P_r(\xi)$ (nach x genommen) sind. Hieraus folgt nun, dass das letzte Glied von $P_q(\xi)$ gleich dem Producte der letzten Glieder von $P_m(\xi'), P_m(\xi''), \ldots\ldots P_m(\xi^{(r)})$; d. h.

$$cN_{q-1}+N_q\xi=(cN_{m-1}+N_m\xi')(cN_{m-1}+N_m\xi'')\ldots\ldots(cN_{m-1}+N_m\xi^{(r)})$$

oder

$$cN_{q-1}+N_q\xi=c^rN_{m-1}^r+c^{r-1}N_{m-1}^{r-1}N_mC_1+c^{r-2}N_{m-1}^{r-2}N_m^2C_2+\quad+N_m^rC_r,$$

sein muss, wenn man unter C_μ die Summe der Combinationen zu μ der Wurzeln $\xi', \xi'', \xi''' \ldots\ldots \xi^{(r)}$ versteht. Es ist aber

$$P_r(\xi)=x^r-r(cN_0+N_1\xi)x^{r-1}+\frac{r.r-1}{1.2}(cN_1+N_2\xi)x^{r-2}-\pm(cN_{r-1}+N_r\xi),$$

folglich allgemein $C_\mu=\frac{r.(r-1)\ldots\ldots(r-\mu+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\mu}(cN_{\mu-1}+N_\mu\xi)$.

Hieraus folgt

$$cN_{q-1}+N_q\xi=c^rN_{m-1}^r+rc^{r-1}N_{m-1}^{r-1}N_m(cN_0+N_1\xi)+\frac{r.r-1}{1.2}c^{r-2}N_{m-1}^{r-2}N_m^2(cN_1+N_2\xi)+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+N_m^r(cN_{r-1}+N_r\xi).$$

Demnach ist

$$-\xi=\frac{cN_{q-1}-(c^rN_{m-1}^r+rc^rN_{m-1}^{r-1}N_0+\frac{r.r-1}{1.2}c^{r-1}N_{m-1}^{r-1}N_m^2N_1+\quad+cN_m^rN_{r-1})}{N_q-(rc^{r-1}N_{m-1}^{r-1}N_mN_1+\frac{r.r-1}{1.2}c^{r-1}N_{m-1}^{r-2}N_m^2N_2+\quad+N_m^rN_r)}.$$

Dieser Bruch aber muss, da ξ eine ganz unbestimmte und unabhängige Grösse ist, $=\frac{0}{0}$ sein. Folglich ist (da $N_0=0$)

$$8)\quad\begin{cases}N_{q-1}=c^{r-1}N_{m-1}^r+\frac{r.r-1}{1.2}c^{r-2}N_{m-1}^{r-2}N_m^2N_1+\frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}c^{r-3}N_{m-1}^{r-3}N_m^3N_2+\ldots\ldots+N_m^rN_{r-1}\\ N_q=rc^{r-1}N_{m-1}^{r-1}N_mN_1+\frac{r.r-1}{1.2}c^{r-2}N_{m-1}^{r-2}N_m^2N_2+\ldots\ldots+N_m^rN_r.\end{cases}$$

Da nun in letzterer Gleichung die rechte Seite durch N_m theilbar ist, so ist auch N_q durch N_m theilbar. Demnach ist folgender Satz bewiesen:

Geht m *in* q *auf, so geht arch* N_m *in* N_q *auf.*

Zusatz. Es folgt hieraus, dass $a^{q-1}+\frac{(q-2)}{1}a^{q-3}c+\frac{(q-3)(q-4)}{1.2}a^{q-5}c^2$ etc. den Ausdruck $a^{m-1}+\frac{m-2}{1}a^{m-3}c+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}a^{m-5}c^2+$ etc. zum Factor hat, wenn m ein Factor von q ist. (Bekanntlich ist $1+x+x^2+\quad+x^{p-1}$, wenn p eine Primzahl, nicht in zwei reelle, ganze Factoren zerlegbar; es lässt sich vermuthen, dass $a^{p-1}+\frac{(p-2)}{1}a^{p-3}c+\frac{(p-3).(p-4)}{1.2}a^{p-5}c^2+$ etc. dieselbe Eigenschaft hat.)

Zusatz 2. Da N_{mr} durch N_m theilbar ist, so muss auch $\frac{(a+\sqrt{b})^{mr}-(a-\sqrt{b})^{mr}}{(a+\sqrt{b})-(a-\sqrt{b})}$ $\times \frac{1}{2^{mr-1}}$ durch $\frac{(a+\sqrt{b})^m-(a-\sqrt{b})^m}{(a+\sqrt{b})-(a-\sqrt{b})} \cdot \frac{1}{2^{m-1}}$ theilbar sein; d. h. es muss der Bruch $\frac{(a+\sqrt{b})^{mr}-(a-\sqrt{b})^{mr}}{(a+\sqrt{b})^m-(a-\sqrt{b})^m} \cdot \frac{1}{2^{(r-1)m}}$ stets eine ganze reelle Zahl geben. (S. oben.)

Zusatz 3. Haben q und p den Factor α gemein, so haben auch N_q und N_p den Factor N_α gemein.

§. 3.

Es lässt sich durch den Kettenschluss beweisen, dass allgemein

$$4) \qquad N_{m+n} = cN_m N_{n-1} + N_{m+1} N_n \text{ ist.}$$

Unter der Bedingung der Richtigkeit dieser Formel müsste nämlich auch

$$N_{m+n+1} = cN_m N_n + N_{m+1} N_{n+1}$$

sein. In der That ist aber $N_{m+n+1} = aN_{m+n} + cN_{m+n-1}$. Setzt man hier, der zu beweisenden Formel (4.) gemäss:

$$N_{m+n} = cN_m N_{n-1} + N_{m+1} N_n$$
$$N_{m+n-1} = cN_{m-1} N_{n-1} + N_m N_n,$$

so erhält man

$$\begin{aligned} N_{m+n+1} &= cN_m N_n + aN_{m+1} N_n + cN_{n-1}(aN_m + cN_{m-1}) \\ &= cN_m N_n + aN_{m+1} N_n + cN_{n-1} N_{m+1} \\ &= cN_m N_n + N_{m+1} N_{n+1}; \end{aligned}$$

was mit der Gleichung α übereinstimmt. Da nun, wie leicht zu sehen, die Gleichung (4.) für $n=1$, $n=2$, richtig ist, so muss sie auch für jedes grössere n passen.

Aus der Gleichung (4.) leiten wir folgenden *Satz* ab:

Sind p *und* q *relative Primzahlen, so sind auch* N_p *und* N_q *relative Primzahlen; und umgekehrt.*

Beweis. Zuvörderst leuchtet von selbst ein, dass N_p und N_{p+1} relative Primzahlen sind (als Zähler und Nenner eines Näherungswerths des Kettenbruchs $a + \frac{c}{a + \frac{c}{a + \text{etc.}}}$). Es sei $p<q$ und zwar $q=\mu p+\alpha$ (wo $\alpha<p$), so ist auch α zu p und q relative Primzahl. Nach Gleichung (4.) ist aber $N_q = cN_{\mu p} N_{\alpha-1} + N_{\mu p+1} N_\alpha$. Hätten nun die Zahlen N_q und N_p und folglich N_q und $N_{\mu p}$ (da nach (§. 2.) $N_{\mu p}$ ein Vielfaches von N_p ist) den Factor k mit einander gemein, so müsste auch, da $N_{\mu p+1}$ zu $N_{\mu p}$ relative Primzahl ist,

N_α diesen Factor k enthalten. Es sei nun $p = \nu\alpha + \beta$, wo also β auch relative Primzahl zu α und p und $< \alpha$ ist, so ist

$$N_p = cN_{\nu\alpha}N_{\beta-1} + N_{\nu\alpha+1}N_\beta .$$

Wir schliessen hier wieder eben so, dass N_β den Factor k enthalten müsse. Indem man wieder $\alpha = \varrho\beta + \gamma$, $\beta = \sigma\gamma + \delta$, $\gamma = \tau\delta + \varepsilon$, etc. setzt, beweiset man der Reihe nach eben so, dass N_γ, N_δ, N_ε .... (wo γ, δ, ε .... alle zu p und q relative Primzahlen sind) sämmtlich den Factor k enthalten müssten. Nun muss man, da p und q relative Primzahlen sind, in der herabsteigenden Reihe α, β, γ, δ, ε .... nothwendig einmal zur Einheit gelangen. Also müsste auch $N_1 = 1$ den Factor k enthalten; was nicht möglich ist, da k eine reelle ganze Zahl ist. Folglich müssen N_p und N_q relative Primzahlen sein.

Umgekehrt sind aber auch p und q relative Primzahlen, wenn es N_p und N_q sind. Denn das Gegentheil würde dem Zusatz (3. §. 2.) widersprechen.

Zusatz 1. Sind N_p und N_q nicht relative Primzahlen, so sind es auch die Zahlen p und q nicht.

Zusatz 2. Ist p eine Primzahl, so ist N_p relative Primzahl zu N_1, N_2, ... N_{p-1}. Hieraus folgt, dass kein Factor von N_p früher in der Reihe vorgekommen sein kann.

Zusatz 3. *Ist* N_p *eine Primzahl, so muss nothwendig auch* p *eine Primzahl sein,* (wenn nicht $a = 1$, da in diesem Falle auch N_4 eine Primzahl sein kann).

Mit Rücksicht auf die Gleichung (1.) lässt sich also unbedingt behaupten, *dass* p *eine Primzahl ist,* sobald Werthe von a und c gefunden werden können, für welche der Ausdruck $a^{p-1} + \frac{p-2}{1}a^{p-3}c + \frac{(p-3)(p-4)}{1.2}a^{p-5}c^2 +$ etc. eine Primzahl giebt.

Umgekehrt scheint dieser Ausdruck, wenn p eine Primzahl ist, sehr reich an Primzahlen zu sein. Ist z. B. $p = 7$, $a = 1$, so giebt für $c = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, jener Ausdruck 13, 11, 7, 1, 1, 13, 43, 97, 181; welches sämmtlich Primzahlen sind. Wir werden über die Natur der Factoren von N_p Näheres bestimmen.

§. 5.

Lehrsatz. Ist p *eine Primzahl, so ist* $N_p \equiv \left(\frac{b}{p}\right)$ *mod. p.* (wo $\left(\frac{b}{p}\right) = \pm 1$; nach der *Legendre*'schen Bezeichnung).

Beweis. Es ist $N_p' = \frac{(a+\sqrt{b})^p-(a-\sqrt{b})^p}{(a+\sqrt{b})-(a-\sqrt{b})} \cdot \frac{1}{2^{p-1}}$.

Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man

$$2^{p-1}N_p = pa^{p-1} + \frac{p.p-1.p-2}{1.2.3}a^{p-3}b + \quad + \frac{p.p-1}{1.2}a^2 b^{\frac{p-3}{2}} + b^{\frac{p-1}{2}}.$$

Hier sind alle Glieder rechts, ausser dem letzten, durch p theilbar; also ist $2^{p-1}N_p \equiv b^{\frac{p-1}{2}}$ mod. p., folglich, da $2^{p-1} \equiv 1$ mod. p. und $b^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{b}{p}\right)$ ist,

$$N_\mu \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \text{ mod. } p.$$

Zusatz. Dieser Satz ist nicht anwendbar:

1) Bei der natürlichen Zahlenreihe, weil hier $b = 0$ ist;

2) Wenn p ein Factor von b ist.

§. 6.

Lehrsatz. Es ist $N_{p-\left(\frac{b}{p}\right)} \equiv 0$ mod. p.

Beweis. Da die Brüche $\frac{N_{p+1}}{N_p}$, $\frac{N_p}{N_{p-1}}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe des Kettenbruchs $a + \cfrac{c}{a + \cfrac{c}{a + \text{etc.}}}$ sind, so ist $N_{p+1}N_{p-1} - N_p^2 = (-1)^p c^{p-1}$. Folglich, da nach dem vorigen Satze $N_p \equiv \pm 1$ mod. p und demnach $N_p^2 \equiv +1$ ist, und da ferner $(-1)^p c^{p-1} \equiv -1$, $N_{p+1}N_{p-1} - 1 \equiv -1$ mod. p ist, so ist $\quad N_{p+1}N_{p-1} \equiv 0$ mod. p.

Demnach ist entweder N_{p+1} *oder* $N_{p-1} \equiv 0$ mod. p.

Es ist nun $N_{p+1} = \frac{(a+\sqrt{b})^{p+1}-(a-\sqrt{b})^{p+1}}{(a+\sqrt{b})-(a-\sqrt{b})} \cdot \frac{1}{2^p}$, d. h.

$$2^p N_{p+1} = (p+1)a^p + \frac{p+1.p.p-1}{1.2.3}a^{p-2}b + \quad + (p+1)ab^{\frac{p-1}{2}}.$$

Hier sind rechts alle Glieder, ausser dem ersten und letzten, durch p theilbar; demnach ist

$$2^p N_{p+1} \equiv (p+1)a(a^{p-1} + b^{\frac{p-1}{2}}) \text{ mod. } p.$$

Da nun $2^p \equiv 1$ mod. p, $p+1 \equiv 1$ mod. p, $a^{p-1} \equiv 1$ mod. p und $b^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{b}{p}\right)$ ist, so ist

$$2N_{p+1} \equiv a(1 + (\tfrac{b}{p})).$$

Ist demnach $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$, so ist $N_{p+1} \equiv 0$ mod. p; ist aber $\left(\frac{b}{p}\right) = +1$, so kann N_{p+1} nicht $= 0$ mod. p, und es muss folglich (in Folge des ersten Theils dieses Beweises) $N_{p-1} \equiv 0$ mod. p sein. Demnach ist der Satz bewiesen.

Anmerk. Aus dem Obigen folgt, dass, wenn $N_p \equiv +1$ ist, N_{p+1} nicht $\equiv 0$ mod. p, und wenn $N_p \equiv -1$ ist, N_{p-1} nicht $\equiv 0$ mod. p sein kann.

§. 7.

Aus vorstehenden Sätzen lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

1) In der recurrenten Reihe $N_1, N_2, N_3, \ldots$ muss jede Primzahl, die nicht in b aufgeht, unendlich vielmal als Factor vorkommen. Die natürliche Zahlenreihe giebt von allen recurrenten Reihen die Primzahlen mit möglichst geringer Beschleunigung.

2) Setzt man, p und q seien Primzahlen und q sei ein Factor von N_p, so kann q in keiner der Zahlen $N_1, N_2, \ldots N_{p-1}$ als Factor vorkommen (S. §. 3., Zus. 2.), und ist selbst $>p$. Da nun q nothwendig in $N_{q-\left(\frac{b}{q}\right)}$ aufgehen muss, so haben N_p und $N_{q-\left(\frac{b}{q}\right)}$ den Factor q gemein, und es muss folglich, da N_p das kleinste N ist, in welchem q als Factor vorkommt, $q-\left(\frac{b}{q}\right)$ ein Vielfaches von p sein; oder genauer: da m gerade sein muss, damit q eine Primzahl sein könne, muss $q = 2mp + \left(\frac{b}{q}\right)$ sein.

Ist nun b selbst eine Quadratzahl (wie z. B. wenn $N_r = 1+x+x^2+\ldots+x^{r-1}$ ist, so ist $\left(\frac{b}{q}\right)$, stets $=+1$; also q in diesem Falle stets von der Form $2mp+1$; welches mit einem bekannten Satze übereinstimmt.

Ist b eine Primzahl, so kann es nur von der Form $4n+1$ sein; also ist, nach dem Satze der Reciprocität $\left(\frac{b}{q}\right) = \left(\frac{q}{b}\right)$. In diesem Falle ist demnach jeder Factor q von N_p von der Form $2mp+1$ oder $2mp-1$, jenachdem q ein quadratischer Rest von b ist, oder nicht.

Ist a eine gerade Zahl, etwa $=2n$, so ist $b = 4(n^2+c)$. Da nun 4 stets ein quadratischer Rest ist, so ist q alsdann stets $= 2mp + \left(\frac{n^2+c}{q}\right)$.

Breslau im September 1845.

4.

Ueber independente Darstellung der höhern Differentialquotienten und den Gebrauch des Summenzeichens.

(Von Herrn Cand. math. *R. Hoppe* zu Berlin.)

Da eine Nachricht von dem Inhalte meiner Schrift „Theorie der independenten Darstellung der höhern Differential-Coefficienten für das gegenwärtige Journal nach der Meinung des Herrn Herausgebers desselben nicht unpassend sein dürfte, so benutze ich dies, um in Folgendem Einiges über die Tendenz und den Inhalt der Schrift zu sagen und beginne mit der bisherigen Auseinandersetzungsweise dieses Gegenstandes.

Der erste Weg, zu independenten Ausdrücken der höhern Differentialquotienten verschiedener Functionen zu gelangen, war ohne Zweifel die Induction, welche bei einigen Functionen, z. B. sin x, arc sin x, ohne Weiteres zu Resultaten führte, bei andern, wie tg x, sec x, durch Kunstgriffe, namentlich, wie bei arctg x, durch eine dem jedesmaligen Falle angemessene Wahl der Entwicklungsform, unterstützt wurde. Von den auf diese Art gewonnenen Resultaten aus ist man noch einen Schritt weiter gegangen, indem man verschiedene Richtungen einschlug.

Das am nächsten liegende Verfahren, welches sich jederzeit anwenden lässt, und daher jeder beliebigen Allgemeinheit fähig ist, ist immer, die Glieder der allmäligen Entwicklung in ihrer natürlichen Folge sich ungestört ausbreiten zu lassen, ohne sich auf Versuche zur Vereinfachung der Ausdrücke einzulassen, und alsdann das Bildungsgesetz derselben näher anzugeben. Von diesen Ausdrücken, die man combinatorische Entfaltungen nennen könnte, lässt sich indessen nicht erwarten, dass sie der geringsten Anwendung fähig sind. Um dies Verfahren mit dem vorgenannten in Verhältniss zu stellen, so geht jene Induction darauf aus, die Ausbreitung der Entwicklungsglieder durch Vereinfachung so zu hemmen, dass sie a priori gewisse Grenzen nicht überschreiten kann; wovon die Folge ist, dass die Ausdrücke immer eine, wenn gleich

öfters schwerfällige Anwendung gestatten. Konnte nun entweder die Induction dies Ziel nicht erreichen, oder doch keine bequemen Ausdrücke liefern, so musste eine gewisse Anwendbarkeit auf andere Weise erstrebt werden; und dies war das Augenmerk der noch übrigen Untersuchungen auf diesem Felde. Unter den dazu angewandten Mitteln sind besonders zwei zu nennen. Das erste besteht darin, verschiedene combinatorische Entfaltungen auf einander zurückführen. Dies hat *Pfaff* gethan, indem er die höhern Differentialquotienten durch Localformeln ausdrückte, und es dadurch möglich gemacht, nach einmaligem Uebergang von den einfachern Functionen zu den nächst zusammengesetzteren, die ursprünglich ungefügen Ausdrücke in der Rechnung zu behandeln. Aber hiermit war auch jeder weitere Fortschritt so gut wie abgeschnitten, indem die neuen Ausdrücke nicht mehr die Form der alten hatten, vielmehr ihre Entwicklungs-Coefficienten selbst veränderlich geworden waren. Das zweite Mittel besteht in der Anwendung der Differenzenrechnung, die jedoch eben so wenig gegründete Aussicht giebt, eine vorgeschriebene Bahn direct verfolgen zu können, weil sie ganz an die Analogieen gebunden ist, welche sie hervorgerufen haben, und nichts vermag, wo diese sie im Stiche lassen. Sie würde gerade Dasselbe leisten, wie die Localformeln. Beispiele wirklich geschehener Anwendung lassen sich indessen nur für specielle Fälle aufweisen.

Diese Thatsachen waren nöthig, um die Forderung klar zu machen, welcher eine Theorie der independenten Darstellung der höhern Differentialquotienten zu genügen hat, und um zu zeigen, dass die bisherige Behandlungsweise keine Aussicht giebt, ihr genügen zu können. Diese Forderung besteht darin:

1) Dass an die Stelle der Induction ein regelrechtes Verfahren trete, um vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortschreiten zu können;

2) Dass durch diesen Fortschritt die Form der Ausdrücke nicht geändert werde, damit die Anwendbarkeit der Methode von vorn herein verbürgt sei;

3) Dass die Fähigkeit der Ausdrücke, sich unter allen Umständen in der Rechnung behandeln zu lassen, nachgewiesen werde.

Da, wie ich bemerkt habe, die in Rede stehende Untersuchung häufig als zur combinatorischen Analysis gehörig angesehen wird, so ist es nöthig, den Unterschied hervorzuheben, der sich zwischen dieser und der Reihentheorie findet, und zu erklären, dass sie um der zweiten Bedingung willen mit der ersten nichts gemein haben kann. Das Princip der combinatorischen Analysis ist natürliche Entfaltung, ohne Zwang der Form: das der Lehre

von den Reihen und bestimmten Integralen hingegen Transformation. Wenn in der erstern auch Umformung Statt findet, so folgt sie erst auf die Entfaltung; und die blosse Entfaltung ist schon ein hinreichender Gegenstand ihrer Untersuchung. Indem aber die Ausdrücke der höhern Differentialquotienten sogleich eine bestimmte Form annehmen müssen, wie es in der genannten Bedingung ausgesprochen ist, so kann von keiner natürlichen Entfaltung die Rede sein, und es wird sich durch die Art ihrer Erfüllung zeigen, dass die Untersuchung in das Gebiet der Reihentheorie fällt.

Ich will nun die Mittel angeben, die ich in der genannten Schrift angewendet habe, um allen drei Forderungen zu genügen.

Zuerst habe ich unter andern, weniger gebrauchten, folgende Reductionsformel (Seite 38. Gleichung 5.) entwickelt:

$$(5)\qquad \frac{d^n f(z)}{dx^n} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{z^k}{1.2\ldots k} f^k(z) \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h z^{-h} \frac{d^n.z^h}{dx^n},$$

welche nach Auflösung der Summenzeichen wie folgt lautet:

$$\begin{aligned}\frac{d^n f(z)}{dx^n} = & \frac{z}{1} f'(z) \cdot \frac{1}{z}\frac{d^n z}{dx^n} \\ & + \frac{z^2}{1.2} f^2(z) \left\{ -\frac{2}{z} \cdot \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{1}{z^2} \cdot \frac{d^n.z^2}{dx^n} \right\} \\ & + \frac{z^3}{1.2.3} f^3(z) \left\{ \frac{3}{z} \cdot \frac{d^n z}{dx^n} - \frac{3}{z^2} \cdot \frac{d^n.z^2}{dx^n} + \frac{1}{z^3} \cdot \frac{d^n.z^3}{dx^n} \right\} \\ & + \frac{z^4}{1.2.3.4} f^4(z) \left\{ -\frac{4}{z} \cdot \frac{d^n z}{dx^n} + \frac{6}{z^2} \cdot \frac{d^n.z^2}{dx^n} - \frac{4}{z^3} \cdot \frac{d^n.z^3}{dx^n} + \frac{1}{z^4} \cdot \frac{d^n.z^4}{dx^n} \right\} \\ & \text{u. s. w.} \\ & + \frac{z^n}{1.2\ldots n} f^n(z) \left\{ \pm \frac{n_1}{z} \cdot \frac{d^n z}{dx^n} \mp \frac{n^2}{z^2} \cdot \frac{d^n.z^2}{dx^n} \pm \ldots + \frac{n_n}{z^n} \cdot \frac{d^n.z^n}{dx^n} \right\}.\end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Formel will ich an einem Beispiele erläutern. Es sei $f(z) = e^{az}$ und $z = x^b$; alsdann ist

$$f^k(z) = \frac{d^k.e^{az}}{dz^k} = a^k e^{az}$$

$$\frac{d^n.z^h}{dx^n} = \frac{d^n.x^{hb}}{dx^n} = 1.2\ldots n\,(hb)_n x^{hb-n}$$

$$z^k = x^{kb} \text{ und } z^{-h} = x^{-hb}.$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung (5.) ein, und setzt $1.2\ldots nx^{-n}$ und e^{az} als gemeinschaftliche Factoren heraus, so kommt

$$\frac{d^n e^{ax^b}}{dx^n} = 1.2\ldots n \frac{e^{ax^b}}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k x^{kb}}{1.2\ldots k} \sum_{h=1}^{h=k} (-1)^{k+h} k_h (hb)_n,$$

oder, nach Auflösung der Summenzeichen:

$$\frac{d^n e^{ax^b}}{dx^n} = 1.2\,....\,n\,\frac{e^{ax^b}}{x^n}\Big[\frac{ax^b}{1}.(b)_n$$
$$+\frac{a^2x^{2b}}{1.2}\{-2(b)_n+(2b)_n\}$$
$$+\frac{a^3x^{3b}}{1.2.3}\{3(b)_n-3(2b)_n+(3b)_n\}$$
$$+\frac{a^4x^{4b}}{1.2.3.4}\{-4(b)_n+6(2b)_n-4(3b)_n+(4b)_n\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{a^nx^{nb}}{1.2....n}\{\pm n_1(b)_n\mp n_2(2b)_n\pm....+n_n(nb)_n\}\Big].$$

In diesem Beispiele ist man von den einfachen Functionen e^{ax}, x^b, deren höhere Differentialquotienten als bekannt vorausgesetzt wurden, zu der zusammengesetzteren Function e^{ax^b} aufgestiegen. Um zu zeigen, wie sich das fernere Aufsteigen bewerkstelligen lässt, setzen wir in die Gleichung (5.) $f(z)=\cos z$ und $z=e^{ax^b}$; alsdann wird

$$f^k(z) = \cos(z+\tfrac{1}{2}k\pi)$$

und nach der eben gefundenen Gleichung, wenn man daselbst p statt k, q statt h, und ha statt a schreibt:

$$\frac{d^n.zh}{dx^n} = \frac{d^n.e^{hax^b}}{dx^n} =$$
$$1.2\,....\,n\,\frac{e^{hax^b}}{x^n}\sum_{p=1}^{p=n}\frac{hax^by}{1.2....p}\sum_{q=1}^{q=p}(-1)^{p+q}p_q(qb)_n.$$

Nach Substitution dieser Werthe giebt die Gleichung (5.):

$$\text{(A)}\quad \frac{d_n\cos e^{ax^b}}{dx^n} = \frac{1.2....n}{x^n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{e^{kab}}{1.2....k}\cos(e^{ax^b}+\tfrac{1}{2}k\pi)\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h\times$$
$$\sum_{p=1}^{p=n}\frac{(hax^b)^p}{1.2....p}\sum_{q=1}^{q=p}(-1)^{p+q}p_q(qb)_n.$$

Das Gelingen dieser letzten Operation war davon abhängig, dass die Function die willkürliche Constante a enthielt, um ha substituiren zu können, welche in a auch nur ganze Zahlen zu begreifen gebraucht hätte. Um daher das Verfahren fortsetzen zu können, würde man statt $f(z)=\cos z$ sogleich $f'(z)=\cos^m z$ haben setzen müssen; und da sich die höhern Differentialquotienten dieser Function für ganze positive m leicht ausdrücken lassen, so würde diese Aenderung kein Hinderniss gewesen sein. Diese Verallgemeinerung durch einen beigefügten Exponenten lässt sich in den meisten Fällen umgehen; worüber das fünfte Capitel nachzusehen ist. Die Bedingung einer ungestörten

Anwendung der Reductionsformel ist daher nur die, dass die nacheinander hinzutretenden Functionen, wie hier x^b, e^{ax}, $\cos x$, zu denen gehören, von welchen man bereits die höhern Differentialquotienten ihrer ganzen positiven Potenzen kennt. Dies ist bekanntlich der Fall bei den Functionen $a+x$, ax, x^a, e^x, $\cos x$, $\sin x$, und ich habe in den Capiteln XI. bis XVI. gezeigt, das auch lx und $\operatorname{arc tg} x$ dazu gehören. Die aus diesen Functionen zusammengesetzten begreifen alle algebraischen und sogenannten transcendenten Functionen erster Classe in sich, deren höhere Differentialquotienten sich demnach jederzeit mittels der Gleichung (5.) bestimmen lassen, wenn nur ihre Zusammensetzung von der Art ist, dass man immer eine neue Function *von* der vorher betrachteten Function genommen hat. Da indessen auch eine Zusammensetzung durch Addition oder Multiplication mehrerer Functionen Statt finden kann, so ist dieser Fall noch besonders zu berücksichtigen; wegen dessen ich, weil er sich durch lauter bekannte Thatsachen erledigt, nur auf das vierte Capitel verweise.

Hiermit ist die Möglichkeit nachgewiesen, eine ununterbrochene Reduction auf die höhern Differentialquotienten so anzuwenden, wie man sie bisher bei der einfachen Differentiation angewandt hat; und zwar geschieht dieselbe nicht vom $n$ten Differentialquotienten auf den $n-1$ten, sondern vom $n$ten der einen Function auf den $n$ten der andern; so dass die independente Ausdrucksform ausschliesslich und von Anfang an gebraucht wird.

Was ferner die zweite Forderung betrifft, dass sich die Ausdrucksform bei der Reduction nicht ändern soll: so ist zu dieser gemeinschaftlichen Form die vielfache Summe genommen worden, welche eine constante Anzahl von Summenzeichen, oder von unabhängigen Indices, nach welchen summirt wird, enthält. Unter einer vielfachen Summe wird die Summe einer Reihe (und zwar ist hier nur von endlichen Reihen die Rede) verstanden, deren allgemeines Glied wieder eine Summe zum Factor hat, die gleichfalls eine vielfache sein kann. Dass diese Form eine Beschränkung enthält, sieht man, wenn man z. B. die Coefficienten der Entwicklung des Ausdrucks

$$(A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots)^n$$

nach Potenzen von x durch einfache Summen allgemein ausdrückt; denn die Anzahl der unabhängigen Indices im Ausdruck des $m$ten Coefficienten wird nicht constant, sondern entweder von m oder von n abhängig sein müssen. Dass hingegen alle Ausdrücke, welche die hiesige Reductionsformel liefert, innerhalb dieser Form fallen, ist insofern unzweifelhaft, als bei jeder Reduction höchstens zwei neue Indices hinzukommen; so dass die Anzahl der gesammten

letztern allein von der Beschaffenheit der Function abhängt, für jede Function aber, namentlich gegen den Ordnungs-Exponenten, jederzeit constant ist.

Die dritte Bedingung endlich enthält die Forderung, dass sich die gewonnenen Ausdrücke ohne Hinderniss in der Rechnung behandeln lassen. Eine endliche Reihe ist jederzeit völlig bestimmt durch eine Function, welche ihr allgemeines Glied, und durch zwei Zahlen, welche den kleinsten und grössten Werth des Index ausdrücken. Es muss sich daher die Rechnung mit Summen endlicher Reihen auf eine solche mit den genannten drei Elementen zurückführen lassen. Die sich hierauf beziehenden Regeln habe ich in der Einleitung meiner Schrift zusammengestellt und will für's Erste die dazu getroffenen Bestimmungen angeben.

Der Ausdruck
$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k$$
bedeutet nach ihnen die Summe aller Werthe, welche u_k annimmt, wenn k alle ganzen Zahlen, die $\geqq a$ und $\leqq b$ sind, durchläuft. Er ist daher $=0$, sowohl wenn $a > b$, als auch wenn zwischen a und b keine ganze Zahl enthalten ist. a und b sind beliebige ganze oder gebrochene Zahlen.

Ein solcher Ausdruck entspricht einem bestimmten Integrale, wie eine Summe im Sinne der Differenzenrechnung einem unbestimmten Integrale entspricht. Bei dieser Vergleichung stellen sich folgende Unterschiede heraus. Die Zunahme der Veränderlichen k ist immer $=1$, und also positiv, während sie beim Integral auch negativ sein kann. Deshalb ist es nöthig, die Grenzen zu vertauschen, sobald eine negative Veränderliche substituirt wird; z. B. es ist, wenn man $k = n - h$ setzt,
$$\sum_{k=a}^{k=b} u_k = \sum_{h=n-b}^{h=n-a} u_{n-h}.$$

Ferner vermehrt oder vermindert sich die Gliederzahl, wenn man ein Vielfaches des Index, z. B. $\frac{1}{2}k$ oder $2k$ substituirt; und indem man die überschüssigen Glieder abzieht, oder die fehlenden ergänzt, zerfällt jedesmal die Summe durch eine solche Substitution in mehrere. S. §. 4. Beide Aenderungen finden beim Integrale nicht Statt. Während beim Integrale eine Vertauschung der Grenzen eine Aenderung des Vorzeichens bewirkt, steht hier der dadurch veränderte Werth der Summe mit dem ursprünglichen in keiner Beziehung. Obgleich hier die Analogie mit dem Integrale, und zwar mit Vortheil für die Zerlegung der Summen, nach §. 5. hätte festgehalten werden können, so habe

ich doch zu Gunsten der Vertauschung der Summenzeichen, welche die wichtigste Operation ausmacht, und die dadurch übermässig complicirt geworden sein würde, die Anordnung so gemacht, dass von jenen beiden Werthen der eine immer $= 0$ wird, während er sonst die Glieder des andern subtractiv enthalten haben würde. Endlich ist noch zu bemerken, dass beim Integrale aus dem beistehenden Differentiale klar ist, zu welcher Veränderlichen das Integralzeichen nebst seinen Grenzen gehört, während hier, wo Δk nicht dabeisteht, der Buchstab des Index bei der Angabe der Grenzen zur Vermeidung von Zweideutigkeiten nicht fehlen darf.

Die Operationen oder Transformationen, welche mit Summen vorgenommen werden können, sind nun zwar denen mit Integralen analog. Da sie jedoch keine gleich ausgedehnte Anwendung gestatten, concentriren sie sich auf die folgenden wenigen; so dass jene Analogie mehr zurücktritt. Die erste ist die schon genannte Substitution (§. 2. 3. 4.); ihre Anwendung wird später vorkommen. Die erwähnte Art in §. 4. dient, wie man leicht sieht, die gerad- und die ungeradstelligen Glieder zu sondern; was bei der Reduction imaginärer Ausdrücke auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ sehr zu Statten kommt (Seite 125. ist in dieser Art Gebrauch davon gemacht), ingleichen die Ausdrucksform für Interpolation der Reihen offen erhält. Die zweite Operation ist die Vertauschung der Summenzeichen. In Bezug auf diese ist in §. 10. 11. 14. 15. nachgewiesen, dass sowohl die Summenzeichen einer vielfachen Summe, als auch mit ihnen die vor, zwischen und hinter ihnen stehenden Grössen, und beliebige Factoren derselben, sich wie Factoren eines Products untereinander vertauschen lassen; mit der Einschränkung, dass vor ein Summenzeichen nie eine Function von dessen Index zu stehen kommt und dass in gewissen Fällen die Grenzen nach bestimmten Regeln, welche in §. 10. 11. 12. abgehandelt sind, sich ändern. So z. B. ist

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k \sum_{h=0}^{h=k} v_h^k = \sum_{h=0}^{h=n} \sum_{k=h}^{k=n} u\, v_h^k.$$

Die Vertauschung der Summenzeichen liefert Mittel, eine Menge Transformationen von Summen-Ausdrücken mit grosser Leichtigkeit auszuführen, und zwar ohne irgend durch die Menge der sich involvirenden Summen gestört zu werden. Deren sind besonders folgende zu nennen.

Will man einen Summen-Ausdruck nach Potenzen einer darin enthaltenen Grösse x ordnen, so entwickele man die etwa noch darin befindlichen Functionen von x nach Potenzen von x; dann wird man zwischen verschie-

denen Summenzeichen Potenzen von x, z. B. x^m, x, x erhalten, deren Exponenten von beliebigen Indices abhängig sind. Ist nun z. B. k der Index der ersten, d. h. von den übrigen involvirten Summe, so substituire man $k-m-n$ für k: dann bleibt bloss x^k übrig. Bringt man darauf das Summenzeichen der k nebst x^k an das Ende links, so drückt ohne Weiteres der übrige Theil des Ausdrucks den allgemeinen Coefficienten einer Potenz von x aus. Da man aber gleich anfangs einen beliebigen Index zum ersten machen kann, so lässt sich die Operation auf mehr als eine Weise vollziehen, und das Resultat fällt auch im Allgemeinen formell wesentlich verschieden aus. Die Modificationen, welche das Verfahren nach den Umständen erleiden muss, sind zu klar, als dass Regeln etwas nützen könnten.

Will man mehrere Summenausdrücke algebraisch multipliciren, so braucht man sie nur neben einander zu schreiben und das Ganze als eine Summe zu betrachten (S. §. 17.), die nun jeder möglichen Transformation, mithin auch der eben genannten unterworfen werden kann. Da es bei der Multiplication der Reihen meistentheils auf Bestimmung der Coefficienten der Entwicklung des Products nach Potenzen einer Grösse abgesehen ist, so findet hier gerade jene Transformation ihre beste Anwendung (S. §. 18.). Ein Beispiel der Anwendung ist zu Anfang des 22ten Capitels gegeben.

Ferner dient die Vertauschung der Summenzeichen, die Möglichkeit einer theilweisen Summation, so wie irgend einer Vereinfachung oder Verkürzung eines Summenausdrucks, leicht zu erkennen. Hat man z. B. den Ausdruck (A), so stelle man sich die von den einzelnen Indices abhängigen Factoren des allgemeinen Gliedes gesondert vor. Es hangt

von k der Factor $\frac{e^{hax^b}}{1.2\ldots.k}\cos(e^{ax^b}+\frac{1}{2}k\pi)(-1)^k k_h$ ab;

- h - - $(-1)^h k_h h^p$,

- p - - $\frac{(hax^b)^p}{1.2\ldots.p}(-1)^p p_q$,

- q - - $(-1)^q p_q (qb)$.

Die von k und p abhängigen Factoren, jeden als allgemeines Glied einer einfachen Summe angesehen, sind nur zwischen unendlichen Grenzen $h<k<\infty$ und $q<p<\infty$ summabel. Der von h abhängige Factor ist für $p>k$ nicht summabel, dagegen verschwindet die Summe für $p<k$; demnach kann man k zur untern Grenze der p machen. Der von q abhängige Factor ist für $b=2$ und $b=-1$

(abgesehen von $b=0$ und $b=1$) summabel; denn nach Gleichung (50.) und (51.) Seite 120. ist

$$\sum_{q=1}^{q=p}(-1)^{p+q}p_q(2q)_n = p_{n-p}2^{2p-n} \text{ und}$$

$$\sum_{q=1}^{q=p}(-1)^{p+q}p_q(-q)_n = (-1)^n(n-1)_{p-1}.$$

Wäre nun die Summe nach q nicht schon die erste Summe, so würde man sie dazu machen, worauf man ihren Werth für sie einsetzen könnte. So erhält man z. B. für $b=2$, indem man zugleich der bessern Uebersicht wegen die von x unabhängige Summe nach h an das Ende rechts bringt:

$$\frac{d^n \cos e^{ax^2}}{dx^n} = \frac{1.2....n}{(2x)^n}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{e^{kx^2}}{1.2....k}\cos(e^{ax^2}+\tfrac{1}{2}k\pi)\times$$

$$\sum_{p=k}^{p=n}\frac{p_{n-p}(4ax^2)^p}{1.2....p}\sum_{h=1}^{h=k}(-1)^{k+h}k_h h^p.$$

Während hier der Gebrauch des Summenzeichens die Ausführung der Summation erleichterte, die Summationsformel selbst hingegen vorausgesetzt ward, so diente er andererseits auch zur Auffindung und zum Beweise solcher Formeln. Ausser der grossen Menge derselben, welche die Entwicklung der höhern Differentialquotienten liefert, wenn sie auf verschiedenen Wegen geschieht, und wozu z. B. die Formeln (50.) und (51.) gehören, möge noch die, Seite 114. zur Bestimmung der Summe s und Seite 159. zu der von A_k angewandte Methode als Beispiel angeführt werden.

Wie sehr sich das Summenzeichen zur recurrirenden Bestimmung gesuchter Coefficienten eignet, und wie es daher bei der Methode der unbestimmten Coefficienten zu Statten kommt, leuchtet ein. Als Beispiele mögen die recurrirenden Bestimmungen von $\overset{n}{C}(a_p)$ Seite 93. und von $\overset{n}{A}_k$ Seite 169., so wie die independente von $\overset{k}{M}_h$ im elften Capitel dienen.

Diese Puncte habe ich hier in der Kürze zusammengestellt, um zu zeigen, dass der Ausdruck durch gehäufte Summenzeichen keine so starre, ungefüge Form ist, wie es den Anschein haben kann, wenn man sich die vielfachen Summen nur entfaltet vorstellt. Es bleibt nun, um auf die anfängliche Frage zurückzukommen, noch übrig, nachzuweisen, dass diese Form für die gewöhnlichen algebraischen Operationen, Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Potenziirung, kein Hinderniss ist und dass sich vielmehr dieselben sämmtlich innerhalb dieser Form vollziehen lassen. Es muss hier natürlich

von Operationen abgesehen werden, die auf polynomische unendliche Reihen führen, mit denen sich ohnedies die Analysis nicht beschäftigt. Von der Multiplication ist schon gesprochen; bei ihr zeigt sich das Summenzeichen nur förderlich; und da sie mit beliebig vielen Factoren zugleich geschehen kann, so schliesst sie auch die Potenziirung in sich, die nur für ganze positive Exponenten hierher gehört. Die Division wird durch die Methode der unbestimmten Coefficienten auf die Multiplication zurückgeführt. Die Subtraction ist in der Addition mit begriffen; und folglich haben wir nur von der letztern zu sprechen.

Die Addition mit den Summenzeichen kann in drei Formen vollzogen werden.

1) Wenn die Grenzen mehrerer Summen übereinstimmen, so kommt deren Addition auf die ihrer allgemeinen Glieder zurück. (§. 6.)

2) Wenn sowohl die allgemeinen Glieder, als auch jedesmal die untere Grenze der einen Summe mit der obern der folgenden übereinstimmen, so gehen alle Summen addirt in eine einzige über, welche dasselbe allgemeine Glied und die kleinste der untern und die grösste der obern Grenzen hat. (Eine kleine Modification tritt ein, wenn die Grenzen ganze Zahlen sind (S. §. 5.)

3) Wenn eine allgemeine Zahl von Summanden gegeben ist, so können dieselben nur als eine Reihe gegeben sein, weil zu ihrer Bestimmung ein ausgedrücktes Gesetz erforderlich ist; folglich lässt sich ihre Summe stets durch ein oder mehrere Summenzeichen angeben.

Die zwei letzten Formen der Addition sind, als dem Summenzeichen ausschliesslich zukommend, eine reine Zugabe zu der eigentlichen algebraischen Addition; welche demnach immer in der ersten Form vollzogen werden muss. Es kommt nun nicht sowohl darauf an, die Möglichkeit irgend einer Addition in dieser Form nachzuweisen, sondern vielmehr, zu zeigen, dass man die Addition gerade derjenigen Glieder, welche man aus irgend einem Grunde zu combiniren für gut findet, in derselben ausführen kann. Soll sich die Addition nur auf einzelne Glieder erstrecken, so kann man diese leicht ausscheiden; man hat es daher nur mit dem Falle zu thun, wo eine allgemeine Anzahl von Gliedern zweier Summen, die daher nach einem bestimmten Gesetze ausgewählt sein müssen, combinirt werden sollen. Um diese Aufgabe in möglich-grösster Allgemeinheit zu lösen, seien die Summen

$$S = \sum_{k=\varphi(0)}^{k=\varphi(m)} F(k) \quad \text{und} \quad s = \sum_{h=\psi(0)}^{h=\psi(m)} f(h)$$

so zu addiren, dass die Glieder, welche durch die Gleichungen

$$k = \varphi(p) \text{ und } h = \psi(p)$$

bestimmt sind, zusammengenommen werden, wo $\varphi(p)$ und $\psi(p)$ ganze Zahlen sind, die mit p wachsen. Nun ist allgemein

$$\sum_{k=a_0+1}^{k=a_m} f(k) = \sum_{p=1}^{p+m} \sum_{k=a_{p-1}+1}^{k=a_p} f(k),$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$, beliebige, nach ihrer Grösse geordnete ganze Zahlen sind; welche Formel man durch Zerlegung des Intervalls der Summe in m beliebige Theile erhält. Trennt man das letzte Glied der Summe nach k zur Rechten ab, so erhält man

$$\sum_{k=a_0+1}^{k=a_m} f(k) = \sum_{p=1}^{p=m} f(a_p) + \sum_{p=1}^{p=m} \sum_{k=a_{p-1}+1}^{k=a_p-1} f(k).$$

Addirt man auf beiden Seiten $f(a_0)$, so werden die untern Grenzen der ersten beiden Summen $k = a_0$ und $p = 0$. Setzt man jetzt nach einander erst $a_p = \varphi(p)$ und F statt f, dann $a_p = \psi(p)$ und h statt k, so erhält man Werthe von S und s, deren Addition

$$S + s = \sum_{p=0}^{p=m} \{F(\varphi(p)) + f(\psi(p))\}$$
$$+ \sum_{p=1}^{p=m} \sum_{k=\varphi(p-1)+1}^{k=\varphi(p)-1} F(k) + \sum_{p=1}^{p=m} \sum_{h=\psi(p-1)+1}^{h=\psi(p)-1} f(h)$$

giebt: ein Ausdruck, dessen erster Theil allein die zu addirenden Glieder auf die verlangte Art combinirt, der übrige Theil die überflüssigen Glieder enthält. Gesetzt nun, $\varphi(p)$ oder $\psi(p)$ nehme mit dem Wachsen von p ab, so kann man $\varphi(m-p)$ und $\psi(m-p)$ dafür setzen; welche dieselben Werthe, nur in umgekehrter Ordnung haben, und alsdann mit p wachsen. Sollten dieselben Functionen in Zu- und Abnehmen wechseln, so würde man die zu addirenden Summen verlegen müssen. Was endlich die Grenzen betrifft, welche hier dem kleinsten und dem grössten Werthe des Index der zu addirenden Glieder gleichgesetzt worden sind, so hat man jedesmal vor der Operation dieselbe Anordnung durch Zerlegung der Summen zu machen.

Sind die zu addirenden Summen vielfache, also die Glieder, auf deren Addition die Rechnung zurückgeführt wurde, wiederum Summen, so kommen die Regeln noch einmal in Anwendung; was sich dann so oft wiederholt, bis bloss noch die gewählten, von allen Summenzeichen freien Glieder als Addenden einander gegenüberstehen.

Hiermit wird die Erfüllung der dritten Forderung nachgewiesen sein. Ich habe dieselbe, obgleich ihr Gegenstand nur Mittel zum Zweck

war, und überdies wahrscheinlich grösstentheils bekannte Thatsachen enthielt, besonders ausführlich behandelt, weil mir die independente Darstellung der höhern Differentialquotienten erst nach *ihrer* vollständigen Genügeleistung Werth zu erhalten und gerade der Gedanke einer solchen allgemeinen Durchführung noch nicht Eingang gefunden zu haben schien. Dass dies letztere geschehe, war also vor allen Dingen nöthig. Der vielleicht anderwärts gültige Einwand, dass gewisse Bezeichnungen eine langwierige Versation erfordern, um sich damit vertraut zu machen, und ausserhalb einer beschränkten Anwendung wieder aufgegeben werden müssen, kann offenbar gegen das Summenzeichen nicht gemacht werden. Denn ausserdem, dass sein Gebrauch nicht erst einzuführen, sondern nur weiter auszudehnen ist, sind die Regeln desselben so leicht zu finden, dass in Ermangelung ihrer geordneten Zusammenstellung einige Ueberlegung beim jedesmaligen Vorkommen hinreichen würde; und Veranlassung, das Summenzeichen aufzugeben, lässt sich nur denken, wo ein Ausdruck aufhört, die Summe einer allgemeinen Anzahl von Gliedern zu sein.

Berlin, den 31. Mai 1845.

5.

Nota sopra l'equazione di una curva del sesto ordine, che s'incontra in un problema riguardante l'ellissi.

(Del Signor *Barn. Tortolini* in Roma.)

(Estratta dalla raccolta scientifica num. 6. an. II.)

Quando si cerchi la natura della linea, alla quale sieno tangenti le rette perpendicolari all'estremità di tutti i diametri di un' ellissi data si giunge a riconoscere che la linea in questione è algebrica, ed appartiene al sesto ordine. Questa curva che nella sua figura ovale poco differisce dall' ellissi è stata in particolar modo considerata da *Legendre* *), il quale avea osservato che dopo la lemniscata era la sola curva algebrica della quale il quadrante potesse rappresentare una funzione ellittica completa di prima specie, mentre che a differenza della lemniscata, un arco indefinito rappresenta una funzione ellittica incompleta di prima specie, ed aumentata di una quantità algebrica. In questi ultimi tempi il sig. *Alf. Serret* in una dotta Memoria **) risolvendo una questione di analisi indeterminata ha dimostrato che si possono trovare una infinità di curve algebriche delle quali gli archi indefiniti rappresentano funzione ellittiche incomplete di prima specie.

Lo scopo di questa breve nota è di far conoscere l'equazione della menzionata curva del sesto ordine fra le sue coordinate rettangolari, equazione che non era stata formata che in una supposizione particolare sopra la scelta di una data ellissi. Per l'intelligenza di quanto verrò ád esporre sarà necessario senza rimettere ad altre Opere, che presenti la risoluzione di tutta la questione, e che si ridurrà a quanto di già accennai da principio.

*) Traité des fonctions elliptiques tom. I. pag. 36.
**) Liouville journal 1845.

Determinare l'equazione della curva alla quale sono tangenti le perpendicolari all' estremità di tutti i diametri di un' ellissi data.

Sieno a, b i semiassi principali di un' ellissi, x, y le coordinate di un suo ponto qualunque con l'origine al centro, avremo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se all' estremità di un raggio r condotto dall' origine ad un punto (x, y) si conduca per lo stesso punto una retta perpendicolare si avrà facilmente per la sua equazione

$$Xx + Yy = x^2 + y^2,$$

ove X, Y, sono le coordinate di un punto qualunque della detta perpendicolare. Onde queste equazioni possano servire alla risoluzione del problema proposto converrà differenziarle rapporto ad x, ed y, e quindi trovare una nuova equazione la quale provenga dall' eliminazione dei differenziali dx, dy. Differenziando si otterrà

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} = 0, \quad (X - 2x)dx + (Y - 2y)dy = 0$$

d'onde risulta

$$a^2yX - b^2xY = 2(a^2 - b^2)xy.$$

L'eliminazione delle coordinate x, y fra l'equazioni dell' ellissi, della perpendicolare, e dell' ultima trovata ci condurrà ad una relazione unica fra le coordinate X, Y, e che apparterrà alla nuova curva domandata.

Riprendiamo per ora le due equazioni lineari rapporto ad X, ed Y, cioè

$$xX + yY = x^2 + y^2$$
$$a^2yX - b^2xY = 2(a^2 - b^2)xy$$

ed eliminando successivamente X, Y, avremo

$$X = \frac{x((a^2-b^2)y^2 + a^2b^2)}{a^2b^2}$$
$$Y = \frac{y((y^2-x^2)a^2 + 2b^2x^2)}{a^2b^2}.$$

Tali sono i valori delle coordinate di un punto qualunque della nuova curva corrispondente ad un punto dell' ellissi. I medesimi valori prendono una forma più semplice introducendovi un' angolo φ, con il quale sia verificata l'equazione dell' ellissi, infatti prendendo nell ellissi

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \operatorname{sen}\varphi$$

otterremo immediatamente

$$X = \frac{\cos\varphi}{a}(a^2 + (a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi)$$

$$Y = \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{b}(b^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi).$$

Queste equazioni che facilmente riduconsi ad altre riportate da *Legendre* *), rappresentano la natura della nuova curva, la quale passa egualmente per i quattro vertici dell' ellissi, ed ove $2a$, $2b$ saranno certamente due assi principali della medesima.

L'equazione fra le coordinate ortogonali si trova dall' eliminazione dell' angolo φ: essa non conterrà che potenze pari di X et Y e sarà come d'altronde è chiaro del tutto simmetrica rapporto alle quantità a, b, X, Y. Come fà osservare *Legendre* l'eliminazione dell' angolo φ si rende facilissima nella supposizione di $a^2 = 2b^2$, e l'equazione della curva fra le coordinate ortogonali prendre un'aspetto semplice: contuttociò la complicazione dell' equazione, che le viene attribuita nel caso generale non mi sembra sussistere quando si presenti sotto una forma che io verrò ad indicare, e che mi è stata suggerita dall' artificio che conviene usare nell' eliminazione dell' angolo φ.

Pongasi per brevità $u = \mathrm{sen}\,\varphi$ e cangiamo X, Y in x, y, avremo dai valori trovati per x, y dopo l'elevazione al quadrato:

$$a^2x^2 = a^4 - a^2(2b^2 - a^2)u^2 - (a^4 - b^4)u^4 - (a^2 - b^2)^2u^6$$

$$b^2y^2 = (2b^2 - a^2)^2u^2 + 2(a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)u^4 - (a^2 - b^2)^2u^6$$

le quali sommate daranno

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^4 - (a^2 - b^2)[2(2b^2 - a^2)u^2 + 3(a^2 - b^2)^2u^4].$$

Se ora si risolva questa equazione di secondo grado rapporto ad u^2, e si cerchi il valore della quantità che trovasi sotto in vincolo radicale, si avra

$$4(a^4 + b^4 - a^2b^2) - 3(a^2x^2 + b^2y^2) = [3(a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2b^2 - a^2]^2 \ldots. \quad (1)$$

I medesimi valori di a^2x^2, b^2y^2 si moltiplichino respettivamente per $9(2b^2 - a^2)$, $9(2a^2 - b^2)$ e si sommino, troveremo facilmente

$$9a^2(2b^2 - a^2)x^2 + 9b^2(2a^2 - b^2)y^2$$

$$= [3(a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi + 2b^2 - a^2]^3 + 4(a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)(2b^2 - a^2)$$

d'onde si ricava

---

*) Traité des fonctions elliptiques tom. I. pag. 37.

$$9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)$$
$$=[3(a^2-b^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi+2b^2-a^2]^3 \;\dots\; (2)$$

Ora fra l'equazioni (1), e (2) è contenuta l'eliminazione del l'angolo φ: infatti elevando la (1) al cubo, e la (2) al quadrato, risulterà immediatamente l'equazione

$$[4(a^4+b^4-a^2b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3$$
$$=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)]^2.$$

Come ognun vede l'equazione è di sesto grado ed è simmetrica rapporto alle quantità a, b, x, y che racchiude, e non contiene che potenze pari di x, ed y: la curva adunque è di sesto ordine, ed il suo quadrante rappresenta una funzione ellittica completa di prima specie. Supponendo poi $a^2=2b^2$ od anche $b^2=2a^2$, si giungerà ad un equazione riportata da *Legendre* *). Il cangiamento che subisce l'equazione in una delle due supposizioni si scorge anche meglio col porre il termine indipendente da x, y nel primo membro sotto una forma, la quale dipende dai due binomi $2a^2-b^2$, $2b^2-a^2$: infatti avendosi

$$4(a^4+b^4-a^2b^2)=6a^2b^2-2(2b^2-a^2)(2a^2-b^2),$$

avremo anche

$$[6a^2b^2-2(2b-a^2)(2a^2-b^2)-3(a^2x^2+b^2y^2)]^3$$
$$=[9a^2(2b^2-a^2)x^2+9b^2(2a^2-b^2)y^2-4(a^2+b^2)(2b^2-a^2)(2a^2-b^2)]^2.$$

Chi volesse presentare l'equazione ordinata secondo le potenze di x, y, potrà essere della forma

$$Aa^6x^6+Bb^6y^6+Ca^4b^2x^4y^2+Db^4a^2x^2y^4+Ea^4x^4$$
$$+Fb^4y^4+Ga^2b^2x^2y^2+Ha^2x^2+Ib^2y^2=K$$

e si avrà

$$A=B=1,\quad C=D=3,$$
$$E=8b^4-a^4-8a^2b^2,$$
$$F=8a^4-b^4-8a^2b^2,$$
$$G=38a^2b^2-20(a^4+b^4),$$
$$H+8b^2[a^4(a^2+b^2)-2b^4(2a^2-b^2)],$$
$$I=8a^2[b^4(a^2+b^2)-2a^4(2b^2-a^2)],$$
$$K=16a^4b^4(a^2-b^2)^2.$$

*) Traité des fonctions elliptiques tom. 2. pag. 591.

Di qui si vede che i primi quattro termini dell' equazione sono evidentemente il cubo del binomio $a^2x^2 + b^2y^2$. Se dalla nuova curva del sesto ordine se ne voglia derivare un' altra come essa è provenuta dall' ellissi e così successivamente si otterrebbe una serie di curve che il Sig. *William Roberts* *) chiama *negative* e per le quali ha dimostrato che la rettificazione delle medesime dipende da funzioni ellittiche di prima, e di seconda specie. In un' altra occasione estenderò queste ricerche per le superficie del secondo ordine come ho fatto per l'ellissi, e porterò differenti equazioni di nuove superficie curve, e che potranno forse essere vantaggiosamente adoprate nella risoluzione di un qualche problema di ordine elevato.

Roma 8. Febr. 1846.

---

*) Liouville journal Mai 1845.

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXXIII. Heft 1.

Fac-simile einer Handschrift von Réaumur.

a paris ce 26e aoust 1755.

ce n'a été, Monsieur, que le 26e de juillet que Mr le comte de Zaluski referendaire de pologne m'a remis votre lettre du 3e avril, remplie de sentiments pour moy dont je suis tres flatté, et dont je ne sçaurois assez vous remercier a mon gré quoique je sache que ceux que j'ai pour vous ne leur cedent en rien. je n'espere gueres plus que vous que Mr Koenig remplisse la tache que vous lui avez donnée d'une physique dans les idées de Mr Wolf, et s'il eust été plus capable que qui que soit de bien executer, mais je lui vois bien des occupations differentes qui l'empescheront de se charger de cette grande entreprise. sa santé est pourtant beaucoup meilleure qu'elle n'a été par le passé; il m'assure en estre tres content dans une lettre que j'ai receue de lui depuis peu

personne ne desireroit plus que moy que la vie de Mr Wolf que vous avez publiée en allemand, parut en françois; . . . .

c'est toujours avec grand plaisir que je vous renouvelle les assurances du parfait et respectueux attachement avec lequel je me fais gloire d'estre

Monsieur

votre tres humble et
tres obeissant serviteur
de Reaumur

6.

Ueber die Bedingung der Integrabilität.

(Von Herrn Dr. *F. Joachimsthal*, Privatdocenten a. d. Universität zu Berlin.)

(Abgedruckt aus dem Osterprogramm 1844 der Königl. Realschule zu Berlin.)

(Im dritten Hefte 31. Bandes dieses Journals befindet sich eine Abhandlung des Herrn Prof. *Raabe* vom September 1844 über denselben Gegenstand. Ich glaube das Prioritätsrecht in Bezug auf das Endresultat jener Arbeit beanspruchen zu können, da ich dasselbe, nebst verwandten Untersuchungen, im Osterprogramm 1844 der Königl. Realschule hieselbst mitgetheilt habe. Wie es mit Schulschriften zu gehen pflegt, so ist wohl auch diese wenig in die Hände der Mathematiker von Fach gekommen, und auch ohne Zweifel nicht in die Hände des Herrn Prof. *Raabe*; einigen wohlwollenden Beurtheilern meiner mathematischen Arbeiten konnte ich sie kurz nach ihrem Erscheinen übergeben, und war deshalb um ihre anderweitige Veröffentlichung weniger bemüht. Sie erscheint hier in einem wörtlichen, von Druckfehlern hoffentlich freieren Abdrucke. Zwei Paragraphen, die den Gang der Untersuchung erläutern dürften, habe ich hinzugefügt. F. Joachimsthal.

Berlin im April 1846.

---

§. 1.

Wenn die partielle Differentiation durch die Characteristik ∂, die vollständige durch d, die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ durch y', $y'' \ldots y^{(n)}$ bezeichnet werden, so heisst der von *Euler* und *Condorcet* aufgestellte Lehrsatz wie folgt:

Ist f eine Function von $x, y', y'', \ldots y^{(n)}$ und $f dx$ das genaue Differential eines Ausdrucks von der $(n-1)$ten Ordnung, ohne eine Relation zwischen x und y zu Hülfe zu nehmen, so muss identisch die Relation

$$(1)\quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)}{dx^2} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^n} = 0,$$

erfüllt werden; und umgekehrt.

Lagrange, der eine Vorlesung in den „Leçons sur le calcul des fonctions" dieser und verwandten Untersuchungen gewidmet hat, schliesst hieraus (was mit der Operation des Differentiirens im Einklange ist), dass in f der höchste Differentialquotient nur linear vorkommen dürfe. Im entgegengesetzten Fall enthielte das letzte Glied der Formel (1.) $\frac{d^n\left(\frac{df}{dy^{(n)}}\right)}{dx}$, und nur dieses die Grösse $y^{(2n)}$,

und der Ausdruck links in (1.), den wir der Kürze wegen beständig mit A bezeichnen wollen, könnte nicht identisch verschwinden. Die Function f muss demnach von der Form $p+qy^{(n)}$ sein, wo p und q Ausdrücke $(n-1)$ter Ordnung sind.

Nach dieser Erörterung betrachtet *Lagrange* die speciellen Fälle $n=1$ und $n=2$. Für den ersten wird (1.)

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}=0;$$

welches die bekannte Bedingung ist, damit $p+q.\frac{dy}{dx}$ ein genaues Differential sei. Für den zweiten Fall verwandelt sich A in einen Ausdruck $P+Qy''$, wo P und Q von der ersten Ordnung sind, und der demnach identisch nur verschwinden kann, wenn $P=0$ und $Q=0$ ist. *Lagrange* schliesst endlich mit den Worten (Leçons s. l. calc. d. fonct, pag. 421.):

„Ensuite on peut aussi prouver, que de même que pour les fonctions du sécond ordre l'équation de condition se décompose en deux, pour les fonctions du troisième ordre elle se décomposera en trois, pour les fonctions du quatrième ordre elle se décomposera en quatre, et ainsi de suite."

Da diese Zerlegung meines Wissens nirgends ausgeführt worden ist, so will ich sie hier mittheilen und zuerst die dabei vorkommende Schwierigkeit erwähnen.

In dem letzten Gliede $\frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^{(n)}}$, was für $f=p+qy^{(n)}$ in $\frac{d^nq}{dx^n}$ übergeht, kommen Ausdrücke $(n-1)$ter Ordnung vor; sowohl alleinstehend, als auch als Coefficienten von $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$ u. s. w. und deren höheren Potenzen und Producten. Aehnlich ist es bei den übrigen Gliedern von A, so dass dieser Ausdruck die Form

$$a+by^{(n)}+cy^{(n+1)}+\ldots.+dy^{(2n-1)}+ey^{(n)2}+fy^{(n)3}+\ldots.+gy^{(n)}y^{(n+1)}+\ldots.,$$

annimmt, wo $a, b, c\ldots.$ von der $(n-1)$ten Ordnung sind, und der identisch nur verschwinden kann, wenn

$$a=0,\ b=0,\ c=0,\ \ldots.\ d=0,\ e=0,\ \ldots.$$

ist. Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen ist aber bei weitem grösser als n, und es ist demnach zu zeigen, wie dieselben auf die von *Lagrange* angegebene Anzahl sich reduciren.

§. 2.

Lehrsatz 1. Wenn f von der Form $p+qy^{(n)}$ ist, so enthält A den Differentialquotienten $y^{(2n-1)}$ nicht, oder ist nur von der $(2n-2)$ten Ordnung.

Wollte man, um A zu finden, die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks berechnen und sie dann, mit gehörigem Zeichen, addiren, so würde man zu fast unübersehbaren Rechnungen kommen. Leichter ersieht man die Zusammensetzung von A, wenn man folgende Reihe von Grössen bildet:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = l \\ \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{dl}{dx} = l_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \dfrac{dl_1}{dx} = l_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{dl^{(n-1)}}{dx} = l_n \end{cases}$$

Offenbar finden hier folgende Gleichungen Statt:

$$l_2 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^2}$$

$$l_3 = \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}\right)}{dx^2} - \frac{d^3\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$l_n = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)}{dx^2} - \dots (-1)^n \frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^n} = A.$$

Da ferner $f = p + qy^{(n)}$ ist, so hat man $l = q$ und

$$l_1 = \frac{\partial(p+qy^{(n)})}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{dq}{dx} = \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} y' - \frac{\partial q}{\partial y} y'' - \dots$$

$$- \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)} - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

$$= \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} y' - \frac{\partial q}{\partial y'} y'' - \dots - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass $y^{(n)}$ in l_1 nicht vorkommt. Man gelangt aber von l_1 zu l_n oder A, wenn man $n-1$ vollständige Differentiationen nach einander macht: mithin ist der höchste in A vorkommende Differentialquotient $y^{(2n-2)}$; wie es behauptet wurde.

Aus dem Werthe von l_1 sieht man, dass die übrigen Grössen l folgende Form annehmen müssen:

$$l_2 = a^{(n-2)} + b^{(n-2)} y^{(n)}$$
$$l_3 = a^{(n-3)} + b^{(n-3)} y^{(n)} + b_1^{(n-3)} y^{(n+1)} + t^{(n-3)}$$
. . . .
$$l_{n-2} = a'' + b'' y^{(n)} + b''_1 y^{(n+1)} + b''_2 . y^{(n+2)} + \dots + b''_{n-4} y^{(2n-4)} + t''$$
$$l_{n-1} = a' + b' y^{(n)} + b'_1 y^{(n+1)} + b'_2 y^{(n+2)} + \dots + b'_{n-4} y^{(2n-4)} + b'_{n-3} y^{(2n-3)} + t'$$
$$l_n = a + b y^{(n)} + b_1 y^{(n+1)} + b_2 y^{(n+2)} + \dots + b_{n-4} y^{(2n-4)} + b_{n-3} y^{(2n-3)} + b_{n-2} y^{(2n-2)} + t,$$

wo die mit a und b bezeichneten Grössen von der $(n-1)$ten Ordnung, die Ausdrücke $t^{(n-3)}, \dots t'', t', t$ aber die Complexen derjenigen Glieder sind, welche $y^{(n)}, y^{(n+1)}$ u. s. w. nicht linear enthalten. Da nun

$$l_n = \frac{\partial(p + q y^{(n)})}{dy} - \frac{dl_{n-1}}{dx},$$

ist, so ist ersichtlich, dass folgende Relationen Statt finden:

$$b_1 = -b' - \frac{\partial b'_1}{\partial x} - \frac{\partial b'_1}{\partial y} y' - \frac{\partial b'_1}{\partial y} y'' - \dots - \frac{\partial b'_1}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$
$$b_2 = -b'_1 - \frac{\partial b'_1}{\partial x} - \frac{\partial b'_2}{\partial y} y' - \frac{\partial b'_2}{\partial y'} y'' - \dots - \frac{\partial b'_2}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$
$$b_{n-3} = -b_{n-4} - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial x} - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial y} y' - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial y'} y'' - \dots - \frac{\partial b_{n-3}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)}$$
$$b_{n-2} = -b'_{n-3}.$$

Sind demnach die Grössen $b_1 . b_2 \dots b_{n-2}$ identisch $= 0$, so ist dasselbe auch mit den Grössen $b', b'_1, b'_2 \dots b'_{n-3}$ der Fall; und unter derselben Voraussetzung ergiebt sich, indem man auf dieselbe Weise rückwärts schliesst:

$$b''_{n-4} = 0,\ b''_{n-5} = 0 \dots b''_2 = 0,\ b''_1 = 0,\ b'' = 0,$$
$$b'''_{n-5} = 0 \dots b'''_2 = 0,\ b'''_1 = 0,\ b''' = 0,$$
. . . .
$$b_2^{(n-4)} = 0,\ b_1^{(n-4)} = 0,\ b^{(n-4)} = 0,$$
$$b_1^{(n-3)} = 0,\ b^{(n-3)} = 0,$$
$$b^{(n-2)} = 0.$$

Was aber die Ausdrücke $t^{(n-3)}, t^{(n-2)}, \dots t', t$ betrifft, so sind die Coefficienten der in ihnen enthaltenen Glieder die partiellen Differentialquotienten der Grössen b nach den Grössen y genommen. So ist z. B.

$$t^{(n-3)} = -y^{n} . \frac{\partial b^{(n-2)}}{dy^{(n-1)}} y^{(n)}$$
$$t^{(n-2)} = -y^{(n)} \left(\frac{\partial b^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial b_1^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n+1)} \right) - \frac{dt^{(n-3)}}{dx}$$
. . . .
$$t = -y^{(n)} \left(\frac{\partial b'}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} + \frac{\partial b'}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n+1)} + \dots + \frac{\partial b'^{(n-3)}}{\partial y^{(n-1)}} y^{(2n-3)} \right) - \frac{dt'}{dx}.$$

Die Complexen t verschwinden also ebenfalls mit den Ausdrücken b und wir haben daher folgenden

Lehrsatz 2. Der Ausdruck

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)}{dx} + \frac{d^2\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\right)}{dx^2} - \dots (-1)^n \frac{d^n\left(\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right)}{dx^n}$$

geht für $f = p + qy^{(n)}$ in die Form

$$a + by^{(n)} + b_1 y^{(n+1)} + \dots b_{n-2} y^{(2n-2)} + t,$$

über, wo $p, q, a, b, b_1 \dots b_{n-2}$ von der $(n-1)$ten Ordnung sind, t aber alle in Bezug auf $y^{(n)}, y^{(n+1)} \dots y^{(2n-3)}$ nicht linearen Glieder enthält; t hat die Eigenschaft, wenn $b_1, b_2, \dots b_{n-2}$ identisch verschwinden, ebenfalls Null zu sein.

Mit Beibehaltung der oben gebrauchten Bezeichnung hat man hieraus den

Lehrsatz 3. Ist $f = p + qy^{(n)}$ eine solche Function von $x, y, y' \dots y^{(n)}$, dass $(p + qy^{(n)})dx$ von selbst integrabel wird, so muss sie den Bedingungen

$$a = 0, \quad b = 0, \quad b_1 = 0, \dots b_{n-2} = 0$$

genügen; und umgekehrt.

Die beiden Lehrsätze enthalten die von *Lagrange* gemeinte Zerlegung der *Euler*schen Formel. Was diese selbst betrifft, so kann sie ähnlicherweise als eine symbolische Formel angesehen werden, wie in der Mechanik das Princip der virtuellen Geschwindigkeit, das die einzelnen Gleichgewichtsbedingungen giebt, wenn man die Coefficienten der unabhängigen Variationen $= 0$ setzt.

§. 3.

Ein System von Gleichungen kann auf verschiedene Weise transformirt werden, ohne dass es seine eigentliche Bedeutung verliert; und so wollen wir an die Stelle der eben angegebenen Bedingungsgleichungen andere von mehr Eleganz setzen. Zu diesem Zwecke bilden wir die nachher noch oft gebrauchten Ausdrücke:

$$(3)\quad \begin{cases} q_1 = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial q}{\partial y}y' - \ldots - \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \\ q_2 = \dfrac{\partial p}{\partial y^{(n-2)}} - \dfrac{\partial q_1}{\partial x} - \dfrac{\partial q_1}{\partial y}y' - \ldots - \dfrac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n-1} = \dfrac{\partial p}{\partial y'} - \dfrac{\partial q_{n-2}}{\partial x} - \dfrac{\partial q_{n-2}}{\partial y}y' - \ldots - \dfrac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \\ q_n = \dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial x} - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y}y' - \ldots - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}, \end{cases}$$

Lehrsatz 4. Finden die n Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \dfrac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}} - \dfrac{\partial q_2}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \dfrac{\partial q}{\partial y^{(n-4)}} - \dfrac{\partial q_3}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial q}{\partial y} - \dfrac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \\ q_n = 0. \end{cases}$$

Statt, so verschwindet A, und $(p + qy^{(n)})\,dx$ ist demnach an und für sich integrabel.

In der That fand sich oben:

$$l_1 = \frac{\partial p}{\partial y^{(n-1)}} - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}y' - \ldots - \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} = q_1.$$

Hieraus folgt:

$$l_2 = \frac{\partial(p+q^{(n)})}{\partial y^{(x-2)}} - \frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial p}{\partial q^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial x} - \frac{\partial q_1}{\partial y}y' - \ldots - \frac{\partial y_1}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + y^{(n)}\left(\frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}}\right)$$

$$= q_2 + y^{(n)}\left(\frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}}\right).$$

Findet die erste der Gleichungen (4) Statt, so reducirt sich l_2 auf q_2 und man findet jetzt ganz ähnlich:

$$l_3 = q_3 + y^{(n)}\left(\frac{\partial q}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-1)}}\right),$$

oder, in Erwägung der zweiten Gleichung, aus (4) $l_3 = q_3$. Fährt man auf diese Weise fort, so gelangt man schliesslich zu

$$A = l_n = q_n + y^{(n)}\left(\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q^{n-1}}{\partial y^{(n-1)}}\right),$$

oder, mit Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen in (4), zu $A = 0$; was zu erweisen war. Es ist nicht schwierig, den Zusammenhang der Gleichungen (4) mit denen des Lehrsatzes (3) zu finden.

Als Beispiel fügen wir die zu dem Falle $n=3$ gehörigen Formeln bei. Hier ist $f=p+qy'''$; p und q sind von der zweiten Ordnung:

$$\frac{\partial p}{\partial q''}-\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}y'-\frac{\partial q}{\partial y'}y''=q_1$$

$$\frac{\partial p}{\partial y'}-\frac{\partial q_1}{\partial x}-\frac{\partial q_1}{\partial y}y'-\frac{\partial q_1}{\partial y'}y''=q_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q_2}{\partial x}-\frac{\partial q_2}{\partial q'}y'-\frac{\partial q_2}{\partial q'}y''=q_3.$$

Die Integrabilitätsbedingungen sind:

$$\frac{\partial q}{\partial y'}-\frac{\partial q_1}{\partial y''}=0$$

$$\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial q_2}{\partial y''}=0$$

$$q_3=0.$$

Für A erhält man den Ausdruck

$$A=q_3+y'''\left\{\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial q_2}{\partial y''}-\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y'}-\frac{\partial q_1}{\partial y''}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y'}-\frac{\partial q_1}{\partial y''}\right)}{\partial y}y'-\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y'}-\frac{\partial q'}{\partial q''}\right)}{\partial y'}y''\right\}$$

$$-y''''\left(\frac{\partial q}{\partial y'}-\frac{\partial q_1}{\partial q''}\right)-y'''^2\,\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial y_1}-\frac{\partial q_1}{\partial y''}\right)}{\partial y''}.$$

Ist $n=4$, oder grösser, so wird A, selbst nach Einführung der Grössen q, ausserordentlich complicirt, während die aus (4) sich ergebenden Bedingungsgleichungen ihre Einfachheit und Symmetrie behalten.

§. 4.

Nach Erledigung dieser Untersuchung, die sich an die erwähnte Stelle der „Leçons" anschliesst, entsteht die schwierigere Frage, ob die gefundenen n Bedingungsgleichungen von einander unabhängig, oder einige Folgen der andern sind. Für Gleichungen, aus welchen die Werthe unbekannter Grössen zu bestimmen sind, lässt sich im Allgemeinen diess immer entscheiden*). Sind z. B. $Z_1=0$, $Z_2=0$, $Z_3=0$ drei nicht unabhängige Gleichungen zwischen den unbekannten Grössen z_1, z_2, z_3, so muss eine Relation von der Form

$$Z_1=\varphi(Z_2,Z_3)$$

Statt finden. Durch Differentiation ergiebt sich:

*) Diess bedarf einer Berichtigung, die ich jedoch nicht hinzufüge, weil sie auf das Nachfolgende ohne Einfluss ist.

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial z_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_1},$$
$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial z_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_2},$$
$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial z_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z}\frac{\partial Z_3}{\partial z_3},$$

und eliminirt man hieraus $\frac{\partial \varphi}{\partial Z_2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial Z_3}$, so erhält man, als Kennzeichen jener Abhängigkeit:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial z_1}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_2}\frac{\partial Z_3}{\partial z_3} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_2}\right) + \frac{\partial Z_1}{\partial z_2}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial z_1} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\frac{\partial Z_3}{\partial z_3}\right)$$
$$+ \frac{\partial Z_1}{\partial z_3}\left(\frac{\partial Z_2}{\partial z_1}\frac{\partial Z_3}{\partial z_2} - \frac{\partial Z_2}{\partial z_2}\frac{\partial Z_3}{\partial z_1}\right) = 0.$$

Derartige Criterien giebt es aber für Bedingungsgleichungen, denen, wie man sich ausdrückt, identisch genügt werden muss, nicht, und es wird daher in jedem Falle einer solchen Untersuchung des besondern Studiums der Bedingungsgleichungen bedürfen. In der That wird man weiter unten sehen, dass von den n Bedingungen des Lehrsatzes (3) oder (4) $\frac{1}{2}(n+1)$ oder $\frac{1}{2}n+1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist, die übrigen nach sich ziehen. So sind für $n=2$ und $n=3$, 2 Bedingungsgleichungen, für $n=1$ und $n=5$ drei Gleichungen genügend. Diese gleiche Anzahl von Bedingungen für zwei aufeinander folgende Werthe von n tritt auch schon früher ein; es ist nämlich nur eine Bedingung erforderlich, wenn f an und für sich integrabel sein soll, f mag die Form $\varphi(y,x)$ oder $\psi(y,x)+y'\chi(y,x)$ haben; das erste Mal nämlich muss $\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$, und im zweiten Falle $\frac{\partial \psi}{\partial y}-\frac{\partial \chi}{\partial x}=0$ sein.

An diese Rechnungen knüpft sich auch die Integration des Ausdrucks $(p+qy^{(n)})dx$, wenn die Bedingungen (4) wirklich erfüllt sind, und hiermit erledigt sich auch eine zweite Untersuchung. Während es keine Schwierigkeit hat, nachzuweisen, dass wenn fdx an und für sich integrabel sein soll, $A=0$ sein muss, lässt sich doch nicht einfach zeigen, dass mit $A=0$, fdx integrabel sei. Der Beweis dieser Umkehrung fällt durch das Folgende von selbst weg, da ein Ausdruck aufgestellt wird, dessen Differential zu fdx wird, wenn $A=0$ erfüllt ist.

§. 5.

Den Fall $\lambda=0$ ausgenommen hat man die Gleichung:

$$(5)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y}y' + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y'}y'' + \dots \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-2)}}y_{(n-1)}\right)}{\partial y_\lambda} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial y_{(\lambda)}}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial y}y'$$

$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_{(\lambda)}}\right)}{\partial y'}y'' + \dots + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda-1)}}$$

oder zufolge (3):

$$(6)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right)}{\partial y^{(\lambda)}} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\lambda}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_{(\lambda)}}\right)}{\partial y}y' + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y_\alpha}\right)}{\partial y'}y'' + \dots$$

$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda)}}\right)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(\lambda-1)}}$$

Für den Ausnahmefall $\lambda = 0$ ist

$$(7)\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y}\right)}{\partial y}y' + \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y}\right)}{\partial y'}y'' + \dots$$

$$+ \frac{\partial\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y}\right)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)}.$$

Man setze

$$(8)\quad \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-\beta-1)}} - \frac{\partial q_\beta}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} = (\alpha, \beta),$$

woraus von selbst folgt:

$$(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha)$$
$$(\alpha, \alpha) = 0,$$

folgt, so erhält man aus der Formel (6), wenn $\beta = n-1$ ausgeschlossen bleibt:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y}y' + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y'}y'' + \dots + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} = \frac{\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} - q_{\alpha+1}\right\}}{\partial y^{(n-\beta-1)}}$$

$$- \frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-\beta-2)}} - \frac{\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\beta-1)}} - q_{\beta+1}\right\}}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} + \frac{\partial q_\beta}{\partial y^{(n-\alpha-2)}},$$

oder

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x} + y'\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y} + y''\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y'} + \dots + y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y^{(n-2)}}$$

$$= -\left(\frac{\partial q_{\alpha+1}}{\partial y^{(n-\beta-1)}} - \frac{\partial q_\beta}{\partial y^{(n-\alpha-2)}}\right) - \left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial y^{(n-\beta-2)}} - \frac{\partial q_{\beta+1}}{\partial y^{(n-\alpha-1)}}\right).$$

Für den Fall $\beta = n-1$ ergiebt sich:

$$\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial x}+y'\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y}+y''\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y'}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$=\frac{\partial\left\{\frac{\partial p}{\partial y^{(n-\alpha-1)}}-q_{\alpha+1}\right\}}{\partial y}-\frac{\left\{\frac{\partial p}{\partial y}-q_n\right\}}{\partial y^{(n-\alpha-1)}}+\frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-\alpha-2)}},$$

oder

$$\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial x}+y'\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y}+y''\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y'}+\ldots+y^{(n+1)}\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$=-\left\{\frac{\partial q_{\alpha+1}}{\partial y}-\frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-\alpha-2)}}\right\}+\frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-\alpha-2)}}.$$

Demnach haben wir für die benachbarten Functionen (α,β), $(\alpha+1,\beta)$, $(\alpha,\beta+1)$ die Gleichungen

$$(9)\quad \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial x}+y'\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y}+y''\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y'}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial y^{(n-2)}}=-(\alpha+1,\beta)$$
$$-(\alpha,\beta+1)\quad\begin{cases}\beta<n-1\\ \alpha<n-1,\end{cases}$$

$$(10)\quad \frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial x}+y'\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y}+y''\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y'}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,n-1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$=-(\alpha+1,n-1)+\frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-\alpha-1)}};\quad \alpha<n-1.$$

erhalten. Da $(\alpha+1,\alpha+1)=0$ ist, so folgt noch aus (9):

$$(11)\quad \frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial x}+y'\frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial y}+y''\frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial y'}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial(\alpha,\alpha+1)}{\partial y^{(n-2)}}$$
$$=-(\alpha,\alpha+2).$$

Mit Hülfe dieser einfachen Formeln findet man, dass sämmtliche Ausdrücke (α,β) oder das System der Grössen

$$\begin{array}{llllll}
(0,1) & & & & & \\
(0,2) & (1,2) & & & & \\
(0,3) & (1,3) & (2,3) & & & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & & & & & \\
(0,n-1) & (1,n-1) & (2,n-1) & \ldots & (n-3,n-1) & (n-2,n-1)
\end{array}$$

verschwindet, sobald

$$(0,1),\ (0,2),\ (0,3)\ \ldots\ (0,n-1),\ q_n$$

verschwinden, oder mit andern Worten: wenn die Integrabilitätsbedingungen des Lehrsatzes (4), welche sich

$$(12)\quad (0,1)=0,\ (0,2)=0,\ (0,3)=0,\ \ldots\ (0,n-1)=0,\ q_n=0$$

schreiben lassen, erfüllt sind.

Es folgt nämlich

vermittelst (11) aus $(0,1)=0$ die Gleichung $(0,2)=0$,

. . . . . . (9) . . . $(0,2)=0$, ... $(0,3)+(1,2)=0$,

. . . . . . (9) . . . $(0,3)=0$, ... $(0,4)+(1,3)=0$,

. . . .

. . . . . . (9) . . . $(0,n-2)=0$, ... $(0,n-1)+(1,n-2)=0$,

. . . . . . (10) . . . $(0,n-2)=0$, ... $-\frac{\partial q_n}{\partial y^{(n-1)}}+(1,n-1)=0$.

Da aber die ersten Theile der gefolgerten Gleichung schon der Voraussetzung nach $=0$ sind, so erhält man

$$(1,2)=0,\ (1,3)=0,\ (1,4)=0\ \ldots,\ (1,n-1)=0.$$

Ganz eben so lässt sich hieraus schliessen:

$(2,3)=0,\ (2,4)=0\ \ldots,\ (2,n-2)=0,\ (2,n-1)=0,$

$(3,4)=0\ \ldots,\ (3,n-2)=0,\ (3,n-1)=0$ und sofort bis

$(n-3,n-2)=0,\ (n-3,n-1)=0$

$(n-2,n-1)=0.$

Das eben gefundene Resultat lässt sich aber auch noch auf eine andere Art aussprechen, welche wir jetzt näher erörtern wollen.

§. 6.

Stellt man sich unter $y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ganz unabhängige Grössen vor, so ist der Differentialausdruck

$$q\partial y^{(n-1)}+q_1\partial y^{(n-2)}+q_2\partial y^{(n-3)}+\ldots+q_{n-1}\partial y$$

das genaue Differential einer Function dieser Grössen, wenn sämmtliche Grössen (α,β) verschwinden. Man kann alsdann n Functionen $F, F_1, F_2 \ldots F_{n-1}$ dergestalt bestimmen, dass, wenn

$$W=F+F_1+F_2+\ldots F_{n-1} \text{ ist,}$$

$$\partial W=q\partial y^{(n-1)}+q_1\partial y^{(n-2)}+q_2\partial y^{(n-3)}+\ldots+q_{n-1}\partial y$$

wird. Die Functionen F finden sich aus den Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}=q,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y^{(n-2)}}=q_1-\frac{\partial F}{\partial y^{(n-2)}},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y^{(n-3)}}=q_2-\frac{\partial(F+F_1)}{\partial y^{(n-3)}},$$

. . . .

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y}=q_{n-1}-\frac{\partial(F+F_1+\ldots F_{n-2})}{\partial y},$$

und die bei jeder Quadratur hinzuzufügende Constante ist hier

Für F eine willkührliche Function von $y, y', \dots y^{(n-3)}, y^{(n-3)}$;
- F_1 - - - - $y, y', \dots y^{(n-3)}$;
- F_2 - - - - $y, y', \dots y^{(n-4)}$;
- F_{n-2} - - - - y;
- F_{n-1} eine Constante.

Es ist nicht schwierig, die Verträglichkeit aller dieser Bestimmungen nachzuweisen; das Einzelne dieses Nachweises wird um so weniger nöthig sein, da es sich in mehreren Schriften findet und in aller Kürze in einer Abhandlung des Herrn Professor *Jacobi* über Differentialgleichungen (In diesem Journal, Bd. 23. S. 94.) auseinandergesetzt ist.

Das Resultat des vorigen Paragraphs lässt sich also auch wie folgt ausdrücken:

Sind die Bedingungen (12) erfüllt, so giebt es eine Function W der n Grössen $y, y', y'' \dots y^{(n-1)}$, deren vollständiges, nach diesen Grössen genommenes Differential

$$= q\partial y^{(n-1)} + q_1\partial y^{(n-2)} + q_2\partial y^{(n-3)} + \dots + q_{n-1}\partial y$$

ist. Von x ist hierbei nie die Rede gewesen, und es wird während der Auffindung von W als Constante betrachtet.

Ist nun W gefunden, so erhält man, wenn die Bedeutung der Grössen $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ als Differentialquotienten wieder aufgenommen und ihre Unabhängigkeit aufgegeben wird, für das vollständige Differential von W:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y}y' + \frac{\partial W}{\partial y'}y'' + \dots + \frac{\partial W}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)} + \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}}y^{(n)},$$

oder, weil

$$\frac{\partial W}{\partial y} = q_{n-1},\quad \frac{\partial W}{\partial y'} = q_{n-2}\ \dots\ \frac{\partial W}{\partial y^{(n-1)}} = q \text{ ist,}$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{\partial W}{\partial x} + q_{n-1}y' + q_{n-2}y'' + \dots + q_1 y^{(n-1)} + qy^{(n)},$$

also

$$\frac{dW}{dx} - (p + qy^{(n)}) = \frac{\partial W}{\partial x} + q_{n-1}y' + q_{n-2}y'' + \dots + q_1 y^{(n-1)} - p.$$

Nennen wir X diesen Werth von $\frac{dW}{dx} - (p+qy^{(n)})$, so lässt sich zeigen, dass X die Grössen $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$ nicht enthält, und also nur eine Function von x allein ist.

In der That erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y} y' + \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y} y'' + \ldots . + \frac{\partial q_1}{\partial y} y^{(n-1)} - \frac{\partial p}{\partial y},$$

und da

$$\frac{\partial W}{\partial y} = q_{n-1}, \; -\frac{\partial p}{\partial y} = -q_n - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial x} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y} y' - \ldots . - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

ist, so wird

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -q_n + y''\left(\frac{\partial q_{n-2}}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y'}\right) + y'''\left(\frac{\partial q_{n-3}}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y''}\right) + \ldots . + y^{(n-1)}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-2)}}\right)$$

$$= -q_n + y''(n-2, n-1) + y'''(n-3, n-1) + \ldots . + y^{(n-1)}(1, n-1);$$

oder da q_n und sämmtliche Grössen $(\alpha, \beta) = 0$ sind, so ist

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 0;$$

d. h. X enthält y nicht. Aehnlich erhält man

$$\frac{\partial X}{\partial y^{(\alpha)}} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y^{(\alpha)}} + \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(\alpha)}} y' + \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(\alpha)}} y'' + \ldots . + \frac{\partial q_1}{\partial y^{(\alpha)}} + q_{n-\alpha} - \frac{\partial p}{\partial y^{(\alpha)}},$$

oder da

$$\frac{\partial W}{\partial y^{(\alpha)}} = q_{n-\alpha-1}$$

und

$$q_{n-\alpha} - \frac{\partial p}{\partial y^{(\alpha)}} = -\frac{\partial q_{n-\alpha-1}}{\partial x} - \frac{\partial q_{n-\alpha-1}}{\partial y} y' - \ldots . - \frac{\partial q_{n-\alpha-1}}{\partial y^{(n-2)}} y^{(n-1)},$$

ist, so hat man

$$\frac{\partial X}{\partial y^{(\alpha)}} = y'(n-1, n-\alpha-1) + y''(n-2, n-\alpha-1) + \ldots . + y^{(n-1)}(1, n-\alpha-1);$$

also aus den oben erwähnten Gründen:

$$\frac{\partial X}{\partial y^{(\alpha)}} = 0;$$

d. h. X enthält auch keinen der Differentialquotienten von y. Hat man demnach W gefunden und X bestimmt, wozu es keiner Integration mehr bedarf, so erhält man

$$p + qy^{(n)} = \frac{dW}{dx} - X,$$

woraus durch eine neue Quadratur

$$\int (p + qy^{(n)}) dx = W - \int X dx;$$

folgt. Eine der Quadraturgränzen ist x selbst. Man sieht also in der That, dass wenn die Integrabilitätsbedingungen (12) erfüllt sind, $p + qy^{(n)}$ das genaue Differential eines andern Ausdrucks ist, nämlich der Grösse $W - \int_a^x X dx$;

und dies giebt zugleich die Rechtfertigung der in Paragraph (4) erwähnten Umkehrung.

§. 7.

Wir kommen jetzt zu der Reduction der *Zahl* der Bedingungsgleichungen, und wollen dabei der Kürze wegen denjenigen Theil des vollständigen Differentials einer Function φ der Grössen $x, y, y', y'', \ldots\, y^{(n-1)}$, welcher selbst die $(n-1)$te Ordnung nicht übersteigt, durch die Characteristik δ bezeichnen, so dass

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)},$$

$$\delta^2\varphi = \delta(\delta\varphi) = \frac{\partial\delta\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y}y' + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y'}y'' + \ldots + \frac{\partial\delta\varphi}{\partial y^{(n-2)}}y^{(n-1)},$$

u. s. w.

ist und dass $\delta^m\varphi$ entsprechenderweise denjenigen Theil von $\frac{d^m\varphi}{dx^m}$ bezeichnet, welcher $y^{(n)}$ und die höhern Differentialquotienten nicht enthält. Man kann alsdann die Gleichungen (9. 10. und 12. §. 5.) wie folgt schreiben:

$$(13)\quad \begin{cases} -\delta(\alpha,\beta) = (\alpha+1,\beta) + (\alpha,\beta+1) \\ -\delta(\alpha, n-1) = (\alpha+1, n-1) + \dfrac{\partial q^n}{\partial y^{(n-\alpha-1)}} \\ -\delta(\alpha, \alpha+1) = +(\alpha, \alpha+2). \end{cases}$$

Man betrachte jetzt der Einfachheit wegen das System von Ausdrücken

$$\begin{array}{ll} (0, 1), & \\ (0, 2) & (1, 2), \\ (0, 3) & (1, 3), \\ (0, 4), & \end{array}$$

von denen die vier der ersten Verticalreihe $=0$ gesetzt die vier ersten der Bedingungsgleichungen geben, aus welchen nachher das Verschwinden der beiden andern von selbst sich ergiebt. Vermöge (13) hat man

$$\begin{array}{lcll} (0,2) = -\delta(0,1) & & (0,1) & \\ (1,2)+(0,3) = -\delta(0,2) & \text{oder} & -\delta(0,1) & (1,2) \\ (1,3)+(0,4) = -\delta(0,3) & & +\delta^2(0,1)-(1,2) & (-\delta(1,2) \\ (1,3) = -\delta(1,2) & & -\delta^3(0,1)+2\delta(1,2). & \end{array}$$

statt der vorhergehenden 6 Ausdrücke (14). Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichung $(0,1)=0$ die zweite $(0,2)=0$ nach sich zieht. Die Gleichung $(0,3)=0$, welche durch das Vorhergehende in $\delta^2(0,1)-(1,2)=0$ verwan-

delt ist, giebt, wenn $(0,1)=0$ ist, auch $(1,2)=0$, und da $(0,4)$ aus $(0,1)$ und $(1,2)$ zusammengesetzt ist, auch $(0,4)=0$. Man sieht also, dass die beiden Gleichungen

$$(0,1)=0,\quad (0,3)=0$$

die beiden andern $(0,2)=0$, $(0,4)=0$ schon in sich begreifen. Andrerseits sieht man aber auch, dass an die Stelle von $(0,1)=0$, $(0,3)=0$, die beiden Gleichungen $(0,1)=0$ und $(1,2)=0$ gesetzt werden können und dass diese Dasselbe leisten. Eben so sind die 12 Ausdrücke

$$\begin{array}{lll} (0,1) & & \\ (0,2) & (1,2) & \\ (0,3) & (1,3) & (2,3) \\ (0,4) & (1,4) & (2,4) \\ (0,5) & (1,5) & \\ (0,6) & & \end{array}$$

identisch mit den folgenden:

$$\begin{array}{lll} (0,1) & & \\ -\delta(0,1) & (1,2) & \\ +\delta^2(0,1)-(1,2) & -\delta(1,2) & (2,3) \\ -\delta^3(0,1)+2\delta(1,2) & +\delta^2(1,2)-(2,3) & -\delta(2,3) \\ +\delta^4(0,1)-3\delta^2(1,2)+(2,3) & -\delta^3(1,2)+2(2,3) & \\ -\delta^5(0,1)+4\delta^3(1,2)-3\delta(2,3), & & \end{array}$$

und eben so wie vorhin werden die Gleichungen

$$(0,1)=0,\ (0,2)=0,\ (0,3)=0,\ (0,4)=0),\ (0,5)=0,\ (0,6)=0,$$

vollständig ersetzt durch die 3 Gleichungen

$$(0,1)=0,\ (0,3)=0,\ (0,5)=0,$$

oder durch die Gleichungen

$$(0.1)=0,\ (1,2)=0,\ (2,3)=0.$$

Es lässt sich allgemein beweisen, dass wenn $m=$ oder $<\frac{1}{2}(n-1)$ ist, die $(m+1)m$ Grössen

$$\begin{array}{c} (m-1,m)\ (m-1,m+1) \\ (m-2,m-1)\ (m-2,m)\ (m-2,m+1)\ m-2,m+2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (1,2)\ \dots\ (1,m-1)(1,m)\ (1,m+1)\ (1,m+2)\ \dots\ (1,2m-1) \\ (0,1)\ (0,2)\ \dots\ (0,m-1)\ (0,m)\ (0,m+1)\ (0,m+2)\ \dots\ (0,2m-1)\dots(0,2m), \end{array}$$

sowohl durch die m Grössen

$$(0,1),\ (0,3)\ \dots\ (0,2m-1)$$

als auch durch die m Grössen

$$(0,1),\ (1,2)\ \dots\ (m-1,m)$$

ausgedrückt werden können, dergestalt, dass die $2m$ Bedingungsgleichungen

$$(0,1)=0,\ (0,2)=0,\ \dots\ (0,2m)=0$$

durch m von ihnen, nämlich durch

$$(0,1)=0,\ (0,3)=0,\ (0,5)=0,\ \dots\ (0,2m-1)=0,$$

oder durch die erste von ihnen und $m-1$ neue, nämlich durch

$$(0,1)=0,\ (1,2)=0,\ (2,3)=0,\ \dots\ (m-1,m)=0$$

durchaus ersetzt werden.

Es lässt sich für $(0,l)$ die Form

$$14)\quad (0,l)=(-1)^{l-1}\{\delta^{l-1}(0,1)-B_1^l\delta^{l-3}(1,2)+B_2^l\delta^{l-5}(2,3)-B_3^l\delta^{l-7}(3,4)+\dots\},$$

annehmen, woraus

$$(0,l-1)=-(-1)^{l-1}\}\delta^{l-2}(0,1)-B_1^{l-1}\delta^{l-4}(1,2)+B^{l-1}\delta_2^{l-6}(2,3)-B_3^{l-1}\delta^{l-8}(3,4)+\dots\}.$$

folgt. Die Grössen B sind von l abhängige, noch zu bestimmende Coefficienten. Die Coefficienten in $(1,l-1)$ werden aber ganz dieselben wie in $(0,l-2)$, also erhält man

$$(1,l-1)=(-1)^{l-1}\{\delta^{l-3}(1,2)-B_1^{l-2}\delta^{l-5}(2,3)+B_2^{l-2}\delta^{l-7}(3,4)-B_3^{l-2}\delta^{l-9}(4,5)+\dots\}.$$

Erinnert man sich jetzt, dass nach der Formel (13)

$$-\delta(0,l-1)=(0,l)+(1,l-1),$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned}&\delta^{l-1}(0,1)-B_1^{l-1}\delta^{l-3}(1,2)+B^{l-1}\delta^{l-5}(2,3)-B_3^{l-1}\delta^{l-7}(3,4)+\dots\\ =\;&\delta^{l-1}(0,1)-B_1^l\delta^{(l-3)}(1,2)+B_2^l\delta^{(l-5)}(2,3)-B_3^l\delta^{l-7}(3,4)+\dots\\ &+\delta^{(l-3)}(1,2)-B_1^{l-2}\delta^{(l-5)}(2,3)+B_2^{l-2}\delta^{l-7}(3,4)-\dots;\end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleichung der Coefficienten ergiebt:

$$\begin{aligned}B_1^l&=B_1^{l-1}+1,\\ B_2^1&=B_2^{l-1}+B_1^{l-1},\\ B_3^l&=B_3^{l-1}+B_2^{l-2},\quad\text{und allgemein}\quad B_k^l=B_k^{l-1}+B_{k-1}^{l-2}.\end{aligned}$$

Ausserdem ist noch zu bemerken, dass $B_k^{2k}=0$, $B^{2k-1}=0$, u. s. w. ist; wie daraus zu ersehen, dass der in (14) zu jedem δ beigefügte Index nie negativ werden darf. Um nun die Grössen B zu finden, wäre die Gleichung

$$\varphi(k,l)=\varphi(k,l-1)+\varphi(k-1,l-2)$$

aufzulösen, und die darin vorkommenden Constanten sind dann so zu bestimmen, dass sie der Gleichung $\varphi(k,2k)=0$ genügen. Man findet ohne Schwierigkeit, wenn

$$(15)\qquad C_m^l=\frac{l(l+1)(l+2)\dots l+m-1)}{1.2.3\dots m}$$

gesetzt wird:

$$B_k^l = C_k^{l-2k},$$

wodurch (14) in folgende Gleichung übergeht:

$$(16)\quad (0,1) = (-1)^{l-1}\Big\{\delta^{l-1}(0,1) - \frac{l-2}{1}\delta^{l-3}(1,2) + \frac{(l-4)(l-3)}{1.2}\delta^{l-5}(2,3) - \frac{(l-6)(l-5)(l-4)}{1.2.3}\delta^{l-7}(3,4) + \dots\Big\}.$$

Für $l = 2m-1$ wird aus (16)

$$(17)\begin{cases}(0,2m-1) = \delta^{2m-2}(0,1) - C_1^{2m-3}\delta^{2m-4}(1,2) + \dots + (-1)^{m-1}C_{m-1}^1(m-1,m)\\ (0,2m) = \delta^{2m-1}(0,1) - C_2^{2m-2}\delta^{2m-3}(1,2) + \dots + (-1)^{m-1}C_{m-1}^2\delta(m-1,m).\end{cases}$$

Es ist wohl zu bemerken, dass in dem Ausdrucke von $(0,2m-1)$ die letzte Grösse $(m-1,m)$ kein δ enthält. Man sieht aus diesem Resultate, *erstlich*, dass die $2m$ Grössen $(0,1)$, $(0,2)$, $(0,3)$ .... $(0,2m)$ durch die m Grössen $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ .... $(m-1,m)$, und *zweitens*, dass auch diese letztern durch die Grössen der ungeraden Stellen $(0,1)$, $(0,3)$, $(0,5)$ .... $(0,2m-1)$ ausgedrückt werden können. Daraus ist aber auch klar, dass es gleich vieler Grössen bedarf, um $(0,1)$, $(0,2)$ .... bis $(0,2m-1)$ oder bis $(0,2m)$ auszudrücken.

Fasst man dies zusammen, so erhält man:

Lehrsatz 5. Wenn die Gleichungen

$$q_n = 0,\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} = 0,\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-4)}} - \frac{\partial q_3}{\partial y^{(n-1)}} = 0,\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-6)}} - \frac{\partial q_5}{\partial y^{(n-1)}} = 0, \dots$$

$$\text{bis } \frac{\partial q}{\partial y'} - \frac{\partial q_{n-2}}{\partial y^{(n-1)}} = 0 \text{ oder } \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial q_{n-1}}{\partial y^{(n-1)}} = 0$$

(jenachdem n ungerade oder gerade ist), Statt finden, so verschwindet der Ausdruck A und die Formel $(p+qy^{(\nu)})dx$ ist an und für sich integrabel.

Lehrsatz 6. Wenn die Gleichungen

$$q_n = 0,\ \frac{\partial q}{\partial y^{(n-2)}} - \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-1)}} = 0,\ \frac{\partial q_1}{\partial y^{(n-3)}} - \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-2)}} = 0,\ \frac{\partial q_2}{\partial y^{(n-4)}} - \frac{\partial q_3}{\partial y^{(n-3)}} = 0, \dots$$

$$\text{bis } \frac{\partial q_{\frac{1}{2}(n-3)}}{\partial y^{\frac{1}{2}(n-1)}} - \frac{\partial q_{\frac{1}{2}(n-1)}}{\partial y^{\frac{1}{2}(n+1)}} = 0, \text{ oder } \frac{\partial q_{\frac{1}{2}n-1}}{\partial y^{\frac{1}{2}n-1}} - \frac{\partial q_{\frac{1}{2}n}}{\partial y^{\frac{1}{2}n}} = 0,$$

(je nachdem n ungerade oder gerade ist), Statt finden, so verschwindet der Ausdruck A und die Formel $p+qy^{(n)}dx$ ist an und für sich integrabel.

In beiden Sätzen ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen $\frac{1}{2}(n+1)$ oder $\frac{1}{2}n+1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Statt wie hier die Integrabilitätsbedingungen aus der *Euler*schen Formel abzuleiten, kann man sie auch direct finden; was wir nicht weiter ausführen.

Zusatz zu dieser Abhandlung.

---

§. 8.

Der Verfasser benutzt die Gelegenheit, die Entwicklungen des letzten Paragraphs noch auf eine übersichtlichere Weise darzustellen.

Es sei (α, β) eine von den beiden Indices α und β abhängige Grösse, welche der Gleichung

$$(18) \qquad f((\alpha,\beta)) = (\alpha,\beta+1) + (\alpha+1,\beta),$$

genügt, wo f das Functionszeichen bedeutet. Bezeichnet man $f(f(z))$ mit $f^2(z)$ u. s. w., und ist $f(u+v) = f(u) + f(v)$, so wird

$$f^2(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta+2) + 2(\alpha+1,\beta+1) + (\alpha+2,\beta)$$

$$f^3(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta+3) + 3(\alpha+1,\beta+2) + 3(\alpha+2,\beta+1) + (\alpha+3,\beta)$$

und allgemein

$$(19)\; f^m(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta+m) + m_1(\alpha+1,\beta+m-1) + m_2(\alpha+2,\beta+m-2) + \dots + (\alpha+m,\beta).$$

In dieser Formel, deren Beweis ich übergehe, stellen m_1, m_2 u. s. w. die Binomialcoefficienten $\frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1.2}$ u. s. w. vor, und der Einfachheit wegen ist, wie auch ferner geschehen soll, $f^m(\alpha,\beta)$ statt $f^m((\alpha,\beta))$ geschrieben.

Die Grössen (α,β) haben die Eigenschaft, dass gewisse Summen derselben, für welche $\alpha+\beta$ einen constanten Werth hat, sich einfach darstellen lassen; z. B. die folgende Summe:

$$(0,m+1) + (1,m) + (2,m-1) + \dots + (m-1,2) + (m,1),$$

oder die scheinbar allgemeinere:

$$(\alpha,\beta+m) + (\alpha+1,\beta+m-1) + (\alpha+2,\beta+m-2) + \dots + (\alpha+m,\beta).$$

Für den Zweck dieser Erläuterungen genügt es, die erstere zu untersuchen.

Ich erinnere, um später nicht unterbrechen zu müssen, an die Formel

$$(20) \qquad m_i - i_1(m-1)_i + i_2(m-2)_i - \dots = 1;\; m \geqq i.$$

Man erhält dieselbe, wenn man die Coefficienten von x_i in den identischen Ausdrücken

$$x^i(1+x)^{m-i} = \{(1+x)-1\}^i(1+x)^{m-i} = (1+x)^m - i_1(1+x)^{m-1} + i_2(1+x)^{m-2} - \dots$$

vergleicht. m und i stellen ganze Zahlen vor. Zufolge (19) ist

$$f^m(0,1) = (0,m+1)+m_1(1,m)+m_2(2,m-1)+m_3(3,m-2)+\ldots+m_2(m-2,3)$$
$$+m_1(m-1,2)+(m,1)$$
$$f^{m-2}(1,2)=(1,m)+(m-2)_1(2,m-1)+(m-2)_2(3,m-2)+\ldots+(m-2)_1(m-2,3)+(m-1,2)$$
$$f^{m-4}(2,3)= \qquad (2,m-1)+(m-4)_1(3,m-2)+\ldots+ \qquad (m-2,3).$$

Ist m eine gerade Zahl, so kommt man zuletzt auf die Gleichung

$$(\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m+1) = (\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}m+1);$$

und ist m ungerade, auf

$$f(\tfrac{1}{2}(m-1), (\tfrac{1}{2}m+1)) = (\tfrac{1}{2}(m-1, \tfrac{1}{2}(m+3)) + (\tfrac{1}{2}(m+1), \tfrac{1}{2}(m+1))$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit

$$1, \; -(m-1)_1, \; +(m-2)_2, \; -(m-3)_3, \ldots.$$

und addirt die Producte, so erhält man das gewünschte Resultat; der letzte Multiplicator wird, wenn m gerade ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}m}(m-\tfrac{1}{2}m)_{\frac{1}{2}m} = (-1)^{\frac{1}{2}m},$$

und wenn m ungerade ist:

$$(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}(m-\tfrac{1}{2}(m-1))_{\frac{1}{2}(m-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\tfrac{1}{2}(m+1)_{\frac{1}{2}(m-1)} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\tfrac{1}{2}(m+1).$$

In der That wird nach vollzogener Addition der Coefficient von $(1,m)$ und von $(m-1, 2)$

$$= m_1 - (m-1)_1 = 1;$$

der Coefficient von $(2, m-1)$ und $(m-2, 3)$ wird

$$m_2-(m-1)_1(m-2)_1+(m-2)_2 = m_2-2(m-1)_2+(m-2)_2 = 1,$$

und allgemein der Coefficient von $(i, m+1-i)$ und $(m-i, i+1)$:

$$m_i-(m-1)_1(m-2)_{i-1}+(m-2)_2(m-4)_{i-2}-\ldots$$
$$=m_i-\frac{i}{1}(m-1)_i+\frac{i.i-1}{1.2}(m-2)_i-\ldots;$$

welcher Ausdruck nach Formel (20) gleich 1 ist; i erlangt höchstens den Werth $\frac{1}{2}m$. Wir haben demnach folgende Summationsformel:

$$(21) \quad (0, m+1) + (1,m) + (2, m-1) + \ldots + (m,1)$$
$$= f^m(0,1) - (m-1)_1 f^{m-2}(1,2) + (m-2)_2 f^{m-4}(2,3) - \ldots$$

Das letzte Glied rechts ist für ein gerades m, $(-1)^{\frac{1}{2}m}(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m+1)$, und für ein ungerades m, $(-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}$, $\frac{1}{2}(m+1)f(\frac{1}{2}(m-1), \frac{1}{2}(m+1))$.

Anmerkung. Genau eben so findet man für den allgemeineren Fall:

$$(\alpha,\beta+m)+(\alpha+1,\beta+m-1)+(\alpha+2,\beta+m-2)+\dots+(\alpha+m,\beta)$$
$$=f^m(\alpha,\beta)-(m-1)_1 f^{m-2}(\alpha+1,\beta+1)+(m-2)_2 f^{m-4}(\alpha+2,\beta+2)-\dots.$$

Setzt man z. B. $(\alpha,\beta)=x^\alpha y^\beta$, so ist

$$(x+y)(\alpha,\beta)=x^\alpha y^{\beta+1}+x^{\alpha+1}y^\beta=(\alpha,\beta+1)+(\alpha+1,\beta).$$

Die Function f stellt demnach hier die Multiplication mit $x+y$ vor, und man hat zufolge der vorigen Formel:

$$x^\alpha y^{\beta+m}+x^{\alpha+1}y^{\beta+m-1}+x^{\alpha+2}y^{\beta+m-2}+\dots+x^{\alpha+m}y^\beta$$
$$=(x+y)^m x^\alpha y^\beta-(m-1)_1(x+y)^{m-2}x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+\dots;$$

oder, wenn man durch $x^\alpha y^\beta$ dividirt:

$$\frac{y^{m+1}-x^{m+1}}{y-x}=(x+y)^m-(m-1)_1(x+y)^{m-2}xy+(m-2)_2(x+y)^{m-4}x^2y^2-\dots$$

Zur Verification kann der Fall $y=e^{v\sqrt{-1}}$, $x=e^{-v\sqrt{-1}}$ dienen. Für denselben erhält man die bekannte Formel:

$$\frac{\sin(m+1)v}{\sin v}=(2\cos v)^m-\frac{m-1}{1}(2\cos v)^{m-2}+\frac{m-2.m-3}{1.2}(2\cos v)^{m-4}-\dots$$

§. 9.

Haben die Grössen (α,β) die Eigenschaft, durch Vertauschung der Indices das Zeichen zu ändern, oder der Gleichung

$$(22)\qquad (\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)=0;$$

zu genügen, und wird $f(z)$ mit z gleichzeitig $=0$, so vereinfacht sich die Formel (21). Die Glieder

$$(1,m)+(2,m-1)+\dots+(m-1,2)+(m,1)$$

heben sich wechselseitig auf, und wenn ein mittleres Glied $(\frac{1}{2}m,\frac{1}{2}m)$ vorkommt, muss es zufolge (22) ebenfalls verschwinden. Man erhält demnach unter obigen Annahmen, welche von jetzt ab fortbestehen sollen:

$$(23)\ (0,m+1)=f^m(0,1)-(m-1)_1 f^{m-2}(1,2)+(m-2)_2 f^{m-4}(2,3)-(m-3)_3 f^{m-6}(3,4)+\dots,$$

oder, um die beiden Fälle für ein gerades und für ein ungerades m besser hervortreten zu lassen:

$$(24)\begin{cases}(0,2\mu+1)=f^{2\mu}(0,1)-\frac{2\mu-1}{1}f^{2\mu-2}(1,2)+\frac{2\mu-2.2\mu-3}{1.2}f^{2\mu-4}(2,3)-\dots\\ \qquad\qquad+(-1)^\mu(\mu,\mu+1)\\ (0,2\mu+2)=f^{2\mu+1}(0,1)-\frac{2\mu}{1}f^{2\mu-1}(1,2)+\frac{2\mu-1.2\mu-2}{1.2}f^{2\mu-3}(2,3)-\dots\\ \qquad\qquad+(-1)^\mu(\mu+1)f(\mu,\mu+1);\end{cases}$$

Z. B.

$$\begin{array}{ll}
(0,1) = (0,1), & (0,4) = f^3(0,1) - 2f(1,2), \\
(0,2) = f(0,1), & (0,6) = f^4(0,1) - 3f(1,2) + (2,3), \\
(0,3) = f^2(0,1) - (1,1), & (0,6) = f^5(0,1) - 4f^2(1,2) + 3f(2,3) \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Aus den Formeln (24) und den danach gebildeten Beispielen sieht man, dass dieselben Grössen

$$(25) \qquad (0,1),\ (1,2),\ (2,3) \ldots\ldots (\mu, \mu+1)$$

nöthig sind, um $(0, 2\mu+1)$ und $(0, 2\mu+2)$ auszudrücken. Die Grössen (25) stellen überhaupt die Glieder der Reihe

$$(26) \qquad (0,1),\ (0,2),\ (0,3)\ (0,4) \ldots\ldots (0, 2\mu+1)\ (0, 2\mu+2)$$

durch Ausdrücke dar, in welchen sie selbst und ihre Ableitungen, vermittelst der Function f, auf lineäre Weise vorkommen; und da $f(0) = 0$ angenommen ist, so folgt aus dem Verschwinden der Grössen (25) auch das der Grössen (26).

Aber die Glieder der Reihe (25) lassen sich auch durch die Glieder der ungeraden Stellen der Reihe (26), d. h. durch

$$(27) \qquad (0,1),\ (0,3),\ (0,5) \ldots\ldots (0, 2\mu+1)$$

ausdrücken. Das System Gleichungen, welches die Abhängigkeit der Grössen (27) und (25) bestimmt, hat die Eigenschaft, dass jede folgende Gleichung eine neue Unbekannte enthält, die mit dem Coefficienten ± 1 multiplicirt ist. Ein solches System von Gleichungen lässt sich ohne Zweideutigkeit auflösen. Demnach werden die Grössen (25) durch die Grössen (27) und ihre Ableitungen auf lineare Weise dargestellt; und also auf dieselbe Art auch die Grössen (26), deren eine Hälfte die Glieder (27) sind. Verschwinden daher in der Reihe (26) die Glieder von ungeraden Ordnungen, so ist es auch mit den übrigen der Fall.

Können die Indices α und β nur die Werthe bis $n-1$ durchlaufen, so finden alle aufgestellten Formeln noch Statt, so lange die Indices die gesetzmässigen Grenzen nicht überschreiten; so z. B. gilt die Formel (23) nur für $m \leqq n-2$. Die Grössen

$$(28) \qquad (0,1),\ (0,2),\ (0,3) \ldots\ldots (0, n-1)$$

vertreten dann die Reihe (26), wenn $n-1$ gerade ist; oder die Reihe (26), mit Auslassung des letzten Gliedes, wenn $n-1$ ungerade ist. Die vorstehenden Erörterungen erhalten dann folgende Aussage:

Die Glieder der Reihe (28) lassen sich als lineäre Ausdrücke

$$\left.\begin{array}{l}\text{der Grössen } (0,1),\ (1,2),\ (2,3)\ \ldots\ (\tfrac{1}{2}(n-3),\tfrac{1}{2}(n-1))\\ \qquad\text{oder } (0,1),\ (0,3),\ (0,5)\ \ldots\ (0,\ n-2)\end{array}\right\}\quad (29)\quad \text{wenn } n \text{ ungerade ist;}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{und der Grössen } (0,1),\ (1,2),\ (2,3)\ \ldots\ (\tfrac{1}{2}(n-2),\tfrac{1}{2}n)\\ \qquad\text{oder } (0,1),\ (0,3),\ (0,5)\ \ldots\ (0,\ n-1)\end{array}\right\}\quad (30)\quad \text{wenn } n \text{ gerade ist,}$$

und ihrer Ableitungen vermittelst der Function f darstellen. Verschwinden sämmtliche Glieder einer Reihe (29) oder (30), je nachdem n gerade oder ungerade ist, so werden auch sämmtliche Glieder der Reihe (28) gleich 0.

Diese Principien sind es, welche der vorangeschickten Abhandlung zu Grunde liegen. In §. 3. wird gezeigt, dass die bekannte Bedingung der Integrabilität in n andere zerfällt, wenn $p + q.\frac{d^n y}{dx^n}$ ein genaues Differential sein soll, nämlich in

$$q_n = 0$$

$$\text{und}\qquad (0,1) = 0,\ (0,2) = 0,\ (0,3) = 0,\ \ldots\ (0,\ n-1) = 0.$$

In Bezug auf die Grössen (0,1) u. s. w. wird eine Gleichung (9) von der Form

$$f(\alpha,\beta) = (\alpha,\beta+1) + (\alpha,\beta+1)$$

aufgestellt, wo ausserdem

$$(\alpha,\beta) + (\beta,\alpha) = 0$$

ist. Die Function f wird in diesem Falle die negative Summe gewisser Differential-Coefficienten, und die Lehrsätze (5 und 6) sind nichts anders als der zuletzt aufgestellte Satz über die Reihe von Grössen (28).

7.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im vorigen Heft.)

III.

§. 16.

Bei der Fortsetzung dieser Untersuchungen nehmen wir nun hauptsächlich auf *Anwendungen* Rücksicht; wozu sich die bisher gefundenen Resultate benutzen lassen werden. Vor allem gewähren die in (§. 9.) aufgestellten Gleichungen eine weit verbreitete, bisher nicht gemachte Anwendung; welche hier gezeigt werden soll. Ueberall nämlich, wo die Summenausdrücke der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen auftreten, finden auch die in (§. 8. und 9.) aufgestellten Sätze ihre Geltung, und hiedurch eine Reihe von Problemen der Analysis ihre Auflösung, die zum Theil bis jetzt nicht, zum Theil nicht in dieser Allgemeinheit gegeben wurde. Schon *Kramp* hat darauf (Anal. d. réfr. Pg. 81.) aufmerksam gemacht, ohne jedoch die hergehörigen Gesetze aufzustellen.

Wir wollen zuerst die in (§. 8. und 9.) gefundenen Gesetze auf die Erhebung der Polynomien in Potenzen anwenden. Es ist bekanntlich

$$1)\qquad P = \frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$$

Nun ist, wie aus der Analysis bekannt:

$$2)\quad P^n = \left(\frac{1}{x}\,\mathrm{Log}\,\frac{1}{1-x}\right)^n = 1 + \frac{SC(1,2\dots n)^1}{n+1}x + \frac{SC(1,2\dots n+1)^2}{(n+1)^{2|1}}x^2 + \frac{SC(1,2\dots n+2)^3}{(n+1)^{3|1}}x^3 \dots$$
$$\dots + \frac{SC(1,2\dots n+r-1)^r}{(n+1)^{r|1}}x^r \pm \dots$$

Werden die erforderlichen Werthe aus (10. §. 9.) in (2) gesetzt und die nöthigen Ausscheidungen gemacht, so ergiebt sich:

$$3)\quad P^n = 1 + \frac{n}{1^{2|1}}x + \frac{3(n+2)-1}{4.1^{3|1}}nx^2 + \frac{(n+3)^{2|-1}n}{2.24}x^3$$
$$+ \frac{15(n+4)^3-30(n+4)^2+5(n+4)+2}{48.1^{5|1}}nx^4$$
$$+ \frac{3(n+5)^4-10(n+5)^3+5(n+5)^2+2(n+5)}{16.1^{6|1}}n.x^5$$

Hieraus findet sich unmittelbar, wenn $-n$ statt n gesetzt wird:

$$4)\quad P^{-n} = 1 - \frac{n}{1^{2|1}}x + \frac{3(n-2)+1}{4.1^{3|1}}nx^2 - \frac{(n-3)^{2|1}}{2.1^{4|1}}nx^3$$
$$+ \frac{15(n-4)^3+30(n-4)^2+5(n-4)-2}{48.1^{5|1}}nx^4$$
$$- \frac{3(n-5)^4+10(n-5)^3+5(n-5)^2-2(n-5)}{16.1^{6|1}}nx^5$$
. . . .

Aus diesem Ausdruck und aus (8. §. 9.) ergiebt sich:

$$5)\quad P^{-n} = 1 - \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^1}{n-1}x + \frac{SC(1,2,\ldots n-2)^2}{(n-1)^{2|1}}x^2 - \frac{SC(1,2,\ldots n-3)^3}{(n-1)^{3|1}}x^3 + \ldots$$
$$\ldots (-)^r \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^r}{(n-1)^{r|-1}}x^r.$$

Aus (2. und 5.) ergiebt sich ein nicht zu übersehender Zusammenhang zwischen den Summenausdrücken der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen, wenn sie bei Erhebung der Polynomien auf Potenzen benutzt werden. Aus (3. und 4.) erhält man folgende Entwicklungen für die Erhebung des vorliegenden Polynomiums zu einer Potenz mit gebrochenem Exponenten:

$$6)\quad P^{\frac{n}{m}} = 1 + \frac{nx}{1^1 m} + \frac{3(n+2m)-m}{4.1^{3|1}m^2}nx^2 + \frac{(n+3m)^{2|-m}}{2.1^{4|1}m^3}nx^3$$
$$+ \frac{15(n+4m)^3-30(n+4m)^2m+5(n+4m)^2+2m^3}{48.1^{5|1}m^4}nx^4$$
$$+ \frac{3(n+5m)^4-10(n+5m)^3m+5(n+5m)^2m^2-2(n+5m)m^3}{16.1^{6|1}m^5}nx^5$$
. . . .

$$7)\quad P^{-\frac{n}{m}} = 1 - \frac{n}{1^{2|1}m}x + \frac{3(n-2m)+m}{1^{4|1}m^2}nx^2 - \frac{(n-3m)^{2|+m}}{2.1^{4|1}m^3}nx^3$$
$$+ \frac{15(n-4m)^3+30(n-4m)^2m+5(n-4m)m^2-2m^3}{48.1^{5|1}m^4}nx^4$$
$$+ \frac{3(n-5m)^4+10(n-5m)^3m+5(n-5m)^2m^2-2(n-5m)m^3}{16.1^{6|1}m^5}nx^5$$
. . . .

Nun ist, wie ferner aus der Analysis bekannt:

$$8)\quad P^n = (1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots)^n$$
$$= P'(sn)^n + P'(s(n+1))^n x + P'(s(n+2))^n x^2 + \ldots\ P'((sn+r))^n x^r + \ldots$$
$$(1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \ldots),$$

wenn $P'(sn)^n$, $P'(s(n+1))^n$, $P'(s(n+2))^n$, ... die Summen der Versetzungen mit Wiederholungen in der $n$ten Classe zu den Summen n, $n+1$, $n+2$, ... aus den untergeschriebenen Elementen bezeichnen. Hieraus und aus (2) findet sich noch eine neue Art der Bildung der Verbindungen ohne Wiederholungen. Diesen Gleichungen zu Folge kann man nämlich die Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Versetzungen mit Wiederholungen zu bestimmten Summen ableiten. Es ist

$$9)\quad \frac{SC(1,2,3,\ldots(n+r-1)^r}{(n+1)^{r|1}} = P'(s(m+r);\ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots)^n$$

oder

$$10)\quad SC(1,2,3,\ldots n+r-1)^r = (n+1)^{r|1} P'(s(m+r);\ 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots)^n.$$

§. 17.

Eine weitere Anwendung ist die Erhebung des Polynomiums

$$1)\quad P = x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots = e^x - 1$$

zur $n$ten Potenz. Die Analysis giebt (S. d. Journ. 13ter Bd. S. 292 u. ff. §. 47.),

$$2)\quad P^n = (e^x - 1)^n = SC'(1,2,\ldots n)^0 x^n + \frac{SC'(1,2,\ldots n)^1 x^{n+1}}{n+1} + \frac{SC'(1,2,\ldots n)^2 x^{n+2}}{(n+1)^{2|1}} + \ldots$$
$$\ldots \frac{SC'(1,2,\ldots n)^r x^{n+r}}{(n+1)^{r|1}} + \ldots$$

Werden hier die angezeigten Werthe aus (§. 9.) eingeführt, so erhält man:

$$3)\quad P^n = x^n(1 + \frac{n}{1.2}x + \frac{3n+1}{4.1^{3|1}} nx^2 + \frac{n^{2|1}}{1^{2|1}.1^{4|1}} nx^3$$
$$+ \frac{15n^3+30n^2+5n-2}{48.1^{5|1}} nx^4$$
$$+ \frac{3n^4+10n^3+5n-2n}{16.1^{6|1}} nx^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots)$$

$$3)\quad P^{-n} = \frac{1}{x^n}\Big(1 - \frac{n}{2}x + \frac{3n-1}{4.1^{3|1}}nx^2 - \frac{n^{2|1}}{1^{2|1}.1^{4|1}}nx^3 + \frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48.1^{5|1}}nx^4 - \frac{3n^4-10n^3+5n^2+2n}{16.1^{6|1}}nx^5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big)$$

Der besondere Fall, wenn in (4.) $n=1$ ist, giebt die *Bernoullischen* Zahlen. Aus (2. und 4.) ist also auch

$$5)\; P^{-n} = (e^x-1)^{-n} = \frac{1}{x^n}\Big(1 - \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^1}{n-1}x + \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^2}{(n-1)^{2|-1}}x^2 - \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^3}{(n-1)^{3|-1}}x^3 + \ldots \;\ldots(-1)^r\frac{SC(1,2,\ldots n-1)^r}{(n-1)^{r|-1}}x^r \ldots\Big)$$

Für einen gebrochenen Exponenten ist

$$6)\quad P^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n}{m}}\Big(1 + \frac{n}{2m}x + \frac{3n+m}{1^{4|1}m^2}nx^2 + \frac{n^{2|m}}{2.1^{4|1}m^3}nx^3 + \frac{15n^3+30n^2m+5nm^2-2m^3}{48.1^{5|1}m^4}nx^4 + \frac{3n^4+10n^3m+5n^2m-2nm}{16.1^{6|1}m^5}nx^5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big)$$

$$7)\quad P^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}}\Big(1 - \frac{nx}{2m} + \frac{3n-m}{1^{4|1}m^2}nx^2 - \frac{n^{2|-m}}{2.1^{4|1}m^3}nx^3 + \frac{15n^3-30n^2m+5nm^2+2m^3}{48.1^{5|1}m^4}nx^4 + \frac{3n^4-10n^3m+5n^2m^2+2nm^3}{10.1^{6|1}m^5}nx^5 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\Big)$$

§. 18.

Es lässt sich auch die $n$te Potenz des Polynomiums

$$1)\quad Q = 1 + 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots = 1 + e^x$$

darstellen. Es ist aus (1. §. 17.)

$$2)\quad Q^n = (2 + (e^x - 1))^n = (2 + P)^n$$

also auch

$$3)\quad Q^n = 2^n + n.2^{n-1}P^1 + (n)_2 2^{n-2}P^2 + (n)_3 P^3 + \ldots$$

Für diese Darstellung sind nur die positiven Potenzen von P nöthig. Benutzt man die Gleichung (1. §. 17.) und setzt dort der Reihe nach 1, 2, 3, ... statt n, so ergiebt sich:

$$4)\quad Q^n = 2^n + n.2^{n-1}\left(x + \frac{SC'(1)^1}{2}x^2 + \frac{SC'(1)^2}{2.2}x^3 + \frac{SC'(1)^3}{2.3.4}x^4 + \ldots\right)$$

$$+ (n)_2 2^{n-2}\left(x^2 + \frac{SC'(1,2)^1}{3}x^3 + \frac{SC'(1,2)^2}{3.4}x^4 + \frac{SC'(1,2)^3}{3.4.5}x^4 + \ldots\right)$$

$$+ (n)_3 2^{n-3}\left(x^3 + \frac{SC'(1,2,3)^1}{4}x^4 + \frac{SC'(1,2,3)^2}{4.5}x^5 + \frac{SC'(1,2,3)^3}{4.5.6}x^6 + \ldots\right)$$

. . . .

Wird dieser Ausdruck nach den Potenzen von x geordnet, so ergiebt sich:

$$5)\quad Q^n = 2^n + n.2^{n-1}x + (n.2^{n-1}SC'(1)^1 + n^{2|-1}.2^{n-2})\frac{x^2}{1^{2|1}}$$

$$+ [n.2^{n-1}SC'(1)^2 + n^{2|-1}2^{n-2}SC'(1,2)^1 + n^{3|-1}2^{n-3}]\frac{x^3}{1^{3|1}}$$

$$+ [n.2^{n-1}SC'(1) + n^{2|-1}2^{n-2}SC'(1,2)^2 + n^{3|-1}2^{n-3}SC'(1,2,3)^1 + n^{4|-1}.2^{n-4}]\frac{x^4}{1^{4|1}}$$

. . . .

Die Vorzahl des $(r+1)$ten Gliedes hat folgende Gestalt:

$$6)\quad A_r = n.2^{n-1}\frac{SC'(1)^{r-1}}{2^{r-1|1}} + (n)_2.2^{n-2}\frac{SC'(1,2)^{r-2}}{3^{r-2|1}} + (n)_3.2^{n-3}\frac{SC'(1,2,3)^{r-3}}{4^{r-3|1}} + \ldots$$

$$\ldots + (n)_r.2^{n-r}\frac{SC'(1,2,\ldots r)^0}{(r+1)^0}.$$

Scheidet man die Facultät, welche in dem Nenner der Glieder vorkommt, aus, und führt die Zahlenwerthe für die vorstehenden Symbole nach (§. 9., 8. und 25.) ein, so bekommt das $(r+1)$te Glied folgende Form:

$$7)\quad A_r.x^r = [n.2^{n-1} + n^{2|-1}2^{n-2}(2^{r-1}-1)$$

$$+ \frac{n^{3|-1}.2^{n-3}}{1^{2|1}}(3^{r-1} - 2.2^{r-1} + 1)$$

$$+ \frac{n^{4|-1}.2^{n-4}}{1^{3|1}}(4^{r-1} - 3.3^{r-1} + 3.2^{r-1} - 1)$$

. . . .

$$+ n^{r-3|-1}2^{n-r+3}.\frac{(r-3)^{2|1}}{1^{2|1}}.\frac{r^{4|-1}}{1^{4|1}}$$

$$+ n^{r-2|-1}2^{n-r+2}.\frac{3(r-2)+1}{4}.\frac{(r-2)^{3|1}}{1^{3|1}}$$

$$+ n^{r-1|-1}2^{n-r+1}.\frac{(r-1)^{2|1}}{1^{2|1}}$$

$$+ n^{r|-1}2^{n-r}]\frac{x^r}{1^{r|1}}.$$

Die Gleichung (6.) gilt für ein positives und negatives, ganzes und gebrochenes n. Sie giebt für unsern Zweck folgende Ausdrücke:

16*

$$8)\quad (1+e^x)^n = 2^n + n.2^{n-1}x + (n.2^{n-1} + n^{2|-1}2^{n-2})\frac{x^2}{1^{2|1}}$$
$$+ (n.2^{n-1} + n^{2|-1}.2^{n-2}.3 + n^{3|-1}2^{n-3})\frac{x^3}{1^{3|1}}$$
$$+ (n.2^{n-1} + n^{2|-1}.2^{n-2}.7 + n^{3|-1}.2^{n-3}.6 + n^{4|-1}.2^{n-4})\frac{x^4}{1^{4|1}}$$
$$+ (n.2^{n-1} + 15.n^{2|-1}.2^{n-2} + 25.n^{3|-1}.2^{n-3} + 10n^{4|-1}.2^{n-4} + n^{5|-1}2^{n-5})\frac{x^5}{1^{5|1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$9)\quad \frac{1}{(1+e^x)^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{nx}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + \frac{n^{2|1}}{2^2}\right)\frac{x^2}{1^{2|1}}$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(\frac{-n}{2} + \frac{3n^{2|1}}{2^2} - \frac{n^{3|1}}{2^3}\right)\frac{x^3}{1^{3|1}}$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(\frac{-n}{2} + \frac{7n^{2|1}}{2^2} - \frac{6n^{3|1}}{2^3} + \frac{n^{4|1}}{2^4}\right)\frac{x^4}{1^{4|1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

$$10)\quad (1+e^x)^{\frac{n}{m}} = 2^{\frac{n}{m}}\Big[1 + \frac{n}{m.2}x + \left(\frac{n}{m.2} + \frac{n^{2|-m}}{2^2m^2}\right)\frac{x^2}{1^{2|1}}$$
$$+ \left(\frac{n}{2m} + \frac{3n^{2|-m}}{2^2.m^2} + \frac{n^{3|-m}}{2^3m^3}\right)\frac{x^3}{1^{3|1}}$$
$$+ \left(\frac{n}{2m} + \frac{7n^{2|-m}}{2^2m^2} + \frac{6n^{3|-m}}{2^3m^3} + \frac{n^{4|-m}}{2^4m^4}\right)\frac{x^4}{1^{4|1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$11)\quad (1+e^x)^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{m}}}\Big[1 - \frac{nx}{2m} + \left(-\frac{n}{2m} + \frac{n^{2|m}}{2^2m^2}\right)\frac{x^2}{1^{2|1}}$$
$$+ \left(-\frac{n}{2m} + \frac{3n^{2|m}}{2^2m^2} - \frac{n^{3|m}}{2^3m^3}\right)\frac{x^3}{1^{3|1}}$$
$$+ \left(-\frac{n}{2m} + \frac{7.n^{2|m}}{2^2m^2} - \frac{6n^{3|m}}{2^3m^3} + \frac{n^{4|m}}{2^4m^4}\right)\frac{x^4}{1^{4|1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\Big]$$

Vergleicht man die Ausdrücke in (§. 16. bis 18.) mit denen, welche die Analysis bisher gab, so wird man die Vortheile wahrnehmen, welche die in (§. 8. und 9.) gefundenen Resultate gewähren. Die Ausdrücke lösen nämlich auf eine eben so einfache als allgemeine Weise Probleme auf, welche durch lange Abhandlungen noch nicht auf befriedigende Weise gelöset waren. Die Resultate, welche bisher gefunden wurden, standen unter sich isolirt und erstreckten sich entweder nur auf ein positives, oder auf ein negatives n. Dabei wurde gewöhnlich nur eine zurücklaufende Bildungsart ermittelt. Ausdrücke für gebrochene Exponenten waren ausgeschlossen. Entwickelte Ausdrücke, welche die Erhebung der genannten Polynomien in Potenzen bisher gaben,

sind mir nicht bekannt. Deswegen habe ich sie hier mitgetheilt. Wäre auch mit den in (§. 16. bis 18.) gefundenen Resultaten der Umfang der Anwendbarkeit der in (§. 8. und 9.) gefundenen Gleichungen geschlossen, so würde auch dies schon genügen, um die Wichtigkeit jener Gleichungen hervorzuheben. Dies ist jedoch nicht der Fall. Ihre Anwendbarkeit findet auch noch in der Differenzenrechnung und bei den Functionen Statt, die ich mit dem Namen Aufstufungen bezeichnet habe; wie im Folgenden gezeigt werden soll.

§. 19.

Bekanntlich lässt sich der *Unterschied* einer Function durch *Differentiale* dieser Function darstellen. Bei dieser Darstellung sind die Summenausdrücke der Verbindungen mit Wiederholungen nöthig (S. 12ter Bd. d. Journ. S. 333.). Die Gleichung, auf welche die Differenzenrechnung führt, ist

$$1)\quad \Delta^n x = \frac{\partial^n x(\Delta x)^n}{(\partial x)^n} + \frac{SC'(1,2,\ldots n)^1}{n+1}\,\frac{\partial^{n+1}x}{(\partial x)^{n+1}}(\Delta x)^{n+1} + \frac{SC'(1,2,\ldots n)^2}{(n+1)^{2|1}}\,\frac{\partial^{n+2}x}{(\partial x)^{n+2}}(\Delta x)^{n+2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{SC'(1,2,\ldots n)^r}{(n+1)^{r|1}}\cdot\frac{\partial^{n+r}x}{(\partial x)^{n+r}}(\Delta x)^{n+r} + \ldots$$

Unter X wird jede beliebige Function von x verstanden. Dieser Ausdruck gilt also für die Entwicklung der Unterschiede der Functionen überhaupt. Werden nun die angezeigten Werthe aus (§. 9.) in (1.) eingeführt, so erhält man ganz allgemein:

$$2)\quad \Delta^n X = \frac{\partial^{n+1}X}{(\partial x)^{n+1}}(\Delta x)^n + \frac{n}{2}\,\frac{\partial^{n+1}X}{(\partial x)^{n+1}}(\Delta x)^{n+1} + \frac{3n+1}{1^{4|1}}\,n\,.\,\frac{\partial^{n+2}X}{(\partial x)^{n+2}}(\Delta x)^{n+2}$$
$$+ \frac{n^{2|1}\,.\,n}{2\,.\,1^{4|1}}\,\frac{\partial^{n+3}X}{(\partial x)^{n+3}}(\Delta x)^{n+3}$$
$$+ \frac{15n^3+30n^2+5n-2}{48\,.\,1^{5|1}}\,n\,.\,\frac{\partial^{n+4}X}{(\partial x)^{n+4}}(\Delta x)^{n+4}$$
$$+ \frac{3n^4+10n^3+5n-2n}{16\,.\,1^{6|1}}\,n\,.\,\frac{\partial^{n+5}X}{(\partial x)^{n+5}}(\Delta x)^{n+5}$$
$$+ \frac{63n^5+315n^4+315n^3-91n-42n+16}{144\,.\,1^{6|1}}\,n\,.\,\frac{\partial^{n+6}X}{(\partial x)^{n+5}}(\Delta x)^{n+6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Reihe bricht ab, wenn eines der höhern Differentiale in 0 übergeht. Der Ausdruck ist, wie gesagt, ganz allgemein; er gilt nicht nur für ein positives, sondern auch für ein negatives n, und kann sogar auf ein gebrochenes n ausgedehnt werden, wenn man dafür eine Bedeutung findet. Es ist zunächst

$$3)\quad \Delta^{-n}X = \frac{\partial^{-n}X}{(\partial x)^{-n}}(\Delta x)^{-n} - \frac{n}{2}\cdot\frac{\partial^{-n+1}X}{(\partial x)^{-n+1}}(\Delta x)^{-n+1} + \frac{3n-1}{1^{4|1}}n\frac{\partial^{-n+2}X}{(\partial x)^{-n+2}}(\Delta x)^{-n+2}$$
$$-\frac{n^{2|-1}}{2.1^{4|1}}.n.\frac{\partial^{-n+3}X}{(\partial x)^{-n+3}}(\Delta x)^{-n+3}$$
$$+\frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48.1^{5|1}}n\frac{\partial^{-n+4}X}{(\partial x)^{-n+4}}(\Delta x)^{-n+4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Erwägt man, dass negative Differentiale den positiven gegenüber in demselben Verhältnisse stehen, wie die positiven Unterschiede den negativen gegenüber, und dass sie also Integrale bedeuten, so lässt sich aus (3.) auch folgende Formel ableiten:

$$4)\quad \Delta^{-n}X = \frac{1}{(\Delta x)^n}\int^n X(\partial x)^n - \frac{n}{2(\Delta x)^{n-1}}\int^{n-1}X(\partial x)^{n-1} + \frac{(3n-1)n}{1^{4|1}(\Delta x)^{n-2}}\int^{n-2}X(\partial x)^{n-2}$$
$$-\frac{n^{2|-1}n}{2.1^{4|1}(\Delta x)^{n-3}}\int^{n-3}X(\partial x)^{n-3}$$
$$+\frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48.1^{5|1}(\Delta x)^{n-4}}n\int^{n-4}X(\partial x)^{n-4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier ist $\int^0 = 1$ und die Integrale gehen wieder in Differentiale über, wenn der Exponent des Integralzeichens negativ wird. Man kann nun in die Gleichungen (2. bis 5.) statt n sogar eine gebrochene Zahl setzen und erhält dann folgende Ausdrücke:

$$5)\quad \Delta^{\frac{n}{m}}X = \frac{\partial^{\frac{n}{m}}X}{(\partial x)^{\frac{n}{m}}}(\Delta x)^{\frac{n}{m}} + \frac{n}{2m}\frac{\partial^{\frac{n}{m}+1}X}{(\partial x)^{\frac{n}{m}+1}}(\Delta x)^{\frac{n}{m}+1} + \frac{2n+m}{1^{4|1}m^2}n.\frac{\partial^{\frac{n}{m}+2}X}{(\partial x)^{\frac{n}{m}+2}}(\Delta x)^{\frac{n}{m}+1}$$
$$+\frac{n^{2|m}.m}{1^{3|1}.1^{4|1}.m^3}\frac{\partial^{\frac{n}{m}+3}X}{(\partial x)^{\frac{n}{m}+3}}(\Delta x)^{\frac{n}{m}+3}$$
$$+\frac{15n^3+30n^2m+5nm^2-2m^3}{48.1^{5|1}m^4}n.\frac{\partial^{\frac{n}{m}+4}X}{(\partial x)^{\frac{n}{m}+4}}(\Delta x)^{\frac{n}{m}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$6)\quad \Delta^{-\frac{n}{m}}X = \frac{\partial^{-\frac{n}{m}}X}{(\partial x)^{-\frac{n}{m}}(\Delta x)^{\frac{n}{m}}} - \frac{n}{2m}.\frac{\partial^{-\frac{n}{m}+1}X}{(\partial x)^{-\frac{n}{m}+1}(\Delta x)^{\frac{n}{m}-1}} + \frac{3n-m}{1^{4|1}m^2}n.\frac{\partial^{-\frac{n}{m}+2}X}{(\partial x)^{-\frac{n}{m}+3}(\Delta x)^{\frac{n}{m}-2}}$$
$$-\frac{n^{2|-m}}{2.1^{4|1}m^3}.n\frac{\partial^{-\frac{n}{m}+3}X}{(\partial x)^{-\frac{n}{m}+3}(\Delta x)^{\frac{n}{m}-3}}$$
$$+\frac{15n^3-30n^2m+5nm^2+2m^3}{48.1^{5|1}m^4}n\frac{\partial^{-\frac{n}{m}+4}X}{(\partial x)^{-\frac{n}{m}+4}\Delta^{\frac{n}{m}-4}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hierdurch sind *formell* die Werthe für $\Delta^{\frac{n}{m}}X$ und $\Delta^{-\frac{n}{m}}X$ dargestellt. Was aber die Bedeutung des Unterschiedes einer Function mit gebrochenen, positiven oder negativen Exponenten sei, geht daraus nicht hervor, während doch die entwickelten Darstellungen der Unterschiede mit gebrochenen Exponenten möglich sind. Diese Darstellungen werden immer dann möglich sein, wenn $\partial^{\frac{n}{m}}X$ und $\partial^{-\frac{n}{m}}X$ möglich ist. Durch Aufsuchen eines allgemeinen Gesetzes, welches die vorstehenden Ausdrücke in sich fasst, wird die Aufgabe gelöset werden, und es entsteht die Frage, welche Bedeutung und Anwendung die auf dem angegebenenem Wege gefundenen Resultate erhalten werden, oder können?

Wenden wir die in (1 bis 6) gegebenen Formeln, welche für alle Functionen gelten, auf einen besondern Fall an und wählen wir dazu $X = x^p$, so ergiebt sich aus (2.), da $\frac{\partial^r x^p}{(\partial x)^r} = p^{r|-1} x^{p-1}$ ist, folgender entwickelte Ausdruck für den $n$ten Unterschied einer Potentialfunction:

$$7)\quad \begin{aligned}\Delta^n x^p = {} & p^{n|-1} x^{p-n} (\Delta x)^n + \frac{n}{1} . p^{n+1|-1} x^{p-n-1} (\Delta x)^{n+1} \\ & + \frac{3n+1}{1^{4|1}}\, n . p^{n+2|-1} x^{p-n-2} (\Delta x)^{n+2} \\ & + \frac{n^{2|1} n}{2.1^{4|1}} p^{n+3|-1} x^{p-n-3} (\Delta x)^{n+3} \\ & + \frac{15n^3+30n^2+5n-2}{48.1^{6|1}}\, n p^{n+4|-1} x^{p-n-4} (\Delta x)^{n+4} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck für ein positives und negatives, ganzes und gebrochenes n gilt, so ergiebt sich daraus

$$8)\quad \begin{aligned}\Delta^{-n} x^p = {} & \frac{p^{-n|-1} x^{p+n}}{(\Delta x)^n} - \frac{n}{2} . \frac{p^{-n+1|-1} x^{p+n-1}}{(\Delta x)^{n-1}} + \frac{3n-1}{1^{4|1}}\, n . \frac{p^{-n+2|-1} x^{p+n-2}}{(\Delta x)^{n-2}} \\ & - \frac{n^{2|-1} . n}{2.1^{4|1}} . \frac{p^{-n+3|-1} x^{p+n-3}}{(\Delta x)^{n-3}} \\ & + \frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48.1^{6|1}}\, n . \frac{p^{-n+4|-1} x^{p+n-4}}{(\Delta x)^{n-4}} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Für ein gebrochenes n erhält man:

$$9)\quad \Delta^{\frac{n}{m}} x^p = \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{n}{m}} \Big[p^{\frac{n}{m}|-1} x^p + \frac{n}{2m} \cdot p^{\frac{n}{m}+1|-1} x^{p-1} \Delta x$$
$$+ \frac{3n+m}{1^{4|1} m^2} n . p^{\frac{n}{m}+2|-1} x^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$+ \frac{n^{2|m} . n}{2 . 1^{4|1} m^3} \cdot p^{\frac{n}{m}+3|-1} x^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \Big]$$

$$10)\quad \Delta^{-\frac{n}{m}} x^p = \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^{\frac{n}{m}} \Big[\frac{x^p}{(p+\frac{n}{m})^{\frac{n}{m}|-1}} - \frac{n . p^{-\frac{n}{m}+1|-1}}{2 . m} x^{p-1} \Delta x$$
$$+ \frac{3n-m}{1^{4|1} m^2} . n . p^{-\frac{n}{m}+2|-1} x^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$- \frac{n^{2|-m} . n}{2 . 2^{4|1}} n . p^{\frac{n}{m}+3|-1} x^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$+ \frac{15n^3 - 30n^2 m + 5nm^2 + 2m^3}{48 . 1^{5|1}} np^{-\frac{n}{m}+4|-1} x^{p-4} (\Delta x)^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \Big]$$

Alle in (9. und 10.) angezeigten Operationen sind ausführbar; also wird sich auch der Werth von $\Delta^{\frac{n}{m}} x^p$ und $\Delta^{-\frac{n}{m}} x^p$ darstellen lassen, und es kann sich daher, wie bemerkt, nur um seine Bedeutung und Anwendung handeln. Der weitere Erfolg unserer Untersuchungen wird Gelegenheit zur Anwendung geben.

Die Formel (8.) lässt sich auch so geben:

$$11)\quad \Delta^{-n} x^p = \frac{p^{-n|-1} x^{p+n}}{(\Delta x)^n} - \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^1}{n-1} \cdot \frac{p^{-n+1|-1} x^{p+n-1}}{(\Delta x)^{n-1}}$$
$$+ \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^2}{(n-1)^{2|-1}} \cdot \frac{p^{-n+2|-1} x^{p+n-2}}{(\Delta x)^{n-2}}$$
$$- \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^3}{(n-1)^{3|-1}} \cdot \frac{p^{-n+3|-1} x^{p+n-3}}{(\Delta x)^{n-3}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ein specieller Fall der Gleichung (4., 8. oder 11.), wenn nämlich $n=1$ gesetzt wird, ist bekannt. In diesem Falle entstehen die *Bernoulli*schen Zahlen. Nennt man der Reihe nach diese Zahlen (auch diejenigen nicht ausgeschlossen, welche auf 0 führen) A_1, A_2, A_3 ...., so erhält man:

$$12)\quad \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^1}{n-1} = A_1,\quad \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^2}{(n-1)^{2|-1}} = A_2,\quad \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^3}{(n-1)^{3|-1}} = A_3 \ldots.$$
$$\ldots.\ \frac{SC(1,2,\ldots n-1)^r}{(n-1)^{r|-1}} = A_r,$$

wenn in der entwickelten Darstellung von $\frac{SC(1,2,\ldots n-1)^r}{(n-1)^{r|-1}}$ $n = 1$ gesetzt wird.

Hiezu dienen die Ausdrücke (9., 10., 16. §. 9.) und es zeigt sich, dass die *Bernoulli*schen Zahlen nur ein besonderer Fall der Summenausdrücke sind, welche von den Verbindungen ohne Wiederholungen zu der 1ten, 2ten, 3ten, 4ten .... Classe gelten; wie es die Gleichung (12.) zeigt.

Der eben berührte Fall, wenn in (4.) $n=1$ gesetzt wird, soll hier noch hervorgehoben werden, da er später zu weitern Anwendungen dienen wird. Es ist

$$13)\quad \Delta^{-1}X = \frac{1}{\Delta x}\int X\partial x + \tfrac{1}{2}X + \frac{1}{12}\,\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\Delta x - \frac{1}{120}\cdot\frac{\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}(\Delta x)^3 + \frac{1}{252}\cdot\frac{\partial^5 X}{1.2\ldots5(\partial x)^5}(\Delta x)^5 - \frac{1}{240}\cdot\frac{\partial^7 X}{1.2\ldots7(\partial x)^7}(\Delta x)^7 \ldots$$

§. 20.

Ausser den Anwendungen im vorigen Paragraph ergiebt sich noch eine andere für die Darstellung der Aufstufung einer Function durch ihre Differentiale. In der Differenzen-Rechnung (11ter Bd. d. Journ. S. 185. §. 17. und 20.) ist gezeigt worden, dass folgende Gleichung gilt:

$$1)\quad \zeta^{\pm n}X = \left(1 + e^{\frac{\Delta x.\partial}{\partial x}}\right)^{\pm n} X,$$

wenn X eine Function von x ist. Nun ist hier oben in (§. 18.) die Entwicklung des Binomiums

$$Q^n = (1 + e^x)^n$$

für ein positives und negatives, ganzes und gebrochenes n gegeben. Werden die entsprechenden Werthe in die dortigen Resultate eingeführt, so ergiebt sich unmittelbar für die positive und negative Aufstufung einer Function durch ihre Differentiale Folgendes:

$$2)\quad \zeta^{n} X = 2^{n} X + n.2^{n-1}\frac{\partial X}{\partial x}\Delta x$$
$$+ (n.2^{n-1} + n^{2|-1}.2^{n-2})\frac{\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}(\Delta x)^2$$
$$+ (n.2^{n-1} + 3n^{2|-1}.2^{n-2} + 2^{n-3}.n^{3|-1}2^{n-3})\frac{\partial^3 X}{1^{3|1}(\partial x)^3}(\Delta x)^3$$
$$+ (n.2^{n-1} + 7.n^{2|-1}.2^{n-2} + 6n^{3|-1}2^{n-3} + n^{4|-1}2^{n-4})\frac{\partial^4 X}{1^{4|1}(\partial x)^4}(\Delta x)^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3)\quad \zeta^{-n} X = \frac{X}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}\Delta x$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + \frac{n^{2|1}}{2^2}\right)\frac{\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}(\Delta x)^2$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + 3.\frac{n^{2|1}}{2^2} - \frac{n^{3|1}}{2^3}\right)\frac{\partial^3 X}{1^{3|1}(\partial x)^3}(\Delta x)^3$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + \frac{7.n^{2|1}}{2^2} - \frac{6.n^{3|1}}{2^3} + \frac{n^{4|1}}{2^4}\right)\frac{\partial^4 X}{1^{4|1}(\partial x)^4}(\Delta x)^4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4)\quad \zeta^{\frac{n}{m}} X = 2^{\frac{n}{m}}\Big(X + \frac{n}{2m}\cdot\frac{\partial X}{\partial x}\Delta x$$
$$+ \left(\frac{n}{2m} + \frac{n^{2|-m}}{2^2 m^2}\right)\frac{\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}(\Delta x)^2$$
$$+ \left(\frac{n}{2m} + \frac{3.n^{2|-m}}{2^2 m^2} + \frac{n^{3|-m}}{2^3 m^3}\right)\frac{\partial^3 X}{1^{3|1}(\partial x)^3}(\Delta x)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big)$$

$$5)\quad \zeta^{-\frac{n}{m}} X = \frac{1}{2^{\frac{n}{m}}}\Big[X - \frac{n}{2m}\,\frac{\partial X}{(\partial x)^2}\Delta x$$
$$+ \left(\frac{-n}{2m} + \frac{n^{2|m}}{2^2 m^2}\right)\frac{\partial^2 X}{1.2(\partial x)^2}(\Delta x)^2$$
$$+ \left(\frac{-n}{2m} + \frac{3n^{2|m}}{2^2 m^2} - \frac{n^{3|m}}{2^3 m^3}\right)\frac{\partial^3 X}{1^{3|1}(\partial x)^3}(\Delta x)^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\Big]$$

Ist $n = 1$, so ergiebt sich aus (3.):

$$6)\quad \zeta^{-1} X = \frac{x}{2} - \frac{\partial X}{4\partial x}\Delta x + \frac{1}{8}\cdot\frac{\partial^3 X}{1.2.3(\partial x)^3}(\Delta x)^3 - \frac{1}{4}\,\frac{\partial^5 X.(\Delta x)^5}{1.2.3.4.5(\partial x)^5}$$
$$+ \frac{17}{16}\,\frac{\partial^7 X}{1^{7|1}(\partial x)^7}(\Delta x)^7 \ldots\ldots$$

Hieraus folgt das allgemeine Gesetz für die positiven und negativen Aufstufungen der Potentialfunctionen mittels der Gleichung

$$\frac{\partial^r x^p}{(\partial x)^r} = p^{r|-1} x^{p-r}$$

unmittelbar. Es ist nämlich

$$6) \quad \zeta^n x^p = 2^n x^p + n.2^{n-1} p x^{p-1} \Delta x$$
$$+ (n.2^{n-1} + n^{2|-1} 2^{n-2})(p)_2 x^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$+ (n.2^{n-1} + 3n^{2|-1} 2^{n-2} + n^{3|-1} 2^{n-3})(p)_3 x^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$+ (n.2^{n-1} + 7.n^{2|-1} 2^{n-2} + 6n^{3|-1}.2^{n-3} + n^{4|-1}.2^{n-4}(p)_4 x^{p-4} (\Delta x)^4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$7) \quad \zeta^{-n} x^p = \frac{x^p}{2^n} - \frac{n.px^{p-1}}{2^{n+1}} \Delta x + \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + \frac{n^{2|1}}{2^2}\right)(p)_2 x^{p-2} (\Delta x)^2$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + 3\frac{n^{2|1}}{2^2} - \frac{n^{3|1}}{2^3}\right)(p)_3 x^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$+ \frac{1}{2^n}\left(-\frac{n}{2} + \frac{7n^{2|1}}{2^2} - \frac{6n^{3|1}}{2^3} + \frac{n^{4|1}}{2^4}\right)(p)_4 x^{p-4} (\Delta x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Es ist jetzt nicht schwierig, die Aufstufungen für gebrochene Exponenten zu finden. Specielle Fälle ergeben sich aus den obigen Darstellungen leicht. Der Fall, wenn in (7.) $n = 1$ gesetzt wird, ist zu bemerken. Es findet sich für die erste negative Abstufung von x^p:

$$8) \quad \zeta^{-1} x^p = \frac{x^p}{2} - \frac{1}{4} p x^{p-1} \Delta x$$
$$+ \frac{1}{8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3$$
$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{p(p-1)\dots(p-4)}{1.2\dots5} x^{p-5} (\Delta x)^5$$
$$+ \frac{17}{16} \frac{p(p-1)\dots(p-6)}{1.2\dots6} x^{p-6} (\Delta x)^7$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Die Vorzahlen der Glieder dieser Reihe stehen den *Bernoulli*schen Zahlen zur Seite, und die vorstehende Reihe hat bei Summirung der Potenzenreihen, deren Glieder *abwechselnde* Zeichen haben, dieselbe Bedeutung, wie die Reihe von *Bernoulli* für die Summirung der Potenzenreihen, deren Glieder *einerlei* Zeichen haben. Die in diesem und dem vorhergehenden

Paragraph gefundenen Resultate sind für die Rechnung mit Differenzen wichtig. Die Entwicklungen von $\Delta^n X$ und $\Delta^{-n} X$, so wie von $\zeta^n X$ und $\zeta^{-n} X$ wurden sonst immer getrennt behandelt. Es waren daher eine Menge von Operationen zur Darstellung der isolirten Fälle nöthig, die hier zusammen ihre Erledigung finden. Wenn auch Methoden angegeben wurden, wie man zu diesen Entwicklungen gelangen könne, so fehlten doch immer die entwickelten Ausdrücke, die oben mitgetheilt sind. Hievon kann man sich überzeugen, wenn man die hierher gehörigen Schriften, u. a. Traité d. calc. diff. et intég. p. *Lacroix* T. III. etc. nachsieht. Das allgemeine Gesetz der Aufstufungen, welches ich schon früher (im 11ten Bd. d. Journ.) zu finden mich bemühte, ergiebt sich hier und bringt, wie bei den Unterschieden, alle nöthigen Entwicklungen auf eine allgemeine und einfache Basis zurück.

IV.

§. 21.

Die in (19. und 20.) aufgestellten Gleichungen geben ein Mittel an die Hand, den natürlichen Logarithmen einer Facultät auszudrücken. Es ist

$$1)\quad \lg x^{n+1|d} = \lg x + \lg(x+d) + \lg(x+2d) \ldots \lg(x+nd).$$

Nach der Differenzenrechnung (S. d. Journ. 14ter Bd. S. 262 u. ff.) ist

$$2)\quad X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-1} X.$$

Setzt man nun $X_0 = \lg x$, $X_1 = \lg(x+d)$, $X_2 = \lg(x+2d)$ u. s. w. $X^n = \lg(x+nd)$, so erhält man, mit Rücksicht auf (1. u. 2. und §. 19., 12.):

$$\begin{aligned}\lg x^{n+1|d} &= \Delta^{-1}\lg(x+(n+1)d) - \Delta^{-1}\lg x\\ &= \int \frac{\lg(x+(n+1)d)}{d}\,dx - \int \frac{\lg x}{d}\,\partial x\\ &\quad - \frac{\lg(x+(n+1)d)}{2} + \frac{\lg x}{2}\\ &\quad + \frac{d}{12}\cdot\frac{\partial \lg(x+(n+1)d)}{\partial x} - \frac{d}{12}\,\frac{\partial \lg x}{\partial x}\\ &\quad - \frac{d^3}{120}\cdot\frac{\partial^3 \lg(x+(n+1)d)}{1.2.3(\partial x)^3} + \frac{d^3}{120}\cdot\frac{\partial^3 \lg x}{1.2.3(\partial x)^3}\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Nach Ausführung der angezeigten Operationen ergiebt sich, wenn $n-1$ statt n gesetzt wird, folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}3)\quad \lg x^{n|d} &= \frac{x+nd}{d}\lg(x+nd) - \frac{x+nd}{d} - \frac{x\lg x}{d} + \frac{x}{d}\\ &\quad - \frac{\lg(x+nd)}{2} + \frac{\lg x}{2}\\ &\quad + \frac{d}{12(x+nd)} - \frac{d}{12.x}\\ &\quad - \frac{d^3}{360.(x+nd)^3} + \frac{d^3}{360.x^3}\\ &\quad + \frac{d^5}{1260(x+nd)^5} - \frac{d^5}{1260x^5}\\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

In dieser Gleichung hat der letzte Factor der Facultät die Form $x+(n-1)d$. Man kann nun, um Uebereinstimmung auf beiden Seiten hervorzubringen, $\lg(x+nd)$ hinzuzählen. Dann geht (3.) über in:

$$4)\quad \lg x^{n+1|d} = \frac{x+nd}{d}\lg(x+nd) - \frac{x+nd}{d} - \frac{x\lg x}{d} + \frac{x}{d}$$
$$+\tfrac{1}{2}\lg(x+nd) \qquad +\tfrac{1}{2}\lg x$$
$$+\frac{d}{12(x+nd)} \qquad -\frac{d}{12x}$$
$$-\frac{d^3}{360(x+nd)^3} \qquad +\frac{d^3}{360x^3}$$
$$+\frac{d^5}{1260(x+nd)^5} \qquad -\frac{d^5}{1260x^5}$$

Die Darstellung des Logarithmen einer Facultät beruht nach (3. und 4.) auf zwei Reihen, deren Glieder in (3.) unter sich correspondiren. Die Glieder der zweiten Reihe werden aus denen der ersten abgeleitet, wenn man $n=0$ setzt und ihnen entgegengesetzte Zeichen giebt. Die Glieder der Reihen in den Gleichungen (3. und 4.) stehen, mit Ausnahme des dritten, in dem nämlichen Zusammenhange. Diese Reihen sollen nun der Kürze wegen durch folgende Zeichen angedeutet werden:

$$5)\quad \lg x^{n|d} = R\left(\frac{x+nd}{d}\right) - R\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$6)\quad \lg x^{n+1|d} = F\left(\frac{x+nd}{d}\right) - R\left(\frac{x}{d}\right).$$

Der Zusammenhang zwischen beiden Gleichungen ist

$$7)\quad \lg x^{n+1|d} = \lg(x+nd) + R\left(\frac{x+nd}{d}\right) - R\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$8)\quad \lg x^{n|d} = F\left(\frac{x+nd}{d}\right) - \lg(x+nd) - R\left(\frac{x}{d}\right).$$

Die Werthberechnung des Logarithmen einer Facultät hängt demnach von der *Convergenz* der in den vorstehenden Gleichungen enthaltenen Reihen ab. Die Reihen convergiren sehr stark, wenn x oder $x+nd$ der Zunahme gegenüber eine nicht ganz unbedeutende Zahl ist, und dann wird der gesuchte Werth leicht gefunden. Bei Facultäten von der Form $x^{n|d}$, wo x, n und d ganze Zahlen sind, wird die erste Reihe immer stark convergiren. Ist aber die Zunahme 1 und der Grundfactor 1, wie es gewöhnlich der Fall ist, so convergiren die Glieder der zweiten Reihe nicht sehr stark, und es ist gerade für diesen Fall wichtig, den Werth der zweiten Reihe zu finden; so wie überhaupt schon aus dem Grunde, dass nach (13. §. 11.) jede Facultät von der vorliegenden Form auf eine andere gebracht werden kann, deren Basis und

Zunahme die Einheit ist. Um nun diesen Werth zu ermitteln, setzen wir in (4.) $n-1$ statt n, $d=1$ und $x=1$. Dies giebt

$$9)\quad \lg 1^{n|1} = n \lg n - n + \tfrac{1}{2}\lg n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} + \dots - R(1).$$

Ist hier n unendlich gross, so verschwinden die Glieder in $R(n)$ vom vierten an und es wird, wenn man diesen Werth von n, wie früher durch α bezeichnet:

$$10)\quad \lg 1^{\alpha|1} = \alpha . \lg \alpha - \alpha + \tfrac{1}{2}\lg \alpha - R(1),$$

$$11)\quad F(\alpha) = (\alpha+\tfrac{1}{2}) \lg \alpha - \alpha,$$

oder anders:

$$12)\quad 1^{\alpha|1} = \frac{\alpha^\alpha . \sqrt{\alpha}}{e^\alpha . e^{R(1)}}.$$

Nehmen wir nun die Gleichung (34. §. 13.) zu Hülfe und setzen dort r gleichfalls unendlich gross, so erhalten wir, mit Rücksicht auf (29. §. 12.):

$$\frac{1^{\alpha|1} . 1^{\alpha|1}}{\sqrt{\alpha}} . 2^{2\alpha} = \sqrt{\pi} . 1^{2\alpha|1}.$$

Werden die Facultäten dieser Gleichung nach (12.) behandelt, und wird in (12.), wegen $1^{2\alpha|1}$, 2α statt α gesetzt, so findet sich

$$\frac{\alpha^\alpha \sqrt{\alpha}}{e^\alpha e^{R(1)}} \times \frac{\alpha^\alpha \sqrt{\alpha}}{e^\alpha . e^{R(1)}} . \frac{2^{2\alpha}}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\pi} . \frac{(2\alpha)^{2\alpha} \sqrt{2\alpha}}{e^{2\alpha} . e^{R(1)}}.$$

Hieraus ist

$$13)\quad \frac{1}{e^{R(1)}} = \sqrt{2\pi},$$

oder

$$14)\quad -R(1) = \tfrac{1}{2}\lg(2\pi).$$

Demnach ist aus (9.)

$$15)\quad \lg 1^{n|1} = (n+\tfrac{1}{2}) \lg n - n + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \dots$$

Ist nun der Werth von $R(1)$ gefunden, so lassen sich durch ihn die Werthe von $R_{(2)}$, $R_{(3)}$ .... leicht berechnen. Es ist nämlich

$$(x+nd)^{p|d} = \frac{x^{n|d}(x+nd)^{p|d}}{x^{n|d}} = \frac{x^{n+p|d}}{x^{n|d}},$$

also auch

$$\lg (x+nd)^{p|d} = \lg x^{n+p|d} - \lg x^{n|d}.$$

Werden die beiden ersten Ausdrücke dieser Gleichung nach (5.) behandelt, so ergiebt sich

$$16)\quad R\left(\frac{x+nd}{d}\right) = R\left(\frac{x}{d}\right) + \lg x^{n|d}.$$

Wird hierin $x=1$, $z-1$ statt n und $d=1$ gesetzt, so ist nach (14.):

$$17)\quad R(z) = R(1) + \lg 1^{z-1|1} = -\tfrac{1}{2}\lg(2\pi) + \lg 1^{z-1|1}.$$

Aus dieser Gleichung können leicht die oben bemerkten Werthe berechnet werden.

Wird der Logarithme einer Facultät von der Form $x^{n|-d}$ verlangt, so nehmen die Gleichungen (3. — 6.) folgende Gestalt an:

$$18)\quad \lg x^{n|-d} = R\left(\frac{x-nd}{-d}\right) - R\left(\frac{x}{-d}\right),$$

$$19)\quad \lg x^{n+1|-d} = F\left(\frac{x-nd}{-d}\right) - R\left(\frac{x}{-d}\right).$$

Danach wird sich die Werthbestimmung ausführen lassen, und zwar ohne Schwierigkeiten, so lange $(x-(n-1)d)$ positiv bleibt. Man kann in diesem Falle die Facultät auch umkehren und so darstellen:

$$x^{n|-d} = (x-(n-1)d)(x-(n-2)d)\ldots\ldots(x-d)x.$$

Dann tritt in (3.) $x-(n-1)d$ an die Stelle von x und x an die Stelle von $x+nd$.

Werden aber einzelne Glieder in $x^{n|-d}$ negativ., so kann man zur Vermeidung der Logarithmen negativer Grössen, die Facultät so umformen, dass sich erkennen lässt, ob sie einen positiven oder negativen Werth bekomme, und darauf die Facultät in dieser veränderten Gestalt berechnen. Hiebei kann es kommen, dass eine der Gleichungen (3. und 4.) wiederholt angewendet werden muss.

Die bisher gefundenen Gleichungen sind allgemein und gelten für jeden Werth von n. Man erhält sofort aus (16.) für ein negatives ganzes oder gebrochenes n:

$$20)\quad R\left(\frac{x-nd}{d}\right) = R\left(\frac{x}{d}\right) + \lg\frac{1}{(x-nd)^{n|d}} = R\left(\frac{x}{d}\right) = \lg\frac{1}{(x-d)^{n|-d}}$$

$$21)\quad R\left(\frac{mx+nd}{md}\right) = R\left(\frac{x}{d}\right) + \lg x^{\frac{n}{m}|d}$$

$$23)\quad R\left(\frac{mx-nd}{md}\right) = R\left(\frac{x}{d}\right) + \lg x^{\frac{n}{m}|-d} = R\left(\frac{x}{d}\right) + \lg\frac{1}{(x-\frac{n}{d}d)^{\frac{n}{m}|d}}.$$

Wird hierin $d=1$ gesetzt, so geht (20.) über in:

$$23)\quad R(x-n) = R(x) + \lg\frac{1}{(x-1)^{n|1}}.$$

Setzt man nun ferner $x=1$, so zeigt sich, dass alle Werthe von R für Facultäten mit negativem Exponenten, der eine ganze Zahl ist, und deren

Basis und Zunahme die Einheit ist, unendlich gross werden. Setzt man in (21. und 22.) $d=1$, $\frac{n}{m}=p+\frac{n}{m}$, so geben die beiden Gleichungen:

$$24)\quad R\left(x+p+\frac{n}{m}\right)=R(x)+\lg x^{p+\frac{n}{m}|1}=R(x)+\lg x^{\frac{n}{m}|1}+\lg\frac{(xm+n)^{p|m}}{m^p}$$

$$25)\quad R\left(x-p-\frac{n}{m}\right)=R(x)+\lg x^{-\frac{n}{m}-p|1}=R(x)+\lg x^{-\frac{n}{m}|1}+\lg\frac{m^p}{(xm-n)^{p|m}}.$$

Führt man in (17.) statt z allmälig die Werthe 2, 3, 4 .... ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
26)\quad R(2) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2\pi,\\
R(3) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2\pi+\lg(2),\\
R(4) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2\pi+\lg(1.2.3),\\
R(5) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2\pi+\lg(1.2.3.4),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Setzt man in (24.) $x=1$, $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$ und statt p allmälig die Werthe $0, 1, 2, \ldots.$, und erwägt, dass nach (25. §. 13.) $R(1)+\lg 1^{\frac{1}{2}|1}=-\frac{1}{2}\lg(2\pi)$ $\lg\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lg\pi=-\frac{3}{2}\lg 2$ ist, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
27)\quad R\left(\tfrac{3}{2}\right) &= -\tfrac{3}{2}\lg 2,\\
R\left(\tfrac{5}{2}\right) &= -\tfrac{3}{2}\lg 2+\lg\tfrac{3}{2},\\
R\left(\tfrac{7}{2}\right) &= -\tfrac{3}{2}\lg 2+\lg\left(\tfrac{3.5}{2.2}\right),\\
R\left(\tfrac{9}{2}\right) &= -\tfrac{3}{2}\lg 2+\lg\left(\tfrac{3.5.7}{2.2.2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Setzt man die nämlichen Werthe in (25.) und bemerkt, dass nach (26. §. 13.) $R(1)+\lg 1^{-\frac{1}{2}|1}=-\frac{1}{2}\lg 2\pi+\frac{1}{2}\lg\pi=-\frac{1}{2}\lg 2$ ist, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
28)\quad R\left(\tfrac{1}{2}\right) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2,\\
R\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2+\lg 2,\\
R\left(-\tfrac{3}{2}\right) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2+\lg\left(\tfrac{2.2}{1.3}\right),\\
R\left(-\tfrac{5}{2}\right) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2+\lg\left(\tfrac{2.2.2}{1.3.5}\right),\\
R\left(-\tfrac{7}{2}\right) &= -\tfrac{1}{2}\lg 2+\lg\left(\tfrac{2.2.2.2}{1.3.5.7}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Soll hiernach der Werth der Facultät $1^{4+\frac{1}{2}|1}$ gefunden werden, so erhält man sofort

$$\lg 1^{\frac{9}{2}|1} = R(\tfrac{11}{2}) - R(1) = -\tfrac{3}{2}\lg 2 + \lg 945 - \lg 16 + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$= 1{,}7188567 = \lg 52{,}34277.$$

Diese Zahl findet sich auch durch directe Berechnung und es ist

$$1^{\frac{9}{2}|1} = 1.2.3.4.5^{\frac{1}{2}|1} = 1.2.3.4\sqrt{5}\left(1 - \frac{1}{2^3.5} + \frac{1}{2^7.5^2} + \frac{5}{2^{10}.5^3} - \frac{21}{2^{15}.5^4} - \ldots.\right)$$
$$= 24.\sqrt{5}(1 - 0{,}025 + 0{,}00031125 + 0{,}000039625 - 0{,}000001025390625 \ldots.$$
$$- 0{,}0000004870605 + 0{,}0000000132598 \ldots.)$$
$$= 24.2{,}236067977 \ldots. \times 0{,}9753506 \ldots. = 52{,}34277 \ldots.$$

Die Werthe, welche zu den angezeigten Operationen nöthig werden, sind fur die hyperbolische Logarithmen:

$$\tfrac{1}{2}\lg 2\pi = 0{,}91893853320467274178$$

und für die gemeinen Logarithmen:

$$\tfrac{1}{2}\lg 2\pi = 0{,}399089934179057 \ldots.$$

Bei der Reduction der hyperbolischen Logarithmen auf gemeine ist bekanntlich die Zahl 0,43429448190325182765l nöthig.

Eine ganz einfache Methode, den Werth der Function R zu berechnen, geben die Gleichungen (5. und 6.) unmittelbar. Es ist nämlich

$$29)\quad R(\tfrac{x}{d}) = R(\tfrac{x+nd}{d}) - \lg x^{n|d},$$

$$30)\quad R(\tfrac{x}{d}) = F(\tfrac{x+nd}{d}) - \lg x^{n+1|d}.$$

Hiernach sind $R(\frac{x+nd}{d})$ und $F(\frac{x+nd}{d})$ in Reihen zu entwickeln und von den erhaltenen Werthen die Logarithmen der Facultäten $x^{n|d}$ und $x^{n+1|d}$ abzuziehen. Dieses Verfahren führt sehr schnell zum Ziele, da n so angenommen werden kann, dass die Reihe schnell convergirt; was schon für $n=9$ geschieht. Von der Zweckmässikeit des Verfahrens kann man sich im 6ten Bande dieses Journals S. 141 überzeugen, wo sie von mir benutzt wurde.

Die Gleichungen (3. und 4.) sind schon von *Kramp* (Anal. d. réfr. ast. Pg. 101) und von *Bessel* (Königsberger Archiv) behandelt worden. *Kramp* hat bei seinen Entwicklungen die Form (4.) gewählt, die Glieder der beiden Reihen

$$-\frac{x+nd}{d} + \frac{d}{12(x+nd)} - \frac{d^3}{360(x+nd)^3} + \frac{d^5}{1260(x+nd)^5} - \ldots. \text{ und}$$
$$+\frac{x}{d} - \frac{d}{12x} + \frac{d^3}{360x^3} - \frac{d^5}{1260x^5} + \ldots.$$

besonders untersucht und sie durch $\Gamma\frac{d}{x+nd}$ und $\Gamma\frac{d}{x}$ bezeichnet. Die Un-

tersuchung kann zwar auch auf diese Weise geführt werden, jedoch; wie es scheint, weniger zweckmässig; wie es auch schon *Bessel* bemerkt hat. Den Zusammenhang zwischen der von *Kramp* angenommenen Bezeichnung und der hiesigen drücken folgende Gleichungen aus:

$$R\left(\frac{x+nd}{d}\right) = \frac{x+nd}{d}\lg(x+nd) - \tfrac{1}{2}\lg(x+nd) + \Gamma\frac{d}{x+nd} \quad \text{und}$$

$$R\left(\frac{x}{d}\right) = -\frac{x\lg x}{d} + \tfrac{1}{2}\lg x + \Gamma\frac{x}{d}.$$

§. 22.

Es ist nöthig, die Werthe der Facultäten mit gebrochenen Exponenten auf eine leichte Weise finden zu können. Eine sehr einfache Mehode, den Logarithmen einer solchen Facultät darzustellen, ergiebt sich aus der Gleichung (22. §. 7.). Sie giebt

$$a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\frac{n}{m}+r|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{r|d}} = \frac{m^r.a^{\frac{n+mr}{m}|d}}{(am+nd)^{r|md}}$$

und hieraus

$$1)\quad \lg a^{\frac{n}{m}|d} = \lg m^r - \lg(am+nd)^{r|md} + \lg a^{\frac{n+mr}{m}|d}$$

Die Werthe der zwei ersten Ausdrücke rechts vom Gleichheitszeichen lassen sich in der obigen Form durch Logarithmen darstellen und der dritte nach der Gleichung (3. §. 21.) in eine Reihe entwickeln. Hiernach ist

$$2)\quad \lg a^{\frac{n}{m}|d} = r\lg m - \lg(am+nd)^{r|md} + R\left(\frac{am+nd+mrd}{md}\right) - R\left(\frac{a}{d}\right).$$

Der entwickelte Ausdruck selbst ist

$$\begin{aligned}
3)\quad \lg a^{\frac{n}{m}|d} = r\lg m - \lg(am+nd)^{r|md} - R\left(\frac{a}{d}\right) \\
+ \frac{am+nd+mrd}{md}\lg\left(\frac{am+nd+mrd}{m}\right) - \frac{am+nd+mrd}{md} - \tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{am+nd+mrd}{m}\right) \\
+ \frac{md}{12(am+nd+mrd)} \\
- \frac{m^3d^3}{360(am+nd+mrd)^3} \\
+ \frac{m^5d^5}{1260(am+nd+mrd)^5} \\
- \frac{m^7d^7}{1680(am+nd+mrd)^7} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Da hier die Grösse r willkührlich angenommen werden kann, so ist es, wie man sieht, leicht, der begleitenden Reihe jede beliebige Convergenz zu geben. Die Gleichungen (1. bis 3.) gelten für positive wie für negative Exponenten und geben

$$4)\quad \lg a^{-\frac{n}{m}|d} = r\lg m - \lg(am-nd)^{r|md} + R\left(\frac{am-nd+rmd}{md}\right) - R\left(\frac{a}{d}\right),$$

und hieraus nach (3. §. 21.)

$$5)\quad \lg a^{-\frac{n}{m}|d} = r\lg m - \lg(am-nd)^{r|md} - R\left(\frac{a}{d}\right)$$

$$+\frac{am+mrd-nd}{md}\lg\left(\frac{am-nd+rmd}{m}\right) - \tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{am+rmd-nd}{m}\right) = \frac{am+rmd-nd}{md}$$

$$+\frac{md}{12(am+mrd-nd)}$$

$$-\frac{m^3d^3}{360(am+mrd-nd)^5}$$

$$+\frac{m^5d^5}{1260(am+mrd-nd)^7}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die vorstehenden Gleichungen werden einfacher, wenn man Basis und Zunahme $=1$ setzt. Es ist alsdann

$$6)\quad 1^{\frac{n}{m}|1} = r\lg m - \lg(m+n)^{r|m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$

$$+\frac{m(r+1)+n}{m}\lg\left(\frac{m(r+1)+n}{m}\right) - \tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{m(r+1)+n}{m}\right) - \frac{m(r+1)+n}{m}$$

$$+\frac{m}{12(m(r+1)+n)} - \frac{m^3}{360(m(r+1)+n)^3} + \frac{m^5}{1260(m(r+1)+n)^5} - \frac{m^7}{1680(m(r+1)+n)^7} + \cdots$$

$$7)\quad 1^{-\frac{n}{m}|1} = r\lg m - \lg(m-n)^{r|m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$

$$+\frac{m(r+1)-n}{m}\lg\left(\frac{m(r+1)-n}{m}\right) - \tfrac{1}{2}\lg\left(\frac{m(r+1)-n}{m}\right) - \frac{m(r+1)-n}{m}$$

$$+\frac{m}{12(m(r+1)-n)} - \frac{m^3}{360(m(r+1)-n)^3} + \frac{m^5}{1260(m(r+1)-n)^5} - \frac{m^7}{1680(m(r+1)-n)^7} + \cdots$$

Die Brauchbarkeit dieser Gleichungen soll an besondern Fällen gezeigt werden. Wir wählen hiezu die Darstellung des schon früher gefundenen Werths von $1^{\frac{1}{2}|1}$. Setzt man in (6.) $r=9$, $n=1$, $m=2$, so ergiebt sich

$$8)\quad \lg 1^{\frac{1}{2}|1} = 9\lg 2 - \lg 3^{9|2} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi + \tfrac{21}{2}\lg\tfrac{21}{2} - \tfrac{1}{2}\lg\tfrac{21}{2}$$

$$-\frac{21}{2} + \frac{2}{12.21} - \frac{2^3}{360.21^3} + \frac{2^5}{1260.21^5} - \frac{2^7}{1680.21^7} + \cdots$$

Werden hier die angezeigten Rechnungen ausgeführt und die Werthe der Logarithmen gesetzt, so erhält man

$$\lg 1^{\frac{1}{2}|1} = 2{,}7092700 - 8{,}8160616 + 10{,}7224876 + 0{,}3990899$$
$$- 10{,}5 + 0{,}00793650793 \ldots + 0{,}0000023995488 \ldots$$
$$- 0{,}0000000062184 \ldots$$

Die Glieder der Reihe geben den *hyperbolischen* Logarithmen. Ihr Werth ist

$$K = - 10{,}492065855 \ldots$$

Der *Briggische* Logarithme ist

$$K_1 = - 4{,}556646315 \ldots$$

Werden nun die Werthe der vorstehenden Logarithmen zusammengenommen, so erhält man

$$1^{\frac{1}{2}|1} = N 0{,}9475449 - 1 = 0{,}8862269 \ldots$$

Dieser Werth wurde schon in (§. 15.) gefunden.

Die Methode lässt sich ebensowohl benutzen, wenn der Exponent einer Facultät einen kleinen Bruch bedeutet. Ist z. B. der Logarithme von $1^{\frac{1}{100}|1}$ zu berechnen, so setze man in (6.) $r=8$, $m=100$, $n=1$. Dies giebt

$$9)\quad \lg 1^{\frac{1}{100}|1} = 8 . \lg 100 - \lg 101^{8|100} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi + 9{,}01 \lg 9{,}01 - \tfrac{1}{2}\lg 9{,}01$$
$$- 9{,}01 + \frac{100}{12.901} - \frac{100^3}{360.901^3} + \frac{100^5}{1260.901^5} - \frac{100^7}{1680.901^7} + \ldots$$

Werden die angezeigten Glieder berechnet, so findet sich

$$\lg 1^{\frac{1}{100}|1} = 16 - 20{,}6172911 + 0{,}3990899 + 8{,}6020703 \ldots - 0{,}4773623$$
$$- 9{,}01 + 0{,}0092489826 \ldots - 0{,}000003797721 \ldots + 0{,}000000013365 \ldots$$
$$- 0{,}00000000012348 \ldots$$

Der Werth des *hyperbolischen* Logarithmen der Reihe ist

$$K = - 9{,}000754801867 \ldots$$

Der *Briggische* Logarithme ist

$$K_1 = - 3{,}9089781.$$

Durch Ausführung der angezeigten Rechnung erhält man

$$1^{\frac{1}{100}|1} = N 0{,}9975287 - 1 = 0{,}9943257 \ldots$$

Die Rechnung ist mit siebenstelligen Logarithmen gemacht. Die Ermittlung des Werths des hyperbolischen Logarithmen der begleitenden Reihe macht viele Mühe, wenn grosse Zahlen, wie in (9.) vorkommen. Man kann sich diese Rechnungen erleichtern, wenn man nur in dem ersten und höchstens in dem zweiten Gliede die Division wirklich ausführt, die Werthe der spätern Glieder aber durch Logarithmen sucht. Dann werden selbst siebenstellige Logarithmen genügen, weil die Glieder der Reihe stark convergiren. Die Gleichungen (6. und 7.) würden vollkommen genügen, wenn $(m(r+1)+n)$ immer so angenom-

men werden könnte, dass sich die Zahl 10 oder ein Vielfaches von 10 ergäbe. Dies geht aber, wie leicht zu sehen, nicht an. Es ergiebt sich jedoch aus den Gleichungen (3. und 5.) noch ein anderes Mittel, stark convergirende Reihen abzuleiten. Die Glieder der Reihe in diesen Ausdrücken lassen sich nämlich nach dem binomischen Lehrsatze in Reihen entwickeln. Bezeichnen wir der Reihe nach die Vorzahlen $\frac{1}{12}, \frac{1}{360}, \frac{1}{1260}, \ldots$ der Kürze wegen durch $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$, so erhalten wir

$$a_1 \frac{md}{((a+rd)m+nd)} = \frac{a_1 d}{a+rd} - \frac{a_1 n d^2}{(a+rd)^2 m} + \frac{a_1 d^3}{(a+rd)^3} \cdot \frac{n^2}{m^2} - \frac{a_1 d^4}{(a+rd)^4} \cdot \frac{n^3}{m^3} - \frac{a_1 d^5}{(a+rd)^5} \cdot \frac{n^4}{m^4} + \ldots$$

$$-a_3 \frac{m^3 d^3}{((a+rd)m+nd)^3} = -\frac{a_3 d^3}{(a+rd)^3} + [2]_2 \cdot \frac{a_3 d^4}{(a+rd)^4} \frac{n}{m} - [3]_2 \cdot \frac{a_3 d^5}{(a+rd)^5} \frac{n^2}{m^2} + [4]_2 \cdot \frac{a_3 d^6}{(a+rd)^6} \left(\frac{n}{m}\right)^3 + \ldots$$

$$+\frac{a_5 m^5 d^5}{((a+rd)m+nd)^5} = \frac{a_5 d^5}{(a+rd)^5} - [2]_4 \frac{a_5 d^6}{(a+rd)^6} \cdot \frac{n}{m} + [3]_4 \frac{a_5 d^7}{(a+rd)^7} \frac{n^2}{m^2} - [4]_4 \cdot \frac{a_5 d^8}{(a+rd)^8} \cdot \frac{n^3}{m^3} + \ldots$$

$$-\frac{a_7 m^7 d^7}{((a+rd)m+nd)^7} = -\frac{a_7 d^7}{(a+rd)^7} + [2]_6 \frac{a_7 d^8}{(a+rd)^8} \frac{n}{m} - [3]_6 \frac{a_7 d^9}{(a+rd)^9} \frac{n^2}{m^2} + [4]_6 \frac{a_7 d^{10}}{(a+rd)^{10}} \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^3 + \ldots$$

$$+\frac{a_9 m^9 d^9}{((a+rd)m+nd)^9} = \frac{a^9 d^9}{(a+rd)^9} - [2]_8 \frac{a^9 d^{10}}{(a+rd)^{10}} \frac{n}{m} + [3]_8 \frac{a_9 d^{11}}{(a+rd)^{11}} \cdot \frac{n^2}{m^2} - [4]_8 \frac{a^{11} d^{12}}{(a+rd)^{12}} \cdot \frac{n^3}{m^3} + \ldots$$

. . . .

Ordnet man diese Reihen nach den Potenzen von $\frac{n}{m}$, so erhält man sehr stark convergirende Reihen und der Ausdruck (3.) geht in folgenden über:

$$10)\ \lg a^{\frac{n}{m}|d} = r \lg m - \lg(am+nd)^{r|md} - R\left(\frac{a}{d}\right)$$

$$+ \frac{m(a+rd)+nd}{md} \lg\left(\frac{m(a+rd)+nd}{m}\right) - \frac{m(a+rd)+nd}{md} - \tfrac{1}{2} \lg\left(\frac{m(a+rd)+nd}{m}\right)$$

$$+ \left(\frac{n}{m}\right)^0 \left(\frac{a_1 d}{a+rd} - \frac{a_3 d^3}{(a+rd)^3} + \frac{a_5 d^5}{(a+rd)^5} - \frac{a_7 d^7}{(a+rd)^7} + \ldots\right)$$

$$- \frac{n}{m} \left(\frac{a_1 d^2}{(a+rd)^2} - [2]_2 \frac{a_3 d^4}{(a+rd)^4} + [2]_4 \frac{a_5 d^6}{(a+rd)^6} - [2]_6 \frac{a_7 d^8}{(a+rd)^8} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n^2}{m^2} \left(\frac{a_1 d^3}{(a+rd)^3} - [3]_2 \frac{a_3 d^5}{(a+rd)^5} + [3]_4 \frac{a_5 d^7}{(a+rd)^7} - [3]_6 \frac{a_7 d^9}{(a+rd)^9} + \ldots\right)$$

$$- \frac{n^3}{m^3} \left(\frac{a_1 d^4}{(a+rd)^4} - [4]_2 \frac{a_3 d^6}{(a+rd)^6} + [4]_4 \frac{a_5 d^8}{(a+rd)^8} - [4]_6 \frac{a_7 d^{10}}{(a+rd)^{10}} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n^4}{m^4} \left(\frac{a_1 d^5}{(a+rd)^4} - [5]_2 \frac{a_3 d^7}{(a+rd)^7} + [5]_4 \frac{a_5 d^9}{(a+rd)^9} - [5]_6 \frac{a_7 d^{11}}{(a+rd)^{11}} + \ldots\right)$$

. . . .

Aus (5.) erhält man unmittelbar, wenn in (10.) $-n$ statt n gesetzt wird:

$$11)\ \lg a^{-\frac{n}{m}|d} = r \lg m - \lg(am - nd)^{r|md} - R(\tfrac{a}{d})$$
$$+ \frac{m(a+rd)-nd}{md} \lg(\frac{m(a+rd)-nd}{m}) - \frac{m(a+rd)-nd}{md} - \tfrac{1}{2}\lg(\frac{m(a+rd)-nd}{m})$$
$$+ (\frac{n}{m})^0 (\frac{a_1 d}{a+rd} - \frac{a_3 d^3}{(a+rd)^3} + \frac{a_5 d^5}{(a+rd)^5} - \frac{a_7 d}{(a+rd)^7} + \ldots)$$
$$+ \frac{n}{m} (\frac{a_1 d^2}{(a+rd)^2} - [2]_2 \frac{a_3 d^3}{(a+rd)^3} + [2]_4 \frac{a_5 d^6}{(a+rd)^6} - [2]_6 \frac{a_7 d^8}{(a+rd)^8}) + \ldots)$$
$$+ \frac{n}{m} (\frac{a_1 d^3}{(a+rd)^3} - [3]_2 \frac{a_3 d^5}{(a+rd)^5} + [3]_4 \frac{a_5 d^7}{(a+rd)^7} - [3]_6 \frac{a_7 d^9}{(a+rd)^9}) + \ldots)$$

. . . .

Diese Formeln sind ganz allgemein. Sie lassen sich sogleich auf eine Facultät mit negativer Zunahme anwenden, wenn $-d$ statt $+d$ gesetzt wird. Die besondere Darstellung von $\lg a^{\frac{n}{m}|-d}$, und $\lg a^{-\frac{n}{m}|-d}$ ist nicht nöthig, da in (§. 11. und 13.) der Zusammenhang zwischen den Facultäten mit gebrochenen Exponenten bei positiver und negativer Zunahme angegeben ist. Es genügen also die in (3. und 5.) gegebenen Ausdrücke, indem sich von ihnen ohne Schwierigkeit auf die übrigen der Facultäten übergehen lässt.

Bei der Ausführung der in (10. und 11.) angezeigten Rechnungen sind die Glieder der zwei ersten Reihen durch hyperbolische oder Briggische Logarithmen unmittelbar anzugeben. Dies hat keine Schwierigkeit, denn man hat höchstens die Logarithmen einer Facultät von neun Factoren darzustellen und zusammenzuzählen. Die begleitenden Reihen führen immer auf hyperbolische Logarithmen und diese lassen sich sofort auf Briggische bringen, wenn man mit letztern rechnet. Setzt man $r = 9$, $d = 1$, $a = 1$, so erhält man stark convergirende Reihen, deren Glieder Potenzen der Zahl 10 zu Nennern haben, und die also keiner weitern Rechnung bedürfen. So findet sich aus (10.):

$$12)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}} = \lg m^9 - \lg (m+n)^{9|m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi + \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{m} - \frac{10m+n}{m}$$

$$+ 1\left(\frac{a_1}{10} - \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_5}{10^5} - \frac{a_7}{10^7} + \frac{a_9}{10^9} - \frac{a_{11}}{10^{11}} + \frac{a_{13}}{10^{13}} - \frac{a_{15}}{10^{15}} + \ldots\right)$$

$$- \frac{n}{m}\left(\frac{a_1}{10^2} - \frac{3a_3}{10^4} + \frac{5a_5}{10^6} - \frac{7a_7}{10^8} + \frac{9a_9}{10^{10}} - \frac{11a_{11}}{10^{12}} + \frac{13a_{13}}{10^{14}} - \frac{15a_{15}}{10^{16}} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n^2}{m^2}\left(\frac{a_1}{10^3} - \frac{6a_3}{10^5} + \frac{15a_5}{10^7} - \frac{28a_7}{10^9} + \frac{45.a_9}{10^{11}} - \frac{66.a_{11}}{10^{13}} + \frac{91a_{13}}{10^{15}} - \frac{120a_{15}}{10^{17}} + \ldots\right)$$

$$- \frac{n^3}{m^3}\left(\frac{a_1}{10^4} - \frac{10a_3}{10^6} + \frac{35a_5}{10^8} - \frac{84a_7}{10^{10}} + \frac{165a_9}{10^{12}} - \frac{286a_{11}}{10^{14}} + \frac{455a_{13}}{10^{16}} - \frac{680a_{15}}{10^{18}} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{n^4}{m^4}\left(\frac{a_1}{10^5} - \frac{15.a_3}{10^7} + \frac{70.a_5}{10^9} - \frac{210.a_7}{10^{11}} + \frac{495.a_9}{10^{13}} - \frac{1001a_{11}}{10^{15}} + \frac{1820a_{13}}{10^{17}} - \frac{2890a_{15}}{10^{19}} + \ldots\right)$$

$$- \frac{n^5}{m^5}\left(\frac{a_1}{10^6} - \frac{21.a_3}{10^8} + \frac{126a_5}{10^{10}} - \frac{462a_7}{10^{12}} + \frac{1287a_9}{10^{14}} - \frac{3003a_{11}}{10^{16}} + \frac{6188a_{13}}{10^{18}} - \frac{11628a_{15}}{10^{20}} + \ldots\right)$$

. . . .

Die Ermittlung der Werthe der begleitenden Reihen erfordert allerdings viel Rechnung. Die Resultate sind aber auch sehr brauchbar. Es ist nämlich nöthig, die Zahlenwerthe von a_1, a_2, a_3 .... in Decimalbrüchen darzustellen, sie mit ihren Vorzahlen zu multipliciren und dann mit den gehörigen Zeichen zusammenzuzählen. Die Berechnung der Zahlenwerthe von a_1, a_2, a_3, a_4, ... beruht auf den sogenannten *Bernoulli*schen Zahlen, die in (§. 19.) gefunden wurden und bekannt sind. *Euler* hat in seiner Differentialrechnung (2ter Thl. §. 132. 5tes Cap.) die funfzehn ersten dieser Zahlen angegeben. *Rothe* hat die sechszehn folgenden berechnet (S. d. Journ. 20ter Bd. S. 11.). Da ihr Ausdruck in Decimalbrüchen nicht unwichtig sein dürfte, so theilen wir denselben hier mit:

$$13)\quad \mathfrak{A} = \frac{1}{6} = 0{,}16666\ \ldots$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{30} = 0{,}03333$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{42} = 0{,}0238095238095\ \ldots$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{30} = 0{,}03333\ \ldots$$

$$\mathfrak{E} = \frac{5}{66} = 0{,}07575\ \ldots$$

$$\mathfrak{F} = \frac{691}{2730} = 0{,}253113553113\ \ldots$$

$$\mathfrak{G} = \frac{7}{6} = 1{,}16666\ \ldots$$

$$\mathfrak{H} = \frac{3617}{510} = 7{,}0921568627450980392156 86\ \ldots$$

$$\mathfrak{J} = \frac{43867}{798} = 54,9711779448621553884711779 44 \ldots.$$
$$\mathfrak{K} = \frac{174611}{330} = 529,124242424 \ldots.$$
$$\mathfrak{L} = \frac{854513}{138} = 6192,1231884057971014492753623188405 79 \ldots.$$
$$\mathfrak{M} = \frac{236364091}{2730} = 86580,253113516483516 48 \ldots.$$
$$\mathfrak{N} = \frac{8553103}{6} = 1425517,16666 \ldots.$$

Man sieht, dass sämmtliche Brüche periodisch sind. Der Bruch $\mathfrak{H}$ hat eine Periode von 16, der Bruch $\mathfrak{L}$ eine Periode von 22 Stellen. *Euler* hat die Decimalbrüche (6tes Cap. d. Differential-Rechnung 2ter Thl. §. 144.) der acht ersten Vorzahlen mitgetheilt, hat aber nicht bemerkt, dass sie periodisch sind. Wenigstens ist die Periode des Bruches $\mathfrak{H}$ nicht von ihm angegeben. Die hiesigen Resultate stimmen mit denen von *Euler* überein.

Die Werthe der Zahlen, welche nun zur entwickelten Darstellung von (12.) nöthig sind, sind folgende:

$$14)\quad a_1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1.2} = 0,083333 \ldots.$$
$$a_3 = \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{3.4} = 0,0027777 \ldots.$$
$$a_5 = \frac{1}{42}\cdot\frac{1}{5.6} = 0,000793650793650 \ldots.$$
$$a_7 = \frac{1}{30}\cdot\frac{1}{7.8} = 0,000595238095238 0 \ldots.$$
$$a_9 = \frac{5}{66}\cdot\frac{1}{9.10} = 0,000841750841750 \ldots.$$
$$a_{11} = \frac{691}{2730}\cdot\frac{1}{11.12} = 0,001917526917 52 \ldots.$$
$$a_{13} = \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{13.14} = 0,006410256410256 \ldots.$$
$$a_{15} = \frac{3617}{510}\cdot\frac{1}{15.16} = 0,0295506535947712418 30 \ldots.$$
$$a_{17} = \frac{43867}{798}\cdot\frac{1}{17.18} = 0,179644372368830573 \ldots.$$
$$a_{19} = \frac{174611}{330}\cdot\frac{1}{19.20} = 1,392432216905901116427432 21 \ldots.$$

. . . .

Die spätern Zahlen sind nicht mehr nöthig, da sie nach (12.) auf die 18te Decimalstelle nicht mehr Einfluss haben.

Werden die vorstehenden Werthe nach (12.) eingeführt und zusammengezählt, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$15)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = 9\lg m - \lg(m+n)^{9|m} + \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$- \frac{10m+n}{m} + \left(\frac{n}{m}\right)^0 0{,}00833056343336287l2 \ldots$$
$$- \frac{n}{m}\ 0{,}0008325039273245763 \ldots$$
$$+ \frac{n^2}{m^2}\ 0{,}0000831678408428730 \ldots$$
$$- \frac{n^3}{m^3}\ 0{,}0000083058284670102 \ldots$$
$$+ \frac{n^4}{m^4}\ 0{,}0000008292210120777 \ldots$$
$$- \frac{n^5}{m^5}\ 0{,}0000000827597352940 \ldots$$
$$+ \frac{n^6}{m^6}\ 0{,}0000000082571696073 \ldots$$
$$- \frac{n^7}{m^7}\ 0{,}0000000008235855311 \ldots$$
$$+ \frac{n^8}{m^8}\ 0{,}0000000000821209322 \ldots$$
$$- \frac{n^9}{m^9}\ 0{,}0000000000081859511 \ldots$$
$$+ \frac{n^{10}}{m^{10}}\ 0{,}0000000000008153628 \ldots$$
$$- \left(\frac{n}{m}\right)^{11} 0{,}0000000000000812682 \ldots$$
$$+ \left(\frac{n}{m}\right)^{12} 0{,}00000000000000809398 \ldots$$
$$- \left(\frac{n}{m}\right)^{13} 0{,}0000000000000008059 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch

$$16)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = 9\lg m - \lg(m+n)^{9|m} + \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$- 9{,}9916694365666371287$$
$$- \frac{n}{m}.1{,}0008325039273245 7 \ldots$$
$$+ \frac{n^2}{m^2}\ 0{,}0000831678408428730 \ldots$$
$$- \frac{n^3}{m^3}\ 0{,}00000830582846701 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichungen geben die Logarithmen der Facultäten mit gebrochenen Exponenten auf eine sehr bequeme Weise; besonders dann, wenn $\frac{n}{m}$ ein kleiner Bruch ist. Der Logarithme lässt leicht auf zwölf bis funfzehn Decimalstellen berechnen und es können zu der Rechnung sowohl hyper-

bolische als künstliche Logarithmen benutzt werden. Wir geben den Logarithmen der Facultät $1^{\frac{1}{100}|1}$ durch künstliche und durch natürliche Logarithmen. Aus der Gleichung (15.) erhalten wir

$$17)\quad \lg 1^{\frac{1}{100}} = 9 \lg 100 - \lg 101^{9|100} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi + 10{,}01 \lg 10{,}01 - \tfrac{1}{2}\lg 10{,}01$$

$$\begin{aligned} &- 10{,}01 + 0{,}008330563433 \ldots \\ &\qquad - 0{,}000008325039 \ldots \\ &\qquad + 0{,}0000000083167840 \ldots \\ &\qquad - 0{,}0000000000083058 \ldots \\ &\qquad + 0{,}00000000000000829 \ldots \\ &\qquad \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

Wendet man zunächst künstliche und zehnstellige Logarithmen an, so ist die begleitende Reihe, welche K genannt werden soll, auf künstliche Logarithmen zu bringen. Es ist

$$\begin{aligned} \lg \text{brigg. } K &= 0{,}4342944481903 \ldots \times - 10{,}0016777532974238 \ldots \\ &= - 4{,}3436734582 \ldots \end{aligned}$$

Werden nun die angezeigten Rechnungen ausgeführt, so erhält man

$$\begin{array}{rr@{\qquad}rr} 9 \lg 100 = & 18{,}0000000000 & - \lg 101^{9|100} = & - 23{,}5720158224 \\ \tfrac{1}{2}\lg 2\pi = & 0{,}3990899341 & - \tfrac{1}{2}\lg 10{,}01 = & - \; 0{,}5002170387 \\ 10{,}01 \lg 10{,}01 = & 10{,}0143451157 & - \lg \text{brigg. } K = & - \; 4{,}3436734582 \\ \hline & 28{,}4134350498 & & - 28{,}4159063193 \end{array}$$

Demnach ist

$$18)\quad \lg.\ \text{brigg. } 1^{\frac{1}{100}|1} = - 0{,}0024712695 = 0{,}9975287305 - 1.$$

Dieser Logarithme ist bis auf die neunte Decimalstelle richtig. Verlangt man ihn auf eine grössere Zahl von Decimalstellen, so kann man sich der natürlichen Logarithmen bedienen. Die in (17.) angezeigten Rechnungen sind dann mit natürlichen Logarithmen zu machen. Man erhält, wenn man sechszehn Decimalstellen nimmt, aus (17.):

$$\begin{array}{rr} 9 \lg 100 = & 41{,}4465316738928223 \\ \tfrac{1}{2}\lg 2\pi = & 0{,}9189385332046727 \\ 10{,}01 \lg 10{,}01 = & 23{,}0588817792045634 \\ \hline & 65{,}4243519863020584 \\ - \lg 101^{9|100} = & - 54{,}2765722442871397 \\ - \tfrac{1}{2}\lg 10{,}01 = & - \; 1{,}1517922966635646 \\ - K \qquad = & - 10{,}0016777532974238 \\ \hline & - 65{,}4300422942481281. \end{array}$$

Demnach ist

$$19) \quad \text{lg. nat. } 1^{\frac{1}{10}|1} = -0{,}0056903079460 6967 \ldots$$

Bringt man diesen Werth auf künstliche Logarithmen, so findet sich

$$20) \quad \text{lg. brigg. } 1^{\frac{1}{10}|1} = -0{,}0024712693413 0826 \ldots$$
$$= 0{,}9975287306586 9173 \ldots - 1.$$

In diesem Ausdruck ist noch die sechszehnte Decimalstelle richtig; wie sich aus dem folgenden Paragraphen, No. 16., ergeben wird.

Setzt man in (15.) $-n$ statt $+n$, so erhält man, mit Rücksicht auf (11.), den Logarithmen einer Facultät mit negativem Exponenten, und es ergiebt sich

$$21) \quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = 9 \lg m - \lg (m-n)^{9|m} + \tfrac{1}{2} \lg 2\pi + \frac{10m-n}{m} \lg \frac{10m-n}{m} - \tfrac{1}{2} \lg \frac{10m-n}{m}$$
$$- \frac{10m-n}{m} + \left(\frac{n}{m}\right)^0 0{,}00833056343336287 \ldots$$
$$+ \frac{n}{m} \; 0{,}00083250392732457 \ldots$$
$$+ \frac{n^2}{m^2} \; 0{,}00008316784084287 30 \ldots$$
$$+ \frac{n^3}{m^3} \; 0{,}0000083058284670 1 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder auch

$$22) \quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = 9 \lg m - \lg (m-n)^{9|m} + \tfrac{1}{2} \lg 2\pi + \frac{10m-n}{m} \lg \frac{10m-n}{m} - \tfrac{1}{2} \lg \frac{10m-n}{m}$$
$$- 9{,}99166943656663712 \ldots$$
$$+ \frac{n}{m} . 1{,}00083250392732457 \ldots$$
$$+ \frac{n^2}{m^2} \; 0{,}0000831678408428730 \ldots$$
$$+ \frac{n^3}{m^3} \; 0{,}0000083058284670 1 \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Glieder der Reihen (15. und 21.) convergiren, wie schon bemerkt, um so stärker, je kleiner der Bruch $\frac{n}{m}$ ist, und weniger stark, wenn $\frac{n}{m}$ der Einheit nahe kommt. Jedoch geben sie in diesem Falle den Logarithmen auf wenigstens zwölf Decimalstellen richtig an; was meistens hinreicht. Man kann jedoch auch noch mehr Glieder der Reihe entwickeln und dann den Logarithmen auf eine beliebige Anzahl von Stellen genau finden. Dabei haben die

Reihen den Vortheil, dass sie die Summirung von nicht mehr als neun Logarithmen erfordern, welches auch der Exponent sei. Selbst noch, wenn sich der Exponent $\frac{n}{m}$ bis zu $\frac{1}{2}$ erhebt, geben die Reihen den Logarithmen auf wenigstens zwölf Decimalstellen richtig an. Die Ausdrücke (15. und 21.) haben ausserdem noch die Eigenschaft, dass sie sich gegenseitig ergänzen, etwa wie Sinus und Cosinus, und dadurch die Darstellung des Logarithmen einer Facultät sehr leicht geben, wenn auch der Exponent $\frac{n}{m}$ der Einheit nahe liegt.

Für diesen Fall sei $\frac{p}{m}$ die Ergänzung von $\frac{n}{m}$ zur Einheit, so dass $\frac{n+p}{m} = 1$, also $\frac{n}{m} = 1 - \frac{p}{m}$ ist. Dann ist

$$1^{\frac{n}{m}|1} = 1^{-\frac{p}{m}+1|1} = 1^{-\frac{p}{m}|1}(1-\frac{p}{m}) = \frac{n}{m}.1^{-\frac{p}{m}|1}.$$

Wird nun $1^{-\frac{p}{m}|1}$ nach (21.) berechnet (was jetzt leicht geschehen kann, da $\frac{p}{m}$ ein kleiner Bruch ist) und wird hievon $\frac{n}{m}$ genommen, so ist dadurch der Werth von $1^{\frac{n}{m}|1}$ gefunden. Es ergiebt sich für die angedeutete Zurückführung folgende Gleichung:

$$23)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = \lg 1^{-\frac{p}{m}|1} + \lg n - \lg m.$$

Eben so ist unter der nämlichen Voraussetzung, wenn $\frac{n}{m}$ der Einheit nahe liegt, umgekehrt:

$$1^{-\frac{n}{m}|1} = 1^{-1+\frac{p}{m}|1} = 1^{\frac{p}{m}|1}(1+\frac{p}{m})^{-1|1} = 1^{\frac{p}{m}|1}.\frac{m}{p},$$

also auch

$$24)\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \lg 1^{\frac{p}{m}|1} + \lg m - \lg p.$$

Nach diesen Gleichungen lassen sich Logarithmentafeln für Facultäten mit gebrochenen Exponenten, etwa von $1^{0|1}$ bis $1^{1|1}$, construiren. Dabei kommen die vier Grundformen $1^{\frac{n}{m}|1}$, $1^{-\frac{n}{m}|1}$, $1^{\frac{n}{m}|-1}.1^{-\frac{n}{m}|-1}$ in Betracht. Es genügt jedoch eine Tafel für die eine Grundform, weil aus ihr, wie gezeigt, die übrigen abgeleitet werden können. Die Hülfsgleichungen, welche dazu dienen sind, ausser den in (23. und 24.) angegebenen, nach (§. 13.) folgende:

$$25)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|-1} = \lg m - \lg(m-n) - \lg 1^{-\frac{n}{m}|1},$$

$$26)\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|-1} = \lg m - \lg(m+n) - \lg 1^{\frac{n}{m}|1}.$$

Hat man Tafeln der künstlichen Logarithmen auf eine hinlängliche Anzahl von Stellen, so kann man die Gleichungen (14. und 16.) auch dadurch noch bequemer zur Benutzung einrichten, dass man die Glieder der begleitenden Reihe mit der Zahl 0,43429481 .... multiplicirt und sie so auf künstliche Logarithmen bringt. Bei der Ausführung dieser Rechnungen sind die Gleichungen (16. und 22.) zu Grunde zu legen. Man erhält dann folgende Ausdrücke:

$$27)\quad \text{lg. br. } 1^{\frac{n}{m}|1} = 9\lg m - \lg(m+n)^{9|m} - \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$

$$- 4{,}3393269013022637773 \ldots$$

$$- \frac{n}{m}\, 0{,}434656033765051676 \ldots$$

$$+ \frac{n^2}{m^2}\, 0{,}0000361193343498 67 \ldots$$

$$- \frac{n^3}{m^3}\, 0{,}000003607175470860 \ldots$$

$$+ \frac{n^4}{m^4}\, 0{,}0000003601261098235$$

$$- \frac{n^5}{m^5}\, 0{,}0000000359420963619 \ldots$$

$$+ \frac{n^6}{m^6}\, 0{,}0000000035860431966 \ldots$$

$$- \frac{n^7}{m^7}\, 0{,}0000000003576786515 \ldots$$

$$+ \frac{n^8}{m^8}\, 0{,}0000000000356646677 \ldots$$

$$- \frac{n^9}{m^9}\, 0{,}0000000000035551133 \ldots$$

$$+ \frac{n^{10}}{m^{10}}\, 0{,}0000000000003541032 \ldots$$

$$- \frac{n^{11}}{m^{11}}\, 0{,}00000000000003529843 \ldots$$

$$+ \frac{n^{12}}{m^{12}}\, 0{,}00000000000000351517 \ldots$$

$$- \frac{n^{13}}{m^{13}}\, 0{,}0000000000000003499 \ldots$$

. . . .

$$28)\quad \text{lg. br. } 1^{-\frac{n}{m}|1} = 9 \lg m - \lg (m-n)^{9|m} + (10 - \tfrac{n}{m} - \tfrac{1}{2}) \lg \frac{10m-n}{m} + \tfrac{1}{2} \lg 2\pi$$
$$- 4{,}33932690130263773 \ldots.$$
$$+ \frac{n}{m}\, 0{,}434656033765051676 \ldots.$$
$$+ \frac{n^2}{m^2}\, 0{,}000036119334349867 \ldots.$$
$$+ \frac{n^3}{m^3}\, 0{,}000003607175470860 \ldots.$$
$$+ \frac{n^4}{m^4}\, 0{,}000000360126109823 5 \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

§. 23.

Eine andere Art, den Logarithmen einer Facultät auszudrücken, ist folgende. Nimmt man den *Taylor*'schen Lehrsatz zu Hülfe, so lässt sich die Function $R(\frac{x+nd}{d})$ in (5. §. 21.) in eine Reihe entwickeln, welche nach den Potenzen von nd fortläuft. Es ist nämlich

$$1)\quad R(\frac{x+nd}{d}) = R(\frac{x}{d}) + \frac{\partial R(\frac{x}{d})}{\partial x} nd + \frac{\partial^2 R(\frac{x}{d})}{1.2.(\partial x)^2} n^2 d^2 + \frac{\partial^3 R(\frac{x}{d})}{1.2.3 (\partial x)^3} . n^3 d^3.$$

Die Lösung der Aufgabe ist demnach darauf zurückgebracht, die Differentiale der Function $R(\frac{x}{d})$ zweckmässig darzustellen. Hiezu dient die Gleichung (5. §. 21.) selbst. Sie giebt

$$R(\frac{x}{d}) = R(\frac{x+kd}{d}) - \lg x^{k|d}.$$

Hieraus geht hervor, dass die Darstellung der Differentiale der Function $R(\frac{x}{d})$ von dem Exponenten k unabhängig ist; denn der Werth von $R(\frac{x}{d})$ bleibt für ein und dasselbe d und x unverändert, wie auch der Exponent k sich ändern mag. Dies gestattet, den Exponenten so anzunehmen, dass sich die Differentiale von $R(\frac{x}{d})$ leicht finden lassen; und dies ist der Fall, wenn k unendlich gross angenommen wird, weil alsdann die Glieder in der Function $R(\frac{x+kd}{d})$ vom vierten an verschwinden. Setzt man daher α statt k, so erhält man

$$2)\quad R\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{x+ad}{d}\lg(x+ad) - \frac{x+ad}{d} - \tfrac{1}{2}\lg(x+ad)$$
$$-(\lg x + \lg(x+d) + \lg(x+2d) + \lg(x+3d) \ldots .$$

Bemerkt man nun, dass

$$\partial^p \lg(x+rd) = (-)^{p-1}\frac{1.2.3\ldots.(p-1)}{(x+rd)^p},$$

so ergeben sich aus (2.) die gesuchten Differentiale und es ist

$$\frac{\partial R(\frac{x}{d})}{\partial x} = \frac{1}{d}\lg(x+ad) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+d} + \frac{1}{x+2d} + \frac{1}{x+3d}\ldots.\right)$$

$$\frac{\partial^2 R(\frac{x}{d})}{1.2(\partial x)^2} = +\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+d)^2} + \frac{1}{(x+2d)^2} + \frac{1}{(x+3d)^2} + \ldots.\right)$$

$$\frac{\partial^3 R(\frac{x}{d})}{1.2.3.(\partial x)^3} = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x+d)^3} + \frac{1}{(x+2d)^3} + \frac{1}{(x+3d)^3} + \ldots.\right)$$

u. s. w. Nun ist (S. 16ten Bd. d. Journ. S. 138. §. 127.)

$$3)\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+d} + \frac{1}{x+2d} + \frac{1}{x+3d} + \ldots.$$
$$= \frac{1}{d}\lg(x+ad) - \frac{1}{d}\lg x + \frac{1}{2x} + \frac{d}{2.6x^2} - \frac{d^3}{4.30x^4} + \ldots.$$
$$= \frac{1}{d}\lg(x+ad) + C.$$

Ferner ist (S. 14ten Bd. d. Journ. S. 330. §. 78.)

$$4)\quad \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+d)^p} + \frac{1}{(x+2d)^p} + \frac{1}{(x+3d)^p}$$
$$= \frac{1}{(p-1)x^{p-1}d} + \frac{1}{2x^p} + \frac{pd}{2.6x^{p+1}} - \frac{p^{3|1}d^3}{4.30x^{p+3}}.$$

Diese Gleichungen (3. und 4.) lassen sich auch aus (12. §. 19. und 2. §. 21.) ableiten. Deutet man den Werth von (3.) durch $\Sigma_0^\alpha \frac{1}{(x+rd)^p}$ an, wo für r die Werthe von 0 bis ins Unendliche zu setzen sind, so ergiebt sich aus (5. §. 21.) und aus den hier entwickelten Gleichungen:

$$5)\quad \lg x^{n|d} = -Cnd + \tfrac{1}{2}n^2d^2\Sigma_0^\alpha\frac{1}{(x+rd)^2} - \tfrac{1}{3}n^3d^3\Sigma_0^\alpha\frac{1}{(x+rd)^3} + \tfrac{1}{4}n^4d^4\Sigma_0^\alpha\frac{1}{(x+rd)^4} - \ldots.$$

Diese Gleichung löset die Aufgabe in aller Allgemeinheit auf. Der Exponent kann eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bedeuten. Eben so kann d positiv oder negativ sein. Geht man auf den einfachsten Fall $d = 1$ und $x = 1$ zurück, was um so mehr geschehen kann, da, wie in

(§. 11.) gezeigt, jede Facultät auf diese Form zurückgebracht werden kann, so erhält man

$$6)\quad \lg 1^{n|1} = -Cn + \frac{n^2}{2}\Sigma_1^\alpha \frac{1}{r^2} - \frac{n^3}{3}\Sigma_1^\alpha \frac{1}{r^3} + \frac{n^4}{4}\Sigma_1^\alpha \frac{1}{r^4} - \ldots.$$

Diese Gleichung lässt sich auch noch zweckmässiger umformen. Man kann nämlich in jeder Reihe, welche $\Sigma_1^\alpha \frac{1}{r^2}$, $\Sigma_1^\alpha \frac{1}{r^3}$ .... ausdrückt, das erste Glied ausscheiden. Wird dann in (6.) x statt r gesetzt, so ergiebt sich

$$7)\quad \lg 1^{n|1} = -Cn + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{3} + \frac{n^4}{4} - \frac{n^5}{5} + \ldots.$$
$$+ \frac{n^2}{2}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^2} - \frac{n^3}{3}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^3} + \frac{n^4}{4}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^4} - \ldots.$$

Nun ist bekanntlich

$$\frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{3} + \frac{n^4}{4} - \frac{n^5}{5} + \ldots. = +n - \lg(1+n);$$

demnach ist aus (7.)

$$8)\quad \lg 1^{n|1} = -\lg(1+n) + (1-C)n + \frac{n^2}{2}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^2} - \frac{n^3}{3}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^3} + \ldots.$$

Diese Gleichung gilt, wie bemerkt, für jeden Werth von n. Sie eignet sich, wie leicht zu sehen, besonders zur Darstellung von Facultäten, deren Exponenten *Brüche* sind. Man hat dann für die Werthe von C die Constante der harmonischen Reihen und die Summen der reciproken Potenzenreihen zu setzen. Es ergiebt sich

$$9)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = -\lg\left(\frac{m+n}{m}\right) + \frac{n}{m}\, 0{,}4227\ 8433\ 2509\ 8467\ 13\ \ldots.$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{n^2}{m^2}\, 0{,}6449\ 3406\ 6848\ 2264\ \ldots.$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{n^3}{m^3}\, 0{,}2020\ 5690\ 3159\ 5943\ \ldots.$$
$$- \frac{1}{4}\frac{n^4}{m^4}\, 0{,}0823\ 2323\ 3711\ 1382\ \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für einen negativen Exponenten ist

$$10)\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = -\lg\left(\frac{m-n}{m}\right) - (1-C)\frac{n}{m} + \frac{n^2}{2m^2}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^2} + \frac{n^3}{3m^3}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^3} + \frac{n^4}{4m^4}\Sigma_2^\alpha \frac{1}{x^4} + \ldots.$$

$$11)\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = 1 - \lg\left(\frac{m-n}{m}\right) - \frac{n}{m}\; 0{,}4227\,8433\,1509\,8467$$
$$+ \frac{n^2}{2.m^2}\; 0{,}6449\,3406\,6848\,2264$$
$$+ \frac{n^3}{3m^3}\; 0{,}2020\,5690\,3159\,5943$$
$$+ \frac{n^4}{4m^4}\; 0{,}0823\,2323\,3711\,1382$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die hier entwickelten Formeln lassen sich gut benutzen, wenn $\frac{n}{m}$ ein sehr kleiner Bruch ist, weil dann die Potenzen von $\frac{n}{m}$ schnell convergiren. Ist $\frac{n}{m}$ ein Bruch, der sich $\frac{1}{2}$ nähert, so sind viele Rechnungen nöthig, um den Werth von $1^{\frac{n}{m}|1}$ auf mehrere Decimalstellen genau zu finden. In diesem Falle sind die Ausdrücke des vorigen Paragraph vorzuziehen.

Bei der Darstellung der Werthe von $\lg 1^{\frac{n}{m}|1}$ und $\lg 1^{-\frac{n}{m}|1}$ sind, wie bemerkt, die Werthe der Summen der reciproken Potenzenreihen nöthig. *Euler* hat diese Summen (2ter Thl. d. Differenz. Rechnung 6tes Cap. §. 151.) bis zur sechszehnten Potenz und bis auf sechszehn Decimalstellen berechnet. *Legendre* hat sie (Exercices d. calc. intégr. T. II. Pg. 65.) bis zur 35sten Potenz und ebenfalls bis auf sechzehn Decimalstellen berechnet, weil er fand, dass einige von *Euler* angegebene Summen nicht richtig sind. Die Unterschiede in den von Beiden mitgetheilten Resultaten kommen bei den Summenausdrücken der 5ten, 7ten, 11ten und 13ten Potenz vor. Um mich von der Zuverlässigkeit der von den beiden Schriftstellern mitgetheilten Resultate zu überzeugen und die richtigere Angabe zu finden, habe ich den Werth der Reihe $\Sigma_1^\alpha \frac{1}{x^5}$ nach der (im 14ten Bd. d. Journ. No. 23. S. 330. §. 78.) angegebenen Methode berechnet und folgendes Resultat gefunden:

$$\Sigma_1^\alpha \frac{1}{x^5} = 1{,}0369\,2775\,5143\,3699\,26\ldots.$$

Dieses Resultat ist bis zur achtzehnten Stelle richtig und stimmt mit dem von *Legendre*. Letzterer giebt

$$\Sigma_1^\alpha \frac{1}{x^5} = 1{,}0369\,2775\,5143\,3700.$$

Euler hat

$$\Sigma_1^a \frac{1}{x^5} = 1{,}0369\ 2775\ 5106\ 8632;$$

was allerdings von dem obigen sehr verschieden ist. Die Unterschiede der Summenausdrücke der 11ten und 13ten Potenzen in den von *Euler* und *Legendre* angegebenen Resultaten sind unbedeutend und scheinen von Druckfehlern herzurühren. Da es nöthig ist, die Werthe der genannten Summenausdrücke zu kennen, so sollen dieselben hieher gesetzt werden. Der Kürze wegen bezeichnen wir sie durch $S_1, S_2, S_3 \ldots\ldots$ Es ist

$$C = 0{,}5772\ 1566\ 4901\ 5328\ 606\ldots\ldots$$
$$S_2 = 0{,}6449\ 3406\ 6848\ 2264$$
$$S_3 = 0{,}2020\ 5690\ 3159\ 5943$$
$$S_4 = 0{,}0823\ 2323\ 3711\ 1382$$
$$S_5 = 0{,}0369\ 2775\ 5143\ 3699$$
$$S_6 = 0{,}0173\ 4306\ 1984\ 4491$$
$$S_7 = 0{,}0083\ 4927\ 7381\ 0227$$
$$S_8 = 0{,}0040\ 7735\ 6197\ 9443$$
$$S_9 = 0{,}0020\ 0839\ 2826\ 0822$$
$$S_{10} = 0{,}0009\ 9457\ 5127\ 8180$$
$$S_{11} = 0{,}0004\ 9418\ 8604\ 1194$$
$$S_{12} = 0{,}0002\ 4608\ 6553\ 3080$$
$$S_{13} = 0{,}0001\ 2271\ 3347\ 5785$$
$$S_{14} = 0{,}0000\ 6124\ 8135\ 0587$$
$$S_{15} = 0{,}0000\ 3058\ 8236\ 3070$$
$$S_{16} = 0{,}0000\ 1528\ 2259\ 4086$$
$$S_{17} = 0{,}0000\ 0763\ 7197\ 6379$$
$$S_{18} = 0{,}0000\ 0381\ 7293\ 2650$$
$$S_{19} = 0{,}0000\ 0190\ 8212\ 7166$$
$$S_{20} = 0{,}0000\ 0095\ 3962\ 0339$$
$$S_{21} = 0{,}0000\ 0047\ 6932\ 9868$$
$$S_{22} = 0{,}0000\ 0023\ 8450\ 5027$$
$$S_{23} = 0{,}0000\ 0011\ 9219\ 9260$$
$$S_{24} = 0{,}0000\ 0005\ 9608\ 1891$$
$$S_{25} = 0{,}0000\ 0002\ 9803\ 5035$$
$$S_{26} = 0{,}0000\ 0001\ 4901\ 5548$$
$$S_{27} = 0{,}0000\ 0000\ 7450\ 7118$$
$$S_{28} = 0{,}0000\ 0000\ 3725\ 3340$$

$$S_{29} = 0{,}0000\ 0000\ 1862\ 6597$$
$$S_{30} = 0{,}0000\ 0000\ 0931\ 3274$$
$$S_{31} = 0{,}0000\ 0000\ 0465\ 6629$$
$$S_{32} = 0{,}0000\ 0000\ 0232\ 8312$$
$$S_{33} = 0{,}0000\ 0000\ 0116\ 4155$$
$$S_{34} = 0{,}0000\ 0000\ 0058\ 2077$$
$$S_{35} = 0{,}0000\ 0000\ 0029\ 1038.$$

Diese Werthe können für die Rechnung noch zweckmässiger dargestellt werden, wenn man die Division mit den den Gliedern zugehörigen Nennern $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... ausführt. Dies giebt

$$\tfrac{1}{2}S_2 = 0{,}3224\ 6703\ 3424\ 1132$$
$$\tfrac{1}{3}S_3 = 0{,}0073\ 5230\ 1053\ 1981$$
$$\tfrac{1}{4}S_4 = 0{,}0205\ 8080\ 8427\ 7845$$
$$\tfrac{1}{5}S_5 = 0{,}0073\ 8555\ 1028\ 6739$$
$$\tfrac{1}{6}S_6 = 0{,}0028\ 9051\ 0330\ 7415$$
$$\tfrac{1}{7}S_7 = 0{,}0011\ 9275\ 3911\ 7032$$
$$\tfrac{1}{8}S_8 = 0{,}0005\ 0966\ 9524\ 7430$$
$$\tfrac{1}{9}S_9 = 0{,}0002\ 2315\ 4758\ 4535$$
$$\tfrac{1}{10}S_{10} = 0{,}0000\ 9945\ 7512\ 7818$$
$$\tfrac{1}{11}S_{11} = 0{,}0000\ 4492\ 6236\ 7381$$
$$\tfrac{1}{12}S_{12} = 0{,}0000\ 2050\ 7212\ 7756$$
$$\tfrac{1}{13}S_{13} = 0{,}0000\ 0943\ 9488\ 2752$$
$$\tfrac{1}{14}S_{14} = 0{,}0000\ 0437\ 4866\ 7899$$
$$\tfrac{1}{15}S_{15} = 0{,}0000\ 0203\ 9215\ 7538$$
$$\tfrac{1}{16}S_{16} = 0{,}0000\ 0095\ 5141\ 2130$$
$$\tfrac{1}{17}S_{17} = 0{,}0000\ 0044\ 9246\ 9198$$
$$\tfrac{1}{18}S_{18} = 0{,}0000\ 0021\ 2071\ 8480$$
$$\tfrac{1}{19}S_{19} = 0{,}0000\ 0010\ 0432\ 2482$$
$$\tfrac{1}{2}S_{20} = 0{,}0000\ 0004\ 7698\ 1016\ 9$$
$$\tfrac{1}{21}S_{21} = 0{,}0000\ 0002\ 2711\ 0946$$
$$\tfrac{1}{22}S_{22} = 0{,}0000\ 0001\ 0838\ 6592\ 1$$
$$\tfrac{1}{23}S_{23} = 0{,}0000\ 0000\ 5183\ 4750\ 4$$
$$\tfrac{1}{24}S_{24} = 0{,}0000\ 0600\ 2483\ 6745\ 4$$
$$\tfrac{1}{25}S_{25} = 0{,}0000\ 0000\ 1192\ 1401\ 4$$
$$\tfrac{1}{26}S_{25} = 0{,}0000\ 0000\ 0573\ 1367\ 2$$
$$\tfrac{1}{27}S_{27} = 0{,}0000\ 0000\ 0275\ 9522$$

$$\tfrac{1}{28}S_{28} = 0{,}0000\ 0000\ 0133\ 0476\ 4$$
$$\tfrac{1}{29}S_{29} = 0{,}0000\ 0000\ 0064\ 2296\ 4$$
$$\tfrac{1}{30}S_{30} = 0{,}0000\ 0000\ 0031\ 0442$$
$$\tfrac{1}{31}S_{31} = 0{,}0000\ 0000\ 0015\ 0213$$
$$\tfrac{1}{32}S_{32} = 0{,}0000\ 0000\ 0007\ 2759\ 7$$
$$\tfrac{1}{33}S_{33} = 0{,}0000\ 0000\ 0003\ 5277\ 4$$
$$\tfrac{1}{34}S_{34} = 0{,}0000\ 0000\ 0001\ 7199$$
$$\tfrac{1}{35}S_{35} = 0{,}0000\ 0000\ 0000\ 83154.$$

Führt man nun diese Werthe in (9. und 11.) ein, so ergiebt sich:

$$12)\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = -\lg\frac{m+n}{m} + \frac{n}{m}\,0{,}4227\ 8433\ 3509\ 8467\ \ldots.$$
$$+\frac{n^2}{m^2}\,0{,}3224\ 6703\ 3424\ 1132$$
$$-\frac{n^3}{m^3}\,0{,}0673\ 5230\ 1053\ 1981$$
$$+\frac{n^4}{m^4}\,0{,}0205\ 8080\ 8427\ 7845$$
$$-\frac{n^5}{m^5}\,0{,}0073\ 8555\ 1028\ 6739\ 8$$
$$+\frac{n^6}{m^6}\,0{,}0028\ 9051\ 0330\ 7415$$
$$-\frac{n^7}{m^7}\,0{,}0011\ 9275\ 3911\ 7032$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$13)\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = -\lg\left(\frac{m+n}{m}\right) - \frac{n}{m}\,0{,}4227\ 8433\ 5098\ 4671$$
$$+\frac{n^2}{m^2}\,0{,}3224\ 6703\ 3424\ 1132$$
$$+\frac{n^3}{m^3}\,0{,}0673\ 5230\ 3053\ 1981$$
$$+\frac{n^4}{m^4}\,0{,}0205\ 8080\ 8427\ 7845$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Ausdrücke gelten für *natürliche* Logarithmen. Man kann sie in andere für Briggische Logarithmen umformen, wenn man sämmtliche Glieder mit dem Modul 0,4342 9448 1 .... multiplicirt. Dies giebt

$$14)\quad \lg.\,\text{br.}\,1^{\frac{n}{m}|1} = -\lg.\,\text{br.}\,\frac{m+n}{m} + \frac{n}{m}\,0{,}1836\,1290\,3768\,40$$
$$+ \frac{n^2}{m^2}\,0{,}1400\,4565\,3211\,8$$
$$- \frac{n^3}{m^3}\,0{,}0292\,5073\,2691\,7$$
$$+ \frac{n^4}{m^4}\,0{,}0089\,3813\,1534$$
$$- \frac{n^5}{m^5}\,0{,}0032\,0759\,4058$$
$$+ \frac{n^6}{m^6}\,0{,}0012\,5533\,2686$$
$$- \frac{n^7}{m^7}\,0{,}0005\,1800\,6442$$
$$+ \frac{n^8}{m^8}\,0{,}0002\,2134\,6662$$
$$- \frac{n^9}{m^9}\,0{,}0000\,9691\,4880$$
$$+ \frac{n^{10}}{m^{10}}\,0{,}0000\,4319\,3849$$
$$- \frac{n^{11}}{m^{11}}\,0{,}0000\,1951\,1217$$
$$+ \frac{n^{12}}{m^{12}}\,0{,}0000\,0890\,6169$$
$$- \frac{n^{13}}{m^{13}}\,0{,}0000\,0409\,9517$$
$$+ \frac{n^{14}}{m^{14}}\,0{,}0000\,0189\,9989$$
$$- \frac{n^{15}}{m^{15}}\,0{,}0000\,0088\,5620$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

$$15)\quad \lg.\,\text{br.}\,1^{-\frac{n}{m}|1} = -\lg\frac{m-n}{m} - \frac{n}{m}\,0{,}1836\,1290\,3768\,40$$
$$+ \frac{n^2}{m^2}\,0{,}1400\,4565\,3211\,8$$
$$+ \frac{n^3}{m^3}\,0{,}0292\,5073\,2691\,7$$
$$+ \frac{n^4}{m^4}\,0{,}0089\,3813\,1534$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Sucht man nun nach den obigen Formeln den natürlichen Logarithmen von $1^{\pm k|1}$, so ergiebt sich aus (12.):

$$-\lg 1{,}01 = -0{,}0099\,5033\,0853\,1680\,82\ldots.$$

Für den Werth der begleitenden Reihe erhält man

$$K = 0{,}0042\,6002\,2907\,0984\,3\ldots.$$

Dies giebt

$$16)\qquad \lg \text{nat.}\, 1^{\frac{1}{100}|1} = -0{,}0056\,9030\,7946\,0696\,5\ldots.$$

Aus dem hier und im vorigen Paragraph gefundenen Werthe von $\lg 1^{\frac{1}{100}|1}$ ergiebt sich, dass der Logarithme bis zur sechszehnten Decimalstelle richtig ist.

Benutzt man die Formeln (14. und 15.), welche für gemeine Logarithmen gelten, so zeigt sich, dass die Werthe der Logarithmen bis zur neunten Decimalstelle richtig sich finden lassen. Man erhält aus (14.)

$$17)\qquad \lg \text{brigg.}\, 1^{\frac{1}{100}|1} = -0{,}0024\,7126\,94.$$

Dieser Werth ist bis zur neunten Decimalstelle richtig.

§. 24.

Zu den bisher gegebenen Methoden, den Logarithmen einer Facultät zu berechnen, theilen wir noch folgende mit.

Wird in (3. §. 21.) $x=1$, $d=1$ gesetzt, so ergiebt sich, mit Rücksicht auf (5. und 14. §. 21.):

$$1)\qquad \lg 1^{n|1} = (n+1)\lg(n+1) - n - 1 - \tfrac{1}{2}\lg(n+1) + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$+ \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{360(n+1)^3} + \frac{1}{1260(n+1)^5} - \ldots.$$

Bezeichnen wir nun die Reihe rechts durch S und die Vorzahlen ihrer Glieder, wie früher, durch $a_1, a_2, a_3 \ldots.$ und benutzen das Binomium

$$2)\qquad \frac{1}{(x+a)^m} = \frac{1}{x^m} - [m]_1 \frac{a}{x^{m+1}} + [m]_2 \frac{a^2}{x^{m+2}} - [m]_3 \frac{a^3}{x^{m+3}} + \ldots.$$

zur Entwicklung der Nenner in S, so lässt sich einerseits $x=n$ und $a=1$, und dann $x=1$ und $n=a$ setzen. Im ersten Fall entsteht eine Reihe, deren Glieder nach den fallenden Potenzen von n, im andern eine Reihe, deren Glieder nach den steigenden Potenzen geordnet sind. Demnach ist

$$3)\qquad S = \frac{a_1}{n} - \frac{a_1}{n^2} + \frac{a_1}{n^3} - \frac{a_1}{n^4} + \frac{a_1}{n^5} - \frac{a_1}{n^6} + \frac{a_1}{n^7} - \ldots.$$
$$- \frac{a_3}{n^3} + [3]_1\frac{a_3}{n^4} - [3]_2\frac{a_3}{n^5} + [3]_3\frac{a_3}{n^6} - [3]_4\frac{a_3}{n^7} + \ldots.$$
$$+ \frac{a_5}{n^5} - [5]_1\frac{a_5}{n^6} + [5]_2\frac{a_5}{n^7} - \ldots.$$
$$- \frac{a_7}{n^7} + \ldots.$$

Bezeichnet man die Vorzahl des $r$ten Gliedes dieser Reihe durch B_r, so ist die Form dieses Gliedes folgende Reihe:

$$4)\quad B_r n^{-r} = (-)^{r-1}(a_1 - [3]_{r-3} a_3 + [5]_{r-5} a_5 - [7]_{r-7} a_7 \ldots .)n^{-r}.$$

Die eingeklammerte Reihe bricht ab, wenn $r - s$ negativ werden sollte. Demnach ergiebt sich folgender entwickelte Ausdruck:

$$\begin{aligned}5)\quad \lg 1^{n|1} = (n+\tfrac{1}{2})\lg(n+1) - (n+1) + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi \\ + a_1 n^{-1} - a_1 n^{-2} + (a_1 - a_3)n^{-3} - (a_1 - [3]_1 a_3)n^{-4} \\ + (a_1 - [3]_2 a_3 + a_5)n^{-5} \\ - (a_1 - [3]_3 a_3 + [5]_1 a_5)n^{-6} \\ + (a_1 - [3]_4 a_3 + [5]_2 a_5 - a_7)n^{-7} \\ - (a_1 - [3]_5 a_3 + [5]_3 a_5 - [7]_1 a_7)n^{-8} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

In dieser Gestalt ist die Gleichung nicht brauchbar. Man kann sie aber umändern, wenn man die Werthe für $a_1, a_2, a_3 \ldots .$, die in (14. §. 22.) angegeben sind, einführt. Dann ergeben sich für die Vorzahlen der Glieder der begleitenden Reihe folgende Werthe:

$$\begin{aligned}6)\quad B_1 &= \tfrac{1}{12} &&= 0{,}0833\ 3 \ldots . \\ B_2 &= \tfrac{1}{12} &&= 0{,}0833\ 3 \ldots . \\ B_3 &= \tfrac{29}{360} &&= 0{,}0805\ 55 \ldots . \\ B_4 &= \tfrac{3}{40} &&= 0{,}075 \ldots . \\ B_5 &= \tfrac{17}{252} &&= 0{,}0674\ 6031\ 7460\ 31 \ldots . \\ B_6 &= \tfrac{5}{84} &&= 0{,}0595\ 2380\ 9523\ 80 \ldots . \\ B_7 &= \tfrac{89}{1680} &&= 0{,}0529\ 7619\ 0476\ 1904 \ldots . \\ B_8 &= \tfrac{7}{144} &&= 0{,}0486\ 111 \ldots . \\ B_9 &= \tfrac{269}{5940} &&= 0{,}0452\ 8619\ 5286\ 19 \ldots . \\ B_{10} &= \tfrac{9}{220} &&= 0{,}0409\ 0909\ 0 \ldots . \\ B_{11} &= \tfrac{12959}{360360} &&= 0{,}0359\ 6126\ 0961\ 2609 \ldots . \\ B_{12} &= \tfrac{11}{312} &&= 0{,}0352\ 5641\ 0256\ 4102 \ldots . \\ B_{13} &= \tfrac{43}{1092} &&= 0{,}0393\ 7728\ 9377\ 2893 \ldots .\end{aligned}$$

u. s. w. Aus (5.) ergiebt sich

$$7)\quad \lg 1^{n|1} = (n+\tfrac{1}{2})\lg(1+n) - (n+1) + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$+\frac{1}{12n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{29}{360n^3} - \frac{3}{40n^4} + \frac{17}{252n^5} - \frac{5}{84.n^6} + \dots$$

Diese Reihe eignet sich besonders zur Berechnung der Werthe der Facultäten von grosser Factorenzahl. Sie wird dieselben um so genauer geben, je grösser n ist. Entwickelt man die Glieder von S in No. 1., indem man in (2.) $x=1$, $a=n$ setzt, so erhält man

$$\begin{aligned}8)\quad S = {} & a_1 - a_1 n + a_1 n^2 - a_1 n^3 + a_1 n^4 - a_1 n^5 + \dots \\ & - a_3 + 3a_3 n - [3]_2 a_3 n^2 + [3]_3 a_3 n^3 - [3]_4 a_3 n^4 + [3]_5 a_3 n^5 - \dots \\ & + a_5 - 5a_5 n + [5]_2 a_5 n^2 - [5]_3 a_5 n^3 + [5]_4 a_5 n^4 - [5]_5 a_5 n^5 + \dots \\ & - a_7 + 7a_7 n - [7]_2 a_7 n^2 + [7]_3 a_7 n^3 - [7]_4 a_7 n^4 + [8]_5 a_7 n^5 - \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Ordnet man nun den Ausdruck (8.) nach den steigenden Potenzen von n und bezeichnet der Kürze wegen die Vorzahlen der Reihe durch D_0, D_1, D_2 .... so ergiebt sich folgendes Gesetz für das $(r+1)$te Glied:

$$9)\quad D_r n^r = (-)^r (a_1 - [3]_r a_3 + [5]_r a_5 - [7]_r a_7 + [9]_r a_9 - \dots).$$

Die Glieder dieser Reihe laufen ins Unendliche fort. Man kann jetzt die Werthe von a_1, a_2, a_3 .... auf die *Bernoulli*schen Zahlen bringen. Es geschieht durch folgende Bestimmungen nach (13. und 14. §. 22.):

$$a_1 = \frac{\mathfrak{A}}{1.2},\quad a_3 = \frac{\mathfrak{B}}{3.4},\quad a_5 = \frac{\mathfrak{C}}{5.6},\quad a_7 = \frac{\mathfrak{D}}{7.8}\dots,$$

wo nach *Eulers* Vorgang $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ... der Reihe nach die *Bernoulli*schen Zahlen bezeichnen. Benutzt man jetzt die Gleichung (9.), so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}10)\quad D_0 &= \frac{\mathfrak{A}}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8} + \frac{\mathfrak{E}}{9.10} - \dots \\ D_1 &= -\left(\frac{\mathfrak{A}}{1.2} - \frac{\mathfrak{B}}{4} + \frac{\mathfrak{C}}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{8} + \frac{\mathfrak{E}}{10} - \dots\right) \\ D_2 &= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} + \mathfrak{E} - \dots) \\ D_3 &= -\tfrac{1}{3}\left(\frac{3\mathfrak{A}}{2} - \frac{5\mathfrak{B}}{2} + \frac{7\mathfrak{C}}{2} - \frac{9\mathfrak{D}}{2} + \frac{11\mathfrak{E}}{2} - \dots\right) \\ D_4 &= \tfrac{1}{4}\left(\frac{3.4}{2.3}\mathfrak{A} - \frac{5.6}{2.3}\mathfrak{B} + \frac{7.8}{2.3}\mathfrak{C} - \frac{9.10}{2.3}\mathfrak{D} + \frac{11.12}{2.3}\mathfrak{E} - \dots\right) \\ D_5 &= -\tfrac{1}{5}\left(\frac{3.4.5}{2.3.4}\mathfrak{A} - \frac{5.6.7}{2.3.4}\mathfrak{B} - \frac{7.8.9}{2.3.4}\mathfrak{C} - \frac{9.10.11}{2.3.4}\mathfrak{D} + \dots\right)\end{aligned}$$

Die in Klammern eingeschlossenen Reihen lassen sich summiren, wenn die von *Euler* (Differ.-Rechn. II. Thl. §. 158. und §. 151., 152.) gegebenen Ausdrücke benutzt werden. Es findet sich

$$11)\quad \begin{aligned}
D_0 &= 1-\tfrac{1}{2}\lg 2\pi && = 1-\tfrac{1}{2}\lg 2\pi\\
D_1 n &= -(0{,}5772\,156\;\ldots -1+\tfrac{1}{2})n && = -n.0{,}5772156\ldots+n-\tfrac{1}{2}n\\
D_2 n^2 &= \tfrac{1}{2}(0{,}6449\,340\;\ldots -1+\tfrac{1}{2})n^2 && = +\frac{n^2}{2}0{,}6449340\ldots-\frac{n^2}{2}+\tfrac{1}{2}.\frac{n^2}{2}\\
D_3 n^3 &= -\tfrac{1}{3}(0{,}2020\,5690\ldots -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})n^3 && = -\frac{n^3}{3}0{,}20205690\ldots+\frac{n^3}{2.3}+\tfrac{1}{2}.\frac{n^3}{2}\\
D_4 n^4 &= +\tfrac{1}{4}(0{,}0823\,2323\ldots -\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2})n^4 && = +\frac{n^4}{4}0{,}082323\;\ldots+\frac{n^4}{3.4}+\tfrac{1}{2}.\frac{n^4}{4}\\
D_5 n^5 &= -\tfrac{1}{5}(0{,}0369\,2775\ldots -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2})n^5 && = -\frac{n^5}{5}0{,}0369277\;\ldots+\frac{n^5}{4.5}-\tfrac{1}{2}.\frac{n^5}{5}
\end{aligned}$$

. . . .

Diesen Erörterungen zu Folge stellt sich die Gleichung (1.) unter folgender Form dar:

$$12)\quad \lg 1^{n|1} = (n+1)\lg(n+1)-n-1-\tfrac{1}{2}\lg(n+1)+\tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$+D_0+D_1 n+D_2 n^2+D_3 n^3+D_4 n^4+\ldots.$$

Sollen die Werthe für die Glieder der begleitenden Reihe aus (11. in 12.) eingeführt werden, so sind die zwei Reihen rechts des Gleichheitszeichens in (11.) zu beachten. Sie lassen sich auf folgende Weise kürzer darstellen. Es ist

$$13)\quad \begin{aligned}
-\tfrac{1}{2}\lg(n+1) &= -\tfrac{1}{2}n+\frac{n^2}{2.2}-\frac{n^3}{2.3}+\frac{n^4}{2.4}-\frac{n^5}{2.5}+\ldots\\
-(n+1)\lg(n+1) &= -\;n\;+\frac{n^2}{2}-\frac{n^3}{3}+\frac{n^4}{4}-\frac{n^5}{5}+\ldots\\
&\qquad\; -n^2+\frac{n^3}{2}-\frac{n^4}{3}+\frac{n^5}{4}-\ldots,\\
&= -\;n\;+\frac{n^2}{1.2}+\frac{n^3}{2.3}-\frac{n^4}{3.4}+\frac{n^5}{4.5}-\ldots;
\end{aligned}$$

folglich ist auch

$$14)\quad -(n+1)\lg(n+1)+2n = n-\frac{n^2}{1.2}+\frac{n^3}{2.3}-\frac{n^4}{3.4}+\frac{n^5}{4.5}-\ldots.$$

Werden nun die Werthe aus (11., 13. und 14. in 12.) eingeführt, so ergiebt sich

$$15)\quad \lg 1^{n|1} = -\lg(n+1) + (1 - 0{,}5772\,1566\ldots)n + \tfrac{1}{2}n^2 . 0{,}6449\,3406\ldots - \frac{n^3}{3} . 0{,}2020\,5690\ldots + \frac{n^4}{4} . 0{,}0823\,2323\ldots \ldots$$

Diese Reihe fällt mit der in (§. 23. 8.) zusammen, weswegen dorthin verwiesen wird.

§. 25.

Wir machen noch eine andere Anwendung von den (in §. 20.) gefundenen Gleichungen auf die Darstellung der Logarithmen von Facultäten:

Im 14ten Bd. d. Journ. (No. 18. S. 262. §. 72.) ist gezeigt, dass für jede Reihe, deren Glieder abwechselnde Zeichen haben, folgende Gleichung gilt, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$1)\quad X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \ldots + X_n = \zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-1}X_0.$$

Ist n ungerade, so ist

$$2)\quad X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \ldots - X_n = -\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-1}X_0.$$

In (§. 20.) ist gezeigt worden, wie die Functionen $\zeta^{-1}X_{n+1}$, $\zeta^{-1}X_0$ entwickelt werden. Führt man die angezeigten Operationen aus, so erhält man

$$3)\quad \lg\frac{x^{n|2d}}{(x+d)^{n-1|2d}} = \tfrac{1}{2}\lg(x+2nd) + \frac{d}{4(x+2nd)} - \frac{d^3}{8.3.(x+2nd)^3} + \frac{d^5}{4.5.(x+2nd)^5} - \ldots + \tfrac{1}{2}\lg x - \frac{d}{4x} + \frac{d^3}{8.3x^3} - \frac{d^5}{4.5x^5} + \frac{17d^7}{16.7x^7} - \ldots$$

$$4)\quad \lg\frac{x^{n|2d}}{(x+d)^{n|2d}} = -\tfrac{1}{2}\lg(x+2nd) - \frac{d}{4(x+2nd)} + \frac{d^3}{8.3.(x+2nd)^3} - \frac{d^5}{4.5.(x+2nd)^5} + \ldots + \tfrac{1}{2}\lg x - \frac{d}{4x} + \frac{d^3}{8.3x^3} - \frac{d^5}{4.5x^5} + \frac{17d^7}{16.7.x^7} - \ldots$$

Wir setzen auch hier, wie in (§. 21.), statt der beiden ins Unendliche fortlaufenden Reihen einfachere und ähnliche Zeichen und drücken die Gleichungen auf folgende Weise aus:

$$5)\quad \lg\frac{x^{n|2d}}{(x+d)^{n-1|2d}} = +\,Q\left(\frac{x+2nd}{d}\right) + S\left(\frac{x}{d}\right),$$

$$6)\quad \lg\frac{x^{n|2d}}{(x+d)^{n|2d}} = -\,Q\left(\frac{x+2nd}{d}\right) + S\left(\frac{x}{d}\right).$$

Geht man nun wieder auf einfachere Fälle über und setzt $d=1$, $x=1$, so ergiebt sich aus (3. und 4.)

$$7)\quad \lg\frac{1^{n|2}}{2^{n-1|1}} = \tfrac{1}{2}\lg(2n+1) + \frac{1}{4(2n+1)} - \frac{1}{24(2n+1)^3} + \frac{1}{20(2n+1)^5} - \dots$$

$$- \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{1}{20} + \frac{17}{112} - \dots$$

$$8)\quad \lg\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} = -\tfrac{1}{2}\lg(2n+1) - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{24(2n+1)^3} - \frac{1}{20(2n+1)^5} + \dots$$

$$- \frac{1}{4} + \frac{1}{24} - \frac{2}{20} + \frac{17}{112} - \dots$$

Es handelt sich jetzt wieder um die Werthbestimmung der Function $S(1)$. Aus (29. §. 13.) erhält man für ein unendlich-grosses n:

$$9)\quad \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|1}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Wird in (7.) n gleichfalls unendlich-gross gesetzt, so findet sich

$$10)\quad \frac{1^{n|2}}{2^{n-1|1}} = \tfrac{1}{2}\lg(2n+1) + S(1).$$

Nimmt man von 9 den Logarithmen, so erhält man aus (9. und 10.):

$$\lg 2 + \tfrac{1}{2}\lg n - \tfrac{1}{2}\lg\pi = \tfrac{1}{2}\lg(2n+1) + S(1).$$

Da nun bei unendlich-grossem n der Ausdruck $\frac{1}{2}\lg(2n+1)$ in $\frac{1}{2}\lg 2n$ übergeht, so ergiebt sich

$$11)\quad S(1) = \tfrac{1}{2}\lg\frac{2}{\pi}.$$

Der nämliche Werth lässt sich auch aus (8.) ableiten. Es ist

$$12)\quad \lg\frac{1^{n|2}}{2^{n-1|1}} = \tfrac{1}{2}\lg(2n+1) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4(2n+1)} - \frac{1}{24(2n+1)^3} + \frac{1}{20(2n+1)^5} - \dots$$

$$13)\quad \lg\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} = -\tfrac{1}{2}\lg(2n+1) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{24(2n+1)^3} - \frac{1}{20(2n+1)^5} + \dots$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht zu weitern Ableitungen benutzen. Es ist z. B. bekanntlich

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots(n+1)}{1.2.3\dots n} = \frac{2n(2n-1)\dots 3.2.1}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots n}$$

$$= \frac{1.3.5\dots(2n-1).2.4.6\dots 2n}{1.2.3\dots n.1.2.3\dots n}$$

$$= \frac{1^{n|2}.2^n}{1^{n|1}}.$$

Wird hier Zähler und Nenner mit 2^n multiplicirt, so ergiebt sich

$$14)\qquad \frac{2n(2n-1\ldots(n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{1^{n|2}.2^n.2^n}{2^{n|2}}.$$

Verbindet man (13.) mit (14.), so folgt

$$15)\quad \lg\frac{(2n)^{n|1}}{1^{n|1}} = \lg\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}} + 2n\lg 2$$
$$= 2n\lg 2 - \tfrac{1}{2}\lg(2n+1) + \tfrac{1}{2}\lg\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{24(2n+1)^3} - \frac{1}{20(2n+1)^5} + \ldots$$

und da bekanntlich

$$(2n)_n = 1 + n.n + (n)_2(n)_2 + (n)_3(n)_3 + (n)_4(n)_4 + \ldots + 1$$

ist, so hat man ferner

$$16)\quad \lg[1 + n^2 + (n)_2(n)_2 + (n)_3(n)_3 + (n)_4(n)_4 + \ldots + 1]$$
$$= (2n+\tfrac{1}{2})\lg 2 - \tfrac{1}{2}\lg(2n+1) - \lg\pi - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{24(2n+1)^3} - \frac{1}{20(2n+1)^5}$$

(Die Fortsetzung folgt.)

8.

Einiges über die Berechnung der reellen Wurzeln numerischer Gleichungen mittelst ohne Ende fortlaufender Reihen.

(Von dem Herrn Dr. *Waltinowsky* in Triest.)

Es sei $x = a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + \ldots = \psi(y)$ und $\frac{y}{\psi(y)} = \varphi(y)$, so ist nach der bekannten Umkehrungsformel:

$$y = \varphi(0)x + \tfrac{1}{2}\Phi_1(0)x^2 + \tfrac{1}{3}\Phi_2(0)\frac{x^3}{1.2} + \ldots + \frac{1}{r+1}\Phi_r(0)\frac{x^{r+1}}{1.2\ldots r} + \ldots;$$

wo $\Phi_r(0) = \frac{d^r[\varphi(z)^{r+1}]}{dz^r}$ für $z = 0$ ist.

Ist $a_1 = B_{m-1}$, $a_m = 1$ und $a_2, a_3 \ldots a_{m-1}, a_{m+1} \ldots = 0$, so wird

$$x = B_{m-1}y + y^m = \psi(y) \text{ und } \varphi(y) = \frac{1}{B_{m-1} + y^{m-1}}.$$

Da $\varphi(z) = \frac{1}{B_{m-1} + z^{m-4}}$, also $\varphi(z)^{r+1} = (B_{m-1} + z^{m-1})^{-(r+1)}$ ist, so findet sich

$$\varphi(z)^{r+1} = B_{m-1}^{-(r+1)} + \binom{-(r+1)}{1} B_{m-1}^{-(r+2)} . z^{m-1} + \binom{-(r+1)}{2} B_{m-1}^{-(r+3)} . z^{2(m-1)} + \ldots$$
$$\ldots + \binom{-(r+1)}{p} B_{m-1}^{-(r+p+1)} . z^{p(m-1)} + \ldots$$

und $\Phi(0) = 1.2.3 \ldots (r-1)r\binom{-(r+1)}{p} B_{m-1}^{-(r+p+1)}$, wo $r = p(m-1)$ sein muss. Auf diese Weise wird

$$(1) \quad y = \frac{1}{B_{m-1}}.x + \frac{1}{m}\binom{-m}{1}\frac{x^m}{B_{m-1}^{m+1}} + \frac{1}{2(m-1)+1}\binom{-(2(m-1)+1)}{2}\frac{x^{2(m-1)+1}}{B_{m-1}^{2m+1}} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{p(m-1)+1} . \binom{-(p(m-1)+1)}{p}\frac{{}^{p(m-1)+1}}{B_{m-1}^{pm+1}} + \ldots$$

Um zu untersuchen, in welchen Fällen diese Reihe convergirt, nehmen wir den Quotienten $\frac{U_{p+1}}{U_p}$ bei unendlichem Wachsen von p, wo also U_p das $p$te und U_{p+1} das $p+1$te Glied dieser Reihe bedeutet. Es findet sich:

$$\frac{U_{p+1}}{U_p} = -\frac{\begin{array}{c}((p-1)(m-1)+1).(p(m-1)+1)(p(m-1)+2)\ldots\\ (p(m-1)+p)(p(m-1)+p)x^{m-1}\end{array}}{(p(m-1)+1).((p-1)(m-1)+1)((p-1)(m-1)+2)\ldots((p-1)m-1)+p-1).p.B_{m-1}^m}$$

$$\lim.\frac{U_{p+1}}{U_p} = -\frac{(p(m-1)+1)(p(m-1)+2)\ldots(p(m-1)+p-1).m.x^{m-1}}{(p(m-1)-m+2)(p(m-1)-m+3)\ldots(p(m-1)-m+p)B_{m-1}^m}$$

$$= -\frac{(p(m-1)-m+p+1)(p(m-1)-m+p+2)\ldots(p(m-1)+p-1).mx^{m-1}}{(p(m-1)-m+2)(p(m-1)-m+3)\ldots p(m-1).B_{m-1}^m}$$

$$= -\frac{(pm-(m-1))(pm-(m-2))\ldots(pm-1).m.x^{m-1}}{(p(m-1)-(m-2))(p(m-1)-(m-3))\ldots p(m-1).B_{m-1}^m}$$

$\lim.\frac{U_{p+1}}{U_p} = -\frac{m^{m-1}}{(m-1)^{m-1}}.m.\frac{x^{m-1}}{B_{m-1}^m} = -\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}\cdot\frac{x^{m-1}}{B_{m-1}^m}$, welches über die Convergenz den nöthigen Aufschluss giebt.

Schreibt man in (1) $-B_m$ statt x, wodurch also $y_m + B_{m-1}y + B_m = 0$ wird, so ergiebt sich

$$(2)\qquad y = -\frac{B_m}{B^{m-1}} + (-1)^{m+1}\frac{B_m^m}{B_{m+1}^{m-1}} + (-1)^{2m+1}m.\frac{B_m^{2(m-1)+1}}{B_{m-1}^{2m+1}} + \ldots$$
$$+ (-1)^{pm+1}\frac{1}{p(m-1)+1}\cdot\frac{(p(m-1)+1)(p(m-1)+2)\ldots(p(m-1)+p)B_m^{p(m-1)+1}}{1.2\ldots pB_{m-1}^{pm+1}} + \ldots,$$

wo $(-1)^m\frac{m^m B_m^{m-1}}{(m-1)^{m-1}B_{m-1}^m}$ auf die bekannte Weise über die Tauglichkeit dieser Reihe zur Berechnung von y entscheidet.

Es sei z. B. $y^5+4y+2=0$, so erhält man:

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{2^5}{4^6} - 5.\frac{2^9}{4^{11}} + 35.\frac{2^{13}}{4^{16}} - \ldots$$

Nimmt man nur die drei ersten Glieder, so wird $y=0,492\,797\,8$; welches noch in der vierten Decimalstelle richtig ist.

Es sei nun $x = a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + \ldots + a_my^m = \psi(y)$, $\frac{y}{\psi(y)} = \varphi(y)$, also $\varphi(z) = \frac{1}{a_1+a_2z+a_3z^2+\ldots a_mz^{m-1}}$:

$$\varphi(z)^{r+1} = (a_1+a_2z+a_3z^2+\ldots+a_mz^{m-1})^{-(r+1)} = \overset{-(r+1)}{A_1} + \overset{-(r+1)}{A_2}z + \ldots + \overset{-(r+1)}{A_{r+1}}z^r + \ldots,$$

so wird

$$(4)\qquad y = \overset{-1}{A_1}x + \tfrac{1}{2}\overset{-2}{A_2}x^2 + \tfrac{1}{3}\overset{-3}{A_3}x^3 + \ldots + \frac{1}{r+1}\overset{-(r+1)}{A_{r+1}}z^{r+1} + \ldots,$$

wo, wie bekannt,

$$\overset{-1}{A}_1 = \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overset{-2}{A}_2 = -\frac{a_2}{a_1^3},$$

$$\frac{1}{3}\cdot\overset{-3}{A}_3 = \frac{2.a_2^2}{a_1^5} - \frac{a_3}{a_1^4},$$

$$\frac{1}{4}\cdot\overset{-4}{A}_4 = -5.\frac{a_2^3}{a_1^7} + 5.\frac{a_2.a_3}{a_1^6} - \frac{a_4}{a_1^5},$$

$$\frac{1}{5}\cdot\overset{-5}{A}_5 = 14.\frac{a_2^4}{a_1^9} - 21.\frac{a_2^2a_3}{a_1^8} + 6.\frac{a_2a_4}{a_1^7} + 3.\frac{a_3^2}{a_1^7} - \frac{a_5}{a_1^6},$$

$$\frac{1}{6}\cdot\overset{-6}{A}_6 = 42.\frac{a_2^5}{a_1^{11}} + 84.\frac{a_2^3a_3}{a_1^{10}} - 28.\frac{a_2^2a_4}{a_1^9} - 28.\frac{a_2a_3^2}{a_1^9} + 7.\frac{a_2a_5}{a_1^8} + 7.\frac{a_3.a_4}{a_1^8} - \frac{a_6}{a_1^7}$$

. . . .

ist. Nun ist für $r > m$:

$$\overset{n}{A}_r = \frac{(n-(r-2))a_2\overset{n}{A}_{r-1} + (2n-(r-3))a_3\overset{n}{A}_{r-2} + (3n-(r-4))a_4\overset{n}{A}_{r-3} + \ldots + ((m-1)n-(r-m))a_m\overset{n}{A}_{r-m+1}}{(r-1)a_1},$$

also

$$\overset{-n}{A}_r = -\frac{(n+r-2)a_2\overset{-n}{A}_{r-1} + (2n+r-3)a_3\overset{-n}{A}_{r-2} + (3n+r-4)a_4\overset{-n}{A}_{r-3} + \ldots + ((m-1)n+r-m)a_m\overset{-n}{A}_{r-m+1}}{(r-1)a_1}$$

daher

$$(\alpha)\qquad \overset{-r}{A}_r = -\frac{2a_2\overset{-r}{A}_{r-1} + 3a_3\overset{-r}{A}_{r-2} + 4a_4\overset{-r}{A}_{r-3} + \ldots + m.a_m\overset{-r}{A}_{r-m+1}}{a_1}.$$

Da $(a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots a_mz^{m-1})^{-(r+1)}.(a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots + a_mz^{m-1})$ $= (a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots + a_mz^{m-1})^{-r}$ und $(\overset{-(r+1)}{A}_1 + \overset{-(r+1)}{A}_2z + \ldots + \overset{-(r+1)}{A}_rz^{r-1} + \ldots).(a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots + a_mz^{m-1})$ $= \overset{-r}{A}_1 + \overset{-r}{A}_2z + \ldots + \overset{-r}{A}_rz^{r-1} + \ldots$ ist, so findet sich

$$(\beta)\qquad a_1\overset{-(r+1)}{A}_r + a_2\overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + a_3\overset{-(r+3)}{A}_{r-2} + a_4\overset{-(r+1)}{A}_{r-3} + \ldots + a_{m-1}\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2} + a_m\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1} = \overset{-r}{A}_r.$$

Schreibt man in (α) $r+1$ statt r, so ergiebt sich

$$(\gamma)\qquad \overset{-(r+1)}{A}_{r+1} = -\frac{2a_2\overset{-(r+1)}{A}_r + 3a_3\overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + 4a_4\overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + \ldots + m.a_m\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2}}{a_1},$$

also vermöge (γ) und (β):

$$\frac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r} = -\frac{2a_2\overset{-(r+1)}{A}_r + 3.a_3\overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + 4a_4\overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + \ldots + m.a_m\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2}}{a_1\left(a_1\overset{-(r+1)}{A}_r + a_2\overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + a_3\overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + \ldots + a_m\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}\right)}.$$

$$(\delta)\qquad \frac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r} = -\frac{2a_2+3a_3\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-1}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}+4a_4\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-2}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}+5a_5\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-3}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}+\dots+m.a_m\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}}{a_1\left(a_1+a_2\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-1}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}+a_3\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-2}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}+a_4\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-3}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}+\dots+a_m\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}\right)}.$$

Die allgemeine Form der einzelnen Glieder von

$$(a_1+a_2z+a_3z^2+\dots+a_mz^{m-1})^{-(r+1)} \text{ ist:}$$

$$(\varepsilon)\quad \binom{-(r+1)}{p_1}\binom{p_1}{p_1}\binom{p_2}{p_3}\dots\binom{p_{m-2}}{p_{m-1}}a_1^{-(r+p+1)}a_2^{p_1-p_2}a_3^{p_2-p_3}\dots a_{m-1}^{p_{m-2}-p_{m-1}}.a_m^{p_{m-1}}z^{p_1+p_2+p_3\dots+p_{m-1}},$$

wo $p_1, p_2, p_3, \dots p_{m-1}$ ganze, positive, an die Bedingung $p_2 \leqq p$, $p_3 \leqq p_2$, $\dots p_{m-2} \leqq p_{m-3}$, $p_{m-1} \leqq p_{m-2}$ gebundene Zahlen vorstellen, und jene der Glieder, welche z mit dem Exponenten s haben, eben dieselben, unter der Bedingung jedoch, dass noch überdies $p_1 \leqq s$ und $p_1+p_2+p_3+\dots+p_{m-1}=s$ sein müsse.

Nun sei a_1 negativ und sämmtliche Grössen $a_2, a_3, \dots a_m$ seien positiv, so werden die den Coefficienten von z^s in $(a_1+a_2z+\dots+a_mz^{m-1})^{-(r+1)}$ bildenden Bestandtheile sämmtlich dasselbe Zeichen erhalten; und zwar wird das Zeichen positiv sein, wenn $r+1$ gerade, und negativ, wenn $r+1$ ungerade ist; woraus auch folgt, dass bei dieser Annahme $\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r}$ immer negativ sein muss. Aus eben diesem Grunde erhalten die Brüche

$\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-1}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}$, $\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-2}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}$, $\dots$ $\dfrac{\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}}{\overset{-(r+1)}{A}_r}$ sämmtlich das Zeichen $+$ und $\dfrac{\overset{-r}{A}_r}{\overset{-(r+1)}{A}_r}$, oder der Ausdruck innerhalb der Klammern im Nenner von (δ), ist negativ.

Die durch $\overset{-(r+1)}{A}_s$ und $\overset{-r}{A}_r$ vorgestellten Grössen weichen, wie man aus der allgemeinen Form der sie bildenden Bestandtheile sieht, nur insofern von einander ab, als in ersterer $-(r+1)$ an die Stelle von $-r$ in letzterer zu stehen kommt. Der Unterschied dieser Bestandtheile liegt also nur in den Factoren $\binom{-(r+1)}{p_1}a_1^{-(r+p_1+1)}$, welche in $\overset{-(r+1)}{A}_s$, und $\binom{-r}{p_1}a_1^{-(r+p_1)}$, welche in $\overset{-r}{A}_r$ vorkommen. Dividirt man $\binom{-r}{p_1}a_1^{-(r+p_1)}$ durch $\binom{-(r+1)}{p_1}a_1^{-(r+p_1+1)}$; so findet sich $\dfrac{r}{r+p_1}.a_1$, welches mit p_1 verschiedene Werthe annimmt. Ist $s=r$, so kann p_1 nie grösser als $r-1$ und nie kleiner als $\dfrac{r-1}{m-1}$ werden. Es fällt also

bei dem unendlichen Wachsen von r, $\frac{\overset{-r}{A_r}}{\overset{-(r+1)}{A_r}}$, oder der Ausdruck innerhalb der Klammern im Nenner von (δ), zwischen die Werthe $\frac{a_1}{2}$ und $\frac{m-1}{m}.a_1$. Aber $a_1 + a_2 \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-1}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} + a_3 \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-2}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} + \dots + \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-m+1}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}}$ ist negativ: also muss die aus positiven Gliedern bestehende Grösse $a_2 \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-1}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} + a_3 \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-2}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} + a_4 \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-3}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} + \dots\dots + a_m \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-m+1}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} < \frac{-a_1}{2}$, mithin um so mehr noch

$$\frac{\overset{-(r+1)}{A_{r+1}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} < \frac{-a_1}{2a_2}, \quad \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-1}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} < \frac{-a_1}{2a_3}, \quad \dots \frac{\overset{-(r+1)}{A_{r-m+2}}}{\overset{-(r+1)}{A_r}} < \frac{-a_1}{2.a_{m-1}}$$

sein. Dies Alles gehörig berücksichtigt, findet sich leicht, dass

$$\frac{\overset{-(r+1)}{A_{r+1}}}{\overset{-r}{A_r}} < (4a_2 - 3a_1a_3a_2^{-1} - 4a_1a_4a_3^{-1} - 5a_1a_5a_4^{-1} - \dots - ma_1a_ma_{m-1}^{-1})a_1^{-2} \quad (5),$$

aber $> \frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2}$ sein müsse, insofern vorausgesetzt wird, dass $m > 2$ sei,

Der numerische Werth des Quotienten $\frac{\frac{1}{r+1}\overset{-(r+1)}{A_{r+1}}.x^{r+1}}{\frac{1}{r}.A_r.x^r}$ fällt also, wenn a_1 negativ ist, $a_2, a_3, \dots a_m$ aber positiv sind und r unendlich wächst, zwischen $(4a_2 - 3a_1a_3a_2^{-1} - 4a_1a_4a_3^{-1} - 5a_1a_5a_4^{-1} - \dots - m.a_1a_ma_{m-1}^{-1})a_1^{-2}x$ und $\frac{2ma_1}{(m-1)a_1^2}.x$. Ist also erstere Grösse kleiner als 1, so convergirt die Reihe (4.) sicher, und ist $\frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2}x > 1$, so divergirt sie gewiss.

Aber es giebt keinen ungünstigeren Fall für die Convergenz der Reihe (4.) bei denselben numerischen Werthen von $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$ und x, wenn man von dem Zeichen von $\frac{\overset{-(r+1)}{A_{r+1}}}{\overset{-r}{A}}.x$ abstrahirt, als der eben vorausgesetzte. Denn in diesem Falle bekommen alle, die Grösse A_n zusammensetzenden Glieder dasselbe Zeichen und geben ihr daher den grössten numerischen Werth, dessen sie bei speciellen Annahmen für die Zeichen von $a_1, a_2, \dots a_m$ über-

haupt fähig ist. Convergirt also die Reihe (4.), wenn a_1 negativ und $a_2 \dots . a_m$ positiv sind, ohne Rücksicht auf das Zeichen von $\frac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r} . x$, so convergirt sie auch in allen andern Fällen: immer vorausgesetzt, dass die numerischen Werthe von $a_1, a_2, \dots . a_m$ und x dieselben bleiben.

Um die Convergenz der Reihe (4.) wenigstens einigermassen zu beurtheilen, hat man also nur den Ausdruck (5.) unter der Bedingung zu bilden, dass seine sämmtlichen Glieder das Zeichen + bekommen, so dass sie sich alle summiren; und findet sich dann, dass diese mit dem numerischen Werth von x multiplicirte Grösse kleiner als 1 wird, so convergirt die Reihe sicher. Von der in dem besonders hervorgehobenen Fall gewiss eintretenden Divergenz, wenn $\frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2} . x$ numerisch grösser als 1 sein sollte, kann man jedoch nicht auf die Divergenz auch für alle andere Fälle schliessen.

Es lässt sich noch folgende Betrachtung anstellen.

Die Formel (β) giebt

$$\overset{-r}{A}_r = a_1 \overset{-(r+1)}{A}_r + a_2 \overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + a_3 \overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + \dots . + a_{m-1} \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2} + a_m \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1};$$

sodann ist

$$a_1 \overset{-(r+1)}{A}_r = -[(2+\frac{1}{r-1}) a_2 \overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + (3+\frac{2}{r-1}) a_3 \overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + \dots . + (m-1+\frac{m-2}{r-1}) a_{m-1} \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2}$$
$$+ (m+\frac{m-1}{r-1}) a_m \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}],$$

folglich

$$(\eta) \quad \overset{-r}{A} = -(1+\frac{1}{r-1})(a_2 \overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + 2 . a_3 \overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + 3 . a_4 \overset{-(r+1)}{A}_{r-3} + \dots .$$
$$\dots . + (m-2) a_{m-1} \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2} + (m-1) a_m \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}).$$

Ferner ist nach (α):

$$\overset{-(r+1)}{A}_{r+1} = -\frac{1}{a_1}(2a_2 \overset{-(r+1)}{A}_r + 3a_3 \overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + 4a_4 \overset{-(r+1)}{A}_{r-2} + \dots . + m . a_m \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2});$$

also nach Elimination von $2a_2 \overset{-(r+1)}{A}_r$:

$$(\vartheta) \quad \overset{-(r+1)}{A}_{r+1} = -\frac{1}{a_1}[(3a_3 - 2(2+\frac{1}{r-1})\frac{a_2^2}{a_1}) \overset{-(r+1)}{A}_{r-1} + \dots .$$
$$\dots . + (m . a_m - 2(m-1+\frac{m-2}{r-1})\frac{a_2 a_{m-1}}{a_1}) \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2} - 2(m+\frac{m-1}{r-1})\frac{a_2 a_m}{a_1} \overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}].$$

Endlich ist, wegen (ϑ) und (η):

$$\frac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r}=\frac{1}{(1+\frac{1}{r-1})a_1^2}\cdot\frac{[3a_1a_3-2(2+\frac{1}{r-1})a_2^2]\overset{-(r+1)}{A}_{r-1}+\ldots\ldots+[ma_1a_m-2(m-1+\frac{m-2}{r-1})a_2a_{m-1}]\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2}-2(m+\frac{m-1}{r-1})a_2a_m\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}}{a_2\overset{-(r+1)}{A}_{r-1}+\ldots+(m-2)a_{m-1}\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+2}+(m-1)a_m\overset{-(r+1)}{A}_{r-m+1}}$$

Stellt man sich a_1 als negativ, $a_2, a_3, \ldots . a_m$ als positiv und r unendlich wachsend vor, so wird offenbar $\frac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r}$ numerisch kleiner sein, als der grösste Werth unter den Ausdrücken:

$$\frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{(3a_1a_3-4a_2^2)}{a_2},\ \frac{1(4a_1a_4-6a_2a_3)}{a_1^2.2.a_3},\ \ldots .\ \frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{(ma_1a_m-2(m-1)a_2a_{m-1})}{(m-2)a_{m-1}},\ \frac{1}{a_1^2}\cdot\frac{2ma_2a_m}{(m-1)a_m}.$$

Das heisst: um so mehr ist numerisch $\frac{\overset{-(r+1)}{A}_{r+1}}{\overset{-r}{A}_r}<\frac{4a_2}{a_1^2}-\frac{3}{a_1}.\varphi$, wo φ den grössten Werth bezeichnet, welchen $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ erreichen kann, wenn man für den Zeiger n nach und nach die Zahlen 3, 4, 5, ... $m-1$, m, setzt.

Ist also $(\frac{4a_2}{a_1^2}-\frac{3}{a_1}.\varphi)x$ numerisch kleiner als 1, so convergirt die Reihe (4.) gewiss, wenn a_1 negativ ist und $a_2, a_3, \ldots . a_m$ positiv sind. In andern Fällen, d. h. wenn nicht gerade diese specielle Zeichen-Combination des Coefficienten a_1, a_2, ... a_m Statt findet, hat man den Gliedern im Ausdrucke $(\frac{4a_2}{a_1^2}+\frac{3}{a_1}.\varphi)x$ durchaus das Zeichen + zu geben; und findet man, dass dann derselbe kleiner als 1 ist, so convergirt die Reihe (4.) gewiss. Jedoch kann man nicht auf die Divergenz schliessen, wenn $(\frac{4a_2}{a_1^2}+\frac{3}{a_1}\varphi)x>1$ sein sollte.

Handelt es sich nur um die Bildung des Ausdrucks $(\frac{4a_2}{a_1^2}+\frac{3}{a_1}\varphi)x$ (in welchem, wie gesagt, allen Grössen das Zeichen + zu geben ist), damit, wenn er kleiner als 1 sein sollte, auf die Convergenz von (4.) mit Sicherheit geschlossen werden dürfe, so kann man sich, wenn eine oder mehrere der Grössen a_2, a_3, a_4 .... a_m gleich Null oder sehr klein sein sollten, statt derselben beliebige positive Grössen gesetzt vorstellen, und φ so berechnen, als ob diese Grössen statt 0 oder $\frac{1}{\infty}$ in $a_my^m+a_{m-1}y^{m-1}+\ldots+a_2y^2+a_1y-x=0$ wirklich vorgekommen wären. Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet sogleich, wenn man bedenkt, dass die Reihe (4.), wie sie für y aus der vorgelegten

Gleichung folgt, gewiss convergirt, wenn eine andere convergirt, deren einzelne Glieder sämmtlich grösser sind, und bei welcher die Convergenz ohne Rücksicht auf die Zeichen der einzelnen Glieder Statt findet.

Eben so können zur Berechnung des oft erwähnten Ausdrucks, unbeschadet seiner Eigenschaft als Kennzeichen für die Convergenz von (4.), in der angegebenen Art statt einer oder mehrerer der von der Null verschiedenen Grössen unter den Zahlen $a_2, a_3, \ldots a_m$, grössere positive Werthe angewendet werden; woraus sogleich folgt, dass, wenn $(\frac{4g}{a_1^2}+\frac{3}{a_1}).x$ (wo g und a_1 positiv zu nehmen sind und g den numerisch grössten unter den Coefficienten a_2, $a_3, a_4 \ldots a_m$ bezeichnet) kleiner als 1 sein sollte, die Reihe (4.) gewiss convergiren muss.

Für $y^5+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3+y^2+y+\frac{1}{10}=0$ z. B. ist $(\frac{4g}{a_1^2}+\frac{3}{a_1})x<1$ und man findet $y=-0{,}1-0{,}01-0{,}001\,6-0{,}000\,358\,3-0{,}000\,055\,0-0{,}000\,016\ldots$, d. h. wenn wir hier stehen bleiben, $y=-0{,}112\,096$. In der That liegt eine Wurzel der Gleichung zwischen $-0{,}1121$ und $-0{,}1122$.

Setzen wir in $x=a_1y+a_2y^2+a_3y^3+\ldots+a_my^m$, $y=\omega+\beta$, so wird $V_0+V_1\omega+\frac{V_2}{1.2}\omega^2+\frac{V_3}{1.2.3}.\omega^3+\ldots+\frac{V_m}{1.2.3\ldots m}.\omega^m=0$, wo, wie bekannt,

$$V_0=a_m\beta^m+_{m-1}\beta^{m-1}+a_{m-2}\beta^{m-2}+\ldots\ldots+a_1\beta-x$$
$$V_1=m.a_m\beta^{m-1}+(m-1)a_{m-1}\beta^{m-2}+(m-2)a_{m-2}\beta^{m-2}+\ldots+2a_2\beta+a_1$$
$$V_2=m(m-1)a_m\beta^{m-2}+(m-1)(m-2)a_{m-1}\beta^{m-3}+\ldots\ldots+3.2.a^3+2.1.a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_{m-1}=m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.a_m\beta+(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.a_{m-1}$$
$$V_m\ =m(m-1)(m-2(\ldots 3.2.1.a_m.$$

Nun sei $-V_0=\psi$, $V_1=b_1$, $\frac{V_2}{1.2}=b_2$, $\frac{V_3}{1.2.3}=b_3$, $\ldots \frac{V_m}{1.2.3\ldots m}=b_m$, so erhält man, als transformirte Gleichung, $\psi=b_1\omega+b_2\omega^2+b_3\omega^3+\ldots+b_m\omega^m$. Sind $y_1, y_2, y_3, \ldots y_m$ die m Wurzeln der Gleichung

$$Y=a_my^m+a_{m-1}y^{m-1}+\ldots+a_2y^2+a_1y-x=0$$

(welche Wurzeln wir uns als sämmtlich von einander verschieden vorstellen wollen), so sind $\omega_1=y_1-\beta$, $\omega_2=y_2-\beta$, $\omega_3=y_3-\beta$, $\ldots\ \omega_m=y_m-\beta$ die m Wurzeln der Gleichung

$$O=b_m\omega^m+b_{m-1}\omega^{m-1}+\ldots+b_2\omega^2+b_1\omega-\psi=0;$$

also ist auch

$-\psi = (-1)^m b_m \omega_1 \omega_2 \omega_3 \ldots \omega_{m-1} \omega_m$ und

$b_1 = (-1)^{m-1} b_m (\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{m-1} + \ldots + \omega_1 \omega_3 \ldots \omega_{m-1} \cdot \omega_m + \omega_2 \cdot \omega_3 \ldots \omega_{m-1} \omega_m)$.

Die Reihe (4.), nun auf ω, ψ, b_1, b_2, ... b_m statt y, x, a_1, a_2, ... a_m bezogen, wird gewiss convergiren, wenn $(\frac{4\gamma}{b_1^2} + \frac{3}{b_1})\psi < 1$ sein sollte (hier ist y und b_1 ebenfalls positiv zu nehmen, und γ ist der numerisch grösste unter den Coefficienten b_2, b_3, b_4 .... b_m). Rückt jetzt β sehr nahe an y_1, so wird ω_1 sehr klein, b_1 nähert sich immer mehr und mehr der Grösse $(-1)^{m-1} b_m \omega_2 \cdot \omega_3 \ldots \ldots \omega_{m-1} \cdot \omega_m$ und $(\frac{4\gamma}{b_1^2} + \frac{3}{b_1})\psi$ wird $= (L+3)\omega_1$, wo L eine positiv zu nehmende, numerisch von ω_2, ω_3, ... ω_m abhangende und wegen der vorausgesetzten Verschiedenheit von y_1, y_2, ... y_m immer endliche Grösse bezeichnet. Je näher also β an y_1 gerückt ist, desto sicherer wird die Convergenz der Reihe für ω Statt finden.

Wenn daher nicht schon die Gleichung $Y=0$ so beschaffen ist, dass die Convergenz der Reihe für y Statt findet, so transformire man die Gleichung in eine andere, indem man $y = \omega + \beta$ setzt, und suche mit β so nahe an eine der reellen Wurzeln von $Y=0$ zu gelangen, dass die Convergenz der Reihe für ω eintritt und man dadurch in den Stand gesetzt werde, ω mit beliebiger Schärfe zu berechnen.

Findet die Convergenz der Reihe für y Statt, so dürfte es im Allgemeinen zweckmässig sein, nur 5 oder 6 Glieder derselben zu nehmen und die so gefundene Grösse statt β zu der eben erwähnten Transformation zu verwenden und dann ω mittelst obiger Reihe zu berechnen. Dies zur Erleichterung der Rechnung in vielen Fällen.

Dasselbe gilt auch für die Reihe für ω, wenn sie convergiren sollte. Auch hier nehme man nur 5 oder 6 Glieder, addire die so gefundene Grösse zu β, und wende die Summe statt β zu der Transformation der Gleichung $Y=0$ in $O=0$ an.

Die Gleichung $y^3 - 2y - 5 = 0$, auf welche *Newton* seine Methode angewandt hat, ist z. B. so beschaffen, dass die obige Reihe (hier die Reihe (2.)) nicht convergirt. Setzt man jedoch $y = \omega + \beta$, und lässt $\beta = 2$ sein, so wird $10\omega + 6\omega^2 + \omega^3 = 1$, und die Reihe für ω convergirt. Es findet sich

$$\omega = 0{,}1 - 0{,}006 + 0{,}000\,62 - 0{,}000\,078 + 0{,}000\,010\,884 - 0{,}000\,001\,619\,52 + \ldots,$$

d. h. wenn man nicht weiter geht, $\omega = 0{,}094\,551\,26 \ldots$ oder $y = 2{,}094\,551\,26 \ldots$, welches noch in der sechsten Decimalstelle richtig ist.

Oefters leistet auch die Substitution von $\frac{1}{z}$ für y in $Y=0$ gute Dienste, indem zuweilen, wenn auch die Reihe für y divergirte, die Reihe für z convergirt. Als Beispiel diene die Gleichung: $y^3+27.y^2-4\frac{1}{2}y+1=0$. Da hier a_1 negativ ist, a_2 und a_3 positiv sind und $\frac{2ma_2}{(m-1)a_1^2}>1$ ist, so ist kein Zweifel über die Divergenz der Reihe für y. Durch die Substitution wird $z^3-4\frac{1}{2}.z^2+27.z+1=0$, und die Reihe für z convergirt. Es findet sich $z=-\frac{1}{27}+\frac{9}{2.27^3}\ldots$, also, ohne weiter zu gehen, $z=-\frac{1}{27}+\frac{161}{162\times 27^2}$, oder $y=-27.\frac{162}{161}$. Wirklich liegt eine Wurzel zwischen -27 und -28.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass die Reihe (2.), wie sie aus einer Gleichung vom dritten Grade für y folgt, gewiss convergirt, wenn die *Cardani*sche Formel zur Berechnung der Wurzeln dieser Gleichung unbrauchbar ist.

Ist $y^3+B_2y+B_3=0$ diese Gleichung, so convergirt die Reihe (2.) für y, wenn numerisch $\frac{27}{4}\cdot\frac{B_3^2}{B_2^3}<1$ ist, und die *Cardani*sche Formel wird unbrauchbar, wenn B_2 negativ und wenn numerisch $\frac{27}{4}\cdot\frac{B_3^2}{B_2^3}<1$ ist, wodurch die eben gemachte Behauptung gerechtfertigt ist. Nennt man y_1 die durch die Reihe (2.) berechnete Wurzel von $y^3+B_2y+B_3=0$, so sind die beiden andern Wurzeln derselben $=\frac{1}{2}(-y_1+\sqrt{(-4B_2+3y_1^2)})$ und $\frac{1}{2}(-y_1-\sqrt{(-4B_2+3y_1^2)})$.

Es sei z. B. $y^3-y+\frac{1}{8}=0$ die gegebene Gleichung, so wird $y=\frac{1}{8}+\frac{1}{8^4}+\frac{3}{8^6}+\frac{12}{8^7}+\frac{55}{8^9}+\ldots$ und wenn man sich mit diesen fünf Gliedern begnügt, $y_1=0{,}127\,050\,807\ldots$, und die beiden andern Wurzeln sind $0{,}930\,402\ldots$ und $-1{,}057\,453\,8\ldots$

Triest im April 1845.

9.

Ueber die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche.

(Von Herrn Dr. *Heilermann* in Cöln a. R.)

---

§. 1.

Von der Lösung der Aufgabe, das Verhältniss zweier willkürlichen Reihen $\frac{\Sigma_0^n A_\alpha x^\alpha}{\Sigma_0^m B_\alpha x^\alpha}$ in einen Kettenbruch von der Form $\cfrac{1}{a_0+\cfrac{x}{a_1+\cfrac{x}{a_2+\cfrac{x}{a_3+\text{etc.}}}}}$ zu verwandeln, ist eine Vollendung zu verlangen, die derjenigen entspricht, mit welcher dasselbe Verhältniss in eine neue Reihe entwickelt wird. Dieser Anforderung genügt noch keine der bis jetzt gegebenen Lösungen: inwiefern die hier folgende das Verlangte leistet, wird das Urtheil der Mathematiker entscheiden.

Wir bezeichnen nach dem Vorgange des Herrn Prof. *Stern* einen Kettenbruch von obiger Form, dessen erster Theilnenner a_m und dessen letzter Nenner a_n ist, durch das Symbol $F(a_m, a_n)$; ferner den Nenner desselben Kettenbruchs, nach der Reduction in einen gewöhnlichen Bruch, durch a_m, a_n, so dass $F(a_m, a_n) = \frac{a_{m+1}, a_n}{a_m, a_n}$ ist. Aus den Untersuchungen des Herrn *Stern* (*Crelle* Journ. Bd. 10. Seite 6.) geht hervor, dass a_m, a_n in Bezug auf x vom $\frac{1}{2}(n+m)$ten Grade ist, wenn $n-m$ gerade, und vom $\frac{1}{2}(n-m+1)$ten, wenn $n-m$ ungerade ist. Auch den Coefficienten der Potenz x^α lernt man an der genannten Stelle kennen. Um ihn zu finden, bilde man aus den Theilnennern $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots a_n$ alle Producte, in welchen α Paare $a_6 . a_{6+1}$ fehlen, und addire die erhaltenen Producte. Wenn dieser Coefficient durch $(a_m, a_n)_{2\alpha}$ bezeichnet wird, so ist

$$1)\quad F(a_m, a_n) = \frac{(a_{m+1} a_n)_0 + (a_{m+1} a_n)_2 . x + (a_{m+1} a_n)_4 . x^2 + \dots}{(a_m, a_n)_0 + (a_m, a_n)_2 . x + (a_m, a_n)_4 . x^2 + \dots}$$
$$= \frac{\Sigma (a_{m+1}, a_n)_{2\alpha} . x^\alpha}{\Sigma (a_m, a_n)_{2\alpha} . x^\alpha}.$$

Die Reihen rechts brechen ab, weil $(a_m, a_n)_{2\alpha} = 0$ ist, sobald $2\alpha > n - m + 1$ wird. Wenn $2\alpha = n - m + 1$, so ist $(a_m, a_n)_{2\alpha} = 1$. Setzt man in obigen Gleichungen $m = n$, so ist $F(a_n, a_n) = \frac{1}{a_n}$; der Zähler dieses Bruchs hat dann nicht die hier vorausgesetzte Form, und deshalb ergeben sich die Gleichungen $a_{n+1}, a_n = 1$; $(a_{n+1}, a_n)_0 = 1$.

Soll nun das Verhältniss $\frac{\overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} A_\alpha x^\alpha}{\overset{m}{\underset{0}{\Sigma}} B_\alpha x^\alpha}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so setze man

$$\frac{\overset{r}{\underset{0}{\Sigma}} A_\alpha x^\alpha}{\overset{r}{\underset{0}{\Sigma}} B_\beta x^\beta} = F(a_0, a_r) = \frac{\Sigma (a_1, a_r)_{2\gamma} x^\gamma}{\Sigma (a_0, a_r)_{2\delta} x^\delta},$$

wo r eine ganze Zahl ist, die wir zunächst kleiner als m und n annehmen. Daraus folgt

$$\Sigma A_\alpha (a_0, a_r)_{2\delta} x^{\alpha+\delta} = \Sigma B_\beta (a_1, a_r)_{2\gamma} . x^{\beta+\gamma}, \quad \text{condd. } \alpha < r+1,\ \beta < r+1;$$

und

$$2)\quad \Sigma A_\alpha (a_0, a_r)_{2\delta} = \Sigma B_\beta (a_1, a_r)_{2\gamma}, \quad \text{condd. } \begin{matrix} \alpha+\delta = \beta+\gamma, \\ \alpha < r+1,\ \beta < r+1. \end{matrix}$$

Für $r = 0$ ist $A_0 a_0 = B_0$, oder es ist der Theilnenner

$$3)\quad a_0 = \frac{B_0}{A_0},$$

und eben so findet sich

$$a_1 = -\frac{A_0}{A_1 a_0 - B_1}.$$

Um die folgenden Theilnenner zu finden, setze man $r > 1$ und bringe die Gleichung (Cr. Journ. Bd. 10. S. 248.)

$$(a_m, a_n)_{2\alpha} = a_n . (a_m, a_{n-1})_{2\alpha} + (a_m, a_{n-2})_{2\alpha-2}$$

in Anwendung. Dadurch geht die Gleichung (2.) in

$$\Sigma \{ a_r A_\alpha (a_0, a_{r-1})_{2\delta} + A_\alpha (a_0, a_{r-2})_{2\delta-2} \}$$
$$= \Sigma \{ a_r B_\alpha (a_1, a_{r-1})_{2\delta} + B_\alpha (a_1, a_{r-2})_{2\delta-2} \}, \quad \text{cond. } \alpha+\delta = r;$$

über und man erhält die recurrirende Formel

$$4)\qquad a_r = -\frac{\Sigma[A_\alpha(a_0, a_{r-2})_{2\delta-2} - B_\alpha(a_1, a_{r-2})_{2\delta-2}]}{\Sigma[A_\alpha(a_0, a_{r-1})_{2\delta} - B_\alpha(a_1, a_{r-1})_{2\delta}]}, \quad \text{cond. } \alpha+\delta=r.$$

Es ist also

$$a_{r+1} = -\frac{\Sigma[A_\alpha(a_0, a_{r-1})_{2\delta-2} - B_\alpha(a_1, a_{r-1})_{2\delta-2}]}{\Sigma[A_\alpha(a_0, a_r)_{2\delta} - B_\alpha(a_1, a_r)_{2\delta}]}, \quad \text{cond. } \alpha+\delta=r+1;$$

und man sieht, dass

$$\Sigma\{A_\alpha(a_0, a_{r-1})_{2\delta-2} - B_\alpha(a_1, a_{r-1})_{2\delta-2}\} = \Sigma\{A_\alpha(a_0, a_{r-1})_{2\delta} - B_\alpha(a_1, a_{r-1})_{2\delta}\},$$
$$\text{cond. } \alpha+\delta=r+1, \qquad\qquad \text{cond. } \alpha+\delta=r,$$

oder dass der Zähler von a_{r+1} gleich dem Nenner von a_r ist. Bezeichnet man also zur Abkürzung den Nenner von a_r durch N_r, so ist

$$a_r = -\frac{N_{r-1}}{N_r},$$

und umgekehrt $N_r = -\frac{N_{r-1}}{N_r} = \frac{N_{r-2}}{a_r . a_{r-1}} = (-1)^r . \frac{N_0}{a_r . a_{r-1} \dots a_2 . a_1}$. Dazu ist $a_0 = \frac{B_0}{A_0} = \frac{B_0}{N_0}$, also

$$N_r = (-1)^r . \frac{B_0}{a_1 a_2 a_3 \dots a_{r-1} a_r} = (-1)^r . \frac{B_0}{(a_0, a_r)_0}$$

und

$$5)\qquad a_r = (-1)^r . \frac{B_0}{(a_0, a_{r-1})_0} . \frac{1}{N_r}.$$

Diese Recursionsformel ist zuerst von Herrn *Stern* durch eine vollständige Induction abgeleitet worden.

Obgleich wir nun r bisher kleiner als m und n angenommen haben, so hindert doch Nichts, die Zahl r über m und n hinaus wachsen zu lassen. Um dann die Recursionsformel ganz in derselben Weise gebrauchen zu können, geben wir den angenommenen Reihen $\sum_0^n A_\alpha x^\alpha$ und $\sum_0^m B_\alpha x^\alpha$ noch die Glieder $A_{n+1} x^{n+1}, A_{n+2} x^{n+2}, \dots A_r x^r$ und $B_{m+1} x^{m+1}, B_{m+2} x^{m+2}, \dots B_r x^r$ mit den Coefficienten $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots A_r = 0$ und $B_{m+1} = B_{m+2} = \dots B_r = 0$. Nur wenn ein Theilnenner a_r unendlich-gross wird, kann der Kettenbruch nicht weiter fortgesetzt werden; und dies wird im Allgemeinen, abgesehen von den Bedingungen, die von den Coefficienten der gegebenen Reihen erfüllt werden mögen, nur dann der Fall sein, wenn alle Coefficienten, welche in N_r, dem Nenner von a_r, vorkommen, Null sind. Nun kommen in $N_{2\mu}$ die Coefficienten

$$A_{2\mu},\ A_{2\mu-1},\ A_{2\mu-2},\ \dots\ A_{\mu+1},\ A_\mu, \quad \text{und}$$
$$B_{2\mu},\ B_{2\mu-1},\ B_{2\mu-2},\ \dots\ B_{\mu+1};$$

vor, und in $N_{2\mu+1}$ sind die Coefficienten

$$A_{2\mu+1},\ A_{2\mu},\ A_{2\mu-1},\ \ldots\ A_{\mu+2},\ A_{\mu+1},\quad \text{und}$$
$$B_{2\mu+1},\ B_{2\mu},\ B_{2\mu-1},\ \ldots\ B_{\mu+2},\ B_{\mu+1}$$

enthalten. Gesetzt nun es sei $m \leqq n$ und $\mu = n$, so ist $N_{2\mu+1} = N_{2n+1} = 0$, also $a_{2n+1} = \infty$. Der Theilnenner a_{2n} bleibt aber endlich, weil N_{2n}, worin A_n vorkommt, nicht Null ist. Ist dagegen $m < n$ und $\mu = m$, so ist $N_{2\mu} = N_{2m} = 0$, also $a_{2m} = \infty$, während a_{2m-1} endlich ist, weil N_{2m-1} wegen des Coefficienten B_m nicht verschwindet. Die spätern Theilnenner sind in beiden Fällen $\frac{0}{0}$. Wird also die Verwandlung des Verhältnisses $\frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha}$ in einen Kettenbruch so weit als möglich fortgesetzt, so erhält man

$$6)\quad \frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha} = F(a_0, a_{2n}),\ \text{cond. } m \leqq n;\quad \frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha} = F(a_0, a_{2m-1}),\ \text{cond } m > n.$$

Zu den Fällen wo $m < n$ gehört auch derjenige, wo $m = 0$. Der Nenner N_r nimmt dann die einfachere Gestalt

$$N_r = \Sigma A_\alpha (a_0, a_{r-1})_{2\delta},\quad \text{cond. } \alpha + \delta = r \text{ an.}$$

Eben so gehört zu den Fällen wo $m > n$ derjenige, wo $n = 0$ ist, und der Nenner N_r reducirt sich dann auf

$$N_r = -\Sigma B_\alpha (a_1, a_{r-1})_{2\delta},\quad \text{cond. } \alpha + \delta = r.$$

§. 2.

Aus der Gleichung (2.) lässt sich nicht bloss eine recurrirende Formel zur Bestimmung der Theilnenner ableiten, sondern dieselbe Gleichung bietet auch Mittel dar, die Theilnenner independent zu bestimmen. Denn legt man in derselben der Zahl $s = \alpha + \delta = \beta + \gamma$ der Reihe nach die Werthe $r, r-1, \ldots 2, 1, 0$ bei, so erhält man ein System von $r+1$ Gleichungen zwischen $r+1$ Functionen der Theilnenner, als Unbekannten. Setzt man $r = 2\mu$ und erwägt, dass

$$(a_1, a_{2\mu})_{2\mu} = 1$$
$$(a_1, a_{2\mu})_{2\mu+2} = (a_1, a_{2\mu})_{2\mu+4} = \ldots = (a_1, a_{2\mu})_{4\mu} = 0,$$
$$(a_0, a_{2\mu})_{2\mu+2} = (a_0, a_{2\mu})_{2\mu+4} = \ldots = (a_0, a_{2\mu})_{4\mu} = 0,$$

ist, so sieht man, dass die Coefficienten der gefundenen Gleichungen folgendes System bilden:

$$7)\quad \left\{\begin{array}{llllllll}
A_{2\mu}, & A_{2\mu-1}, \ldots & A_{\mu+1}, & A_{\mu}, & B_{\mu+1}, & B_{\mu+2}, \ldots & B_{2\mu-1}, & B_{2\mu} \\
A_{2\mu-1}, & A_{2\mu-2}, \ldots & A_{\mu}, & A_{\mu-1}, & B_{\mu}, & B_{\mu+1}, \ldots & B_{2\mu-2}, & B_{2\mu-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{\mu+1}, & A_{\mu}, \ldots & A_2, & A_1, & B_2, & B_3, \ldots & B_{\mu}, & B_{\mu+1} \\
A_{\mu}, & A_{\mu-1}, \ldots & A_1, & A_0, & B_1, & B_2, \ldots & B_{\mu-1}, & B_{\mu} \\
A_{\mu-1}, & A_{\mu-2}, \ldots & A_1, & 0, & B_0, & B_1, \ldots & B_{\mu-2}, & B_{\mu-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_1, & A_0, \ldots & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots & B_0, & B_1 \\
A_0, & 0, \ldots & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots & 0, & B_0.
\end{array}\right.$$

Die Coefficienten der Verticalreihe, deren höchster $A_{2\mu-\alpha}$ ist, sind mit der unbekannten Function $(a_0, a_{2\mu})_{2\alpha}$ multiplicirt; die Coefficienten der Verticalreihe $B_{2\mu-\alpha}$ sind multiplicirt mit $(a_1, a_{2\mu})_{2\alpha}$; die zu den Horizontalreihen gehörigen unabhängigen Glieder sind der Reihe nach $B_{\mu}, B_{\mu-1}, \ldots B_1, B_0, \ldots 0, 0$. Dies System von Gleichungen kann nun dazu dienen, die Functionen $(a_0, a_{2\mu})_0$, $(a_0, a_{2\mu})_2, \ldots (a_0, a_{2\mu})_{2\mu-2}$, $(a_0, a_{2\mu})_{2\mu}$, $-(a_1, a_{2\mu})_{2\mu-2}$, $-(a_1, a_{2\mu})_{2\mu-4}, \ldots$ $-(a_1, a_{2\mu})_2$, $-(a_1, a_{2\mu})_0$ sämmtlich zu finden; doch zur Berechnung von $a_{2\mu}$ ist $(a_0, a_{2\mu})_0$ oder $(a_1, a_{2\mu})_0$ am geeignetsten. Der Nenner des Werthes $(a_0, a_{2\mu})_0$ ist die Determinante des obigen Coefficienten-Systems, welche wir mit $\Delta_{2\mu}$ bezeichnen. Damit das Vorzeichen nicht zweideutig sei, werde bestimmt, dass in dieser Determinante das Glied $A_{2\mu}.A_{2\mu-2} \ldots A_2.A_0 B_0^{\mu}$ *positiv* sei. Der Zähler von $(a_0, a_{2\mu})_0$ ist auch eine Determinante, und zwar desjenigen Systems, welches aus (7.) hervorgeht, wenn die Reihe der unabhängigen Glieder statt der ersten Verticalreihe gesetzt wird. Dann bleiben aber in der untersten Horizontalreihe nur Nullen und B_0, also ist B_0 gemeinschaftlicher Factor aller Glieder dieser Determinante. Nach Absonderung dieses Factors bilden die Glieder die Determinante des Systems

$$8)\quad \left\{\begin{array}{lllllllll}
B_{\mu}, & A_{2\mu-1}, & A_{2\mu-2}, \ldots & A_{\mu+1}, & A_{\mu}, & B_{\mu+1}, & B_{\mu+2}, \ldots & B_{2\mu-2}, & B_{2\mu-1} \\
B_{\mu-1}, & A_{2\mu-2}, & A_{2\mu-3}, \ldots & A_{\mu}, & A_{\mu-1}, & B_{\mu}, & B_{\mu+1}, \ldots & B_{2\mu-3}, & B_{2\mu-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
B_1, & A_{\mu}, & A_{\mu-1}, \ldots & A_2, & A_1, & B_2, & B_3, \ldots & B_{\mu-1}, & B_{\mu} \\
B_0, & A_{\mu-1}, & A_{\mu-2}, \ldots & A_1, & A_0, & B_1, & B_2, \ldots & B_{\mu-2}, & B_{\mu-1} \\
0, & A_{\mu-2}, & A_{\mu-3}, \ldots & A_0, & 0 & B_0, & B_1, \ldots & B_{\mu-3}, & B_{\mu-2} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0, & A_1, & A_0, \ldots & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots & B_0, & B_1 \\
0, & A_0, & 0 \ldots & 0, & 0, & 0, & 0, \ldots & 0, & B_0.
\end{array}\right.$$

Es werde diese Determinante durch $\Delta_{2\mu-1}$ bezeichnet und das Glied $A_{2\mu-1} A_{2\mu-3} \ldots\ldots A_3 A_1 B_0^{m}$ *positiv* genommen: dann hat der Zähler von $(a_0, a_{2\mu})_0$ das Vorzeichen $(-1)^\mu$; also ist

$$(a_0, a_{2\mu})_0 = (-1)^\mu B_0 \frac{\Delta_{2\mu-1}}{\Delta_{2\mu}}.$$

Setzt man aber in der Gleichung (2.), um $(a_0, a_{2\mu-1})_0$ in ähnlicher Weise independent zu bestimmen, $r = 2\mu + 1$ und bringt die Gleichungen

$$(a_1, a_{2\mu+1})_{2\mu+2} = (a_1, a_{2\mu+1})_{2\mu+4} = \ldots\ldots = (a_1, a_{2\mu+1})_{4\mu+2} = 0,$$
$$(a_0, a_{2\mu+1})_{2\mu+2} = 1,$$
$$(a_0, a_{2\mu+1})_{2\mu+4} = (a_0, a_{2\mu+1})_{2\mu+6} = \ldots\ldots = (a_0, a_{2\mu+1})_{2\mu+4} = 0$$

in Anwendung, so erhält man ein System von $2\mu+2$ Gleichungen zwischen $2\mu+2$ Functionen der unbekannten Theilnenner. Diese Functionen sind $(a_0, a_{2\mu+1})_0, (a_0, a_{2\mu+1})_2, \ldots\ldots (a_0, a_{2\mu+1})_{2\mu-2}, (a_0, a_{2\mu+1})_{2\mu}$ und $-(a_1, a_{2\mu+1})_{2\mu}, -(a_1, a_{2\mu+1})_{2\mu-2}, \ldots\ldots -(a_1, a_{2\mu+1})_2, -(a_1, a_{2\mu+1})_0$; und die Coefficienten derselben sind in den einzelnen Gleichungen der Reihe nach:

$$9)\quad \left\{\begin{array}{llllllll}
A_{2\mu+1}, & A_{2\mu}, & \ldots\ldots A_{\mu+2}, & A_{\mu+1}, & B_{\mu+1}, & B_{\mu+2}, & \ldots\ldots B_{2\mu}, & B_{2\mu+1} \\
A_{2\mu}, & A_{2\mu-1}, & \ldots\ldots A_{\mu+1}, & A_\mu, & B_\mu, & B_{\mu+1}, & \ldots\ldots B_{2\mu-1}, & B_{2\mu} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{\mu+1}, & A_\mu, & \ldots\ldots A_2, & A_1, & B_1, & B_2, & \ldots\ldots B_\mu, & B_{\mu+1} \\
A_\mu, & A_{\mu-1}, & \ldots\ldots A_1, & A_0, & B_0, & B_1, & \ldots\ldots B_{\mu-1}, & B_\mu \\
A_{\mu-1}, & A_{\mu-2}, & \ldots\ldots A_0, & 0, & 0, & B_0, & \ldots\ldots B_{\mu-2}, & B_{\mu-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_1, & A_0, & \ldots\ldots 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots B_0, & B_1 \\
A_0, & 0, & \ldots\ldots 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots\ldots 0, & B_0.
\end{array}\right.$$

Die zu den Horizontalreihen gehörigen unabhängigen Glieder sind der Reihe nach $-A_\mu, -A_{\mu-1}, \ldots\ldots -A_0, 0, 0, \ldots\ldots 0, 0$. Von obigen $2\mu+2$ Functionen der unbekannten Theilnenner bestimmen wir aus diesem Systeme von Gleichungen nur $(a_0, a_{2\mu+1})_0$. Der Nenner dieses Werthes ist die Determinante des Systems (9.), welche mit der Determinante des Systems (8.) ganz übereinstimmt, wenn in (8.) $\mu+1$ statt μ und auch hier das Glied $A_{2\mu+1} . A_{2\mu} \ldots\ldots \ldots\ldots A_3 . A_1 . B_0^{\mu+1}$ positiv gesetzt wird. Also ist der Nenner von $(a_0, a_{2\mu+1})_0$ die Determinante $\Delta_{2\mu+1}$. Der Zähler von $(a_0, a_{2\mu+1})_0$ wird gefunden, wenn in (9.) statt der ersten Verticalreihe die Reihe der unabhängigen Glieder gesetzt und die Determinante des entstandenen Systems gebildet wird. Zunächst ist auch hier B_0 gemeinschaftlicher Factor aller Glieder dieser Deter-

nante, und nach Absonderung desselben unterscheidet sie sich von $\Delta_{2\mu}$ nur durch das Vorzeichen $(-1)^{\mu+1}$. Daher ist denn

$$(a_0, a_{2\mu+1})_0 = (-1)^{\mu+1} B_0 . \frac{\Delta_{2\mu}}{\Delta_{2\mu+1}}.$$

Durch Verbindung dieser Gleichung mit der frühern

$$(a_0, a_{2\mu})_0 = (-1)^{\mu} B_0 . \frac{\Delta_{2\mu-1}}{\Delta_{2\mu}}$$

erhält man

$$a_{2\mu} = \frac{\Delta^2_{2\mu-1}}{\Delta_{2\mu-2} . \Delta_{2\mu}} \quad \text{und} \quad a_{2\mu+1} = -\frac{\Delta^2_{2\mu}}{\Delta_{2\mu-1} . \Delta_{2\mu+1}},$$

oder

$$10) \quad a_r = (-1)^r . \frac{\Delta^2_{r-1}}{\Delta_{r-2} . \Delta_r}.$$

Doch gilt diese Formel erst von $r=2$ an, denn es ist

$$a_0 = \frac{B_0}{A_0} = \frac{B_0}{\Delta_0}, \quad a_1 = -\frac{A_0^2}{A_1 B_0 - B_1 A_0} = -\frac{\Delta_0^2}{\Delta_1}.$$

§. 3.

Zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen den Theilnennern, den Determinanten und den in der recurrirenden Formel vorkommenden Nennern N_α dürften folgende Formeln geeignet sein. Es ist zunächst

$$(a_0, a_{2\mu})_0 . (a_0, a_{2\mu-1})_0 = B_0^2 . \frac{\Delta_{2\mu-2}}{\Delta_{2\mu}},$$

also

$$\Delta_{2\mu} = \frac{B_0^2 . \Delta_{2\mu-2}}{(a_0, a_{2\mu})_0 . (a_0, a_{2\mu-1})_0}.$$

Die wiederholte Anwendung dieser Gleichung, welche auch für $\mu = 1$ noch gilt, giebt

$$\Delta_{2\mu} = \frac{B_0^{2\mu} . \Delta_0}{(a_0, a_{2\mu})_0 . (a_0, a_{2\mu-1})_0 \dots (a_0, a_2)_0 . (a_0, a_1)_0}$$
$$= \Delta_0 . \prod_{\alpha=1}^{\alpha=2\mu} \frac{B_0}{(a_0, a_\alpha)_0}.$$

Da noch $\Delta_0 = \frac{B_0}{a_0} = \frac{B_0}{(a_0, a_0)_0}$, so ist

$$\Delta_{2\mu} = \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2\mu} \frac{B_0}{(a_0, a_\alpha)_0}.$$

Wird diese Gleichung mit $(a_0, a_{2\mu+1})_0 = (-1)^{\mu+1} B_0 \frac{\Delta_{2\mu}}{\Delta_{2\mu+1}}$ verbunden, so ergiebt sich

$$\Delta_{2\mu+1} = (-1)^{\mu+1} \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2\mu+1} \frac{B_0}{(a_0, a_\alpha)_0}.$$

Es ist aber nach (5.) $\frac{B_0}{(a_0, a_\alpha)_0} = (-1)^\alpha . N_\alpha$, also ist

$$\Delta_{2\mu} = (-1)^\mu . \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2\mu} N_\alpha \quad \text{und} \quad \Delta_{2\mu+1} = \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2\mu+1} N_\alpha.$$

Setzt man statt des Symbols $(a_0, a_2)_0$ das Product $a_0 a_1 \dots a_{\alpha-1} a_\alpha$, so ist

$$\Delta_{2\mu} = \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2\mu} \frac{B_0}{a_\alpha^{2\mu+1-\alpha}}, \qquad \Delta_{2\mu+1} = (-1)^{\mu+1} . \prod_{\alpha=0}^{\alpha=2\mu+1} \frac{B_0}{a_\alpha^{2\mu+2-\alpha}}.$$

Wenn Zähler und Nenner des gegebenen Verhältnisses $\frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha}$ endliche Reihen sind, so gelangt man bei der Bestimmung der Determinanten zu einem Systeme (7.) oder (9.), dessen erste Horizontalreihe nur Nullen enthält. Dies tritt, wenn $m \leqq n$, mit dem Systeme (9.) für $\mu = n$ ein, oder es ist dann $\Delta_{2n+1} = 0$. Wenn $m > n$, so ist dasselbe mit dem Systeme (7.) der Fall und es wird deshalb $\Delta_{2m} = 0$. Setzt man nun in $F(a_0, a_r)$ für die Theilnenner ihre Werthe aus der Formel (10.), so ist, nach einigen Reductionen:

$$11) \begin{cases} \dfrac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha} = F(a_0, a_{2n}) = \cfrac{\Delta_0}{B_0 - \cfrac{\Delta_1 x}{\Delta_0 - \cfrac{\Delta_2 x}{\Delta_1 - \cfrac{\Delta_0 \Delta_3 x}{\Delta_2 - \cfrac{\Delta_1 \Delta_4 x}{\Delta_3 - \cfrac{\Delta_2 \Delta_5 x}{\Delta_4 - \dots - \cfrac{\Delta_{2n-3}\Delta_{2n} x}{\Delta_{2n-1}}}}}}}}. \\ \text{Cond. } m < n \\[2ex] \dfrac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha} = F(a_0, a_{2m-1}) = \cfrac{\Delta_0}{B_0 - \cfrac{\Delta_1 x}{\Delta_0 - \cfrac{\Delta_2 x}{\Delta_1 - \cfrac{\Delta_0 \Delta_3 x}{\Delta_2 - \cfrac{\Delta_1 \Delta_4 x}{\Delta_3 - \cfrac{\Delta_2 \Delta_5 x}{\Delta_4 - \dots - \cfrac{\Delta_{2m-4}\Delta_{2m-1}}{\Delta_{2m-2}}}}}}}}. \\ \text{Cond. } m > n \end{cases}$$

Der αte Theilbruch ist $-\frac{\Delta_{\alpha-3}\Delta_\alpha x}{\Delta_{\alpha-1}}$.

Wenn eine Reihe $\sum\limits_0^n A_\alpha x^\alpha$, oder der reciproke Werth einer Reihe $\frac{1}{\sum\limits_0^m B_\alpha x^\alpha}$, in einen Kettenbruch von der vorausgesetzten Form verwandelt werden soll, so hat man in den entwickelten Formeln nur $B_1 = B_2 = \ldots = B_m = 0$ oder $A_1 = A_2 = \ldots A_n = 0$ anzunehmen. Es reduciren sich dann die Systeme (7.) und (9.) auf solche, die in der αten Horizontal- und der αten Verticalreihe dieselben Coefficienten in derselben Reihefolge haben. Wenn $\sum\limits_0^n A_\alpha x^\alpha$ in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, so ist $\Delta_{2\mu}$ in Bezug auf sämmtliche Coefficienten A, so wie auch $\Delta_{2\mu+1}$, von der $(\mu+1)$ten Dimension. Wenn aber $\frac{1}{\sum\limits_0^m B_\alpha x^\alpha}$ transformirt wird, so ist $\Delta_{2\mu+1}$ und $\Delta_{2\mu+2}$ in Bezug auf die Coefficienten B von der $(\mu+1)$ten Dimension.

§. 4.

Wir fanden oben, dass ein Kettenbruch $F(a_0, a_r)$, aus dem Quotienten $\frac{\sum\limits_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum\limits_0^m B_\alpha x^\alpha}$ abgeleitet, bei einem gewissen Theilnenner abbricht: daher muss untersucht werden, ob ein Unterschied, und welcher, alsdann zwischen der gegebenen und der abgeleiteten Function Statt finde. Doch stellen wir die Aufgabe allgemeiner, und fragen, wie gross der Unterschied sei, wenn die Entwicklung bei einem willkürlichen Theilnenner abgebrochen wird. Wenn a_r der letzte Theilnenner ist, welcher berechnet wird, so werden alle Gleichungen, welche in

$$\Sigma A_\alpha(a_0, a_r)_{2\delta}.x^{\alpha+\delta} = \Sigma B_\beta(a_1, a_r)_{2\gamma}x^{\beta+\gamma}, \quad \text{condd.} \begin{array}{l}\alpha+\delta < r+1\\ \beta+\gamma < r+1\end{array}$$

enthalten sind, befriedigt. Mit dieser Gleichung stimmt die folgende ganz überein:

$$\sum\limits_0^n A_\alpha x^\alpha.\Sigma(a_0, a_r)_{2\beta}.x^\beta - \Sigma A_\gamma(a_0, a_r)_{2\beta}x^{\gamma+\beta}$$
$$= \sum\limits_0^m B_\alpha x^\alpha.\Sigma(a_1, a_r)_{2\beta}x^\beta - \Sigma B_\gamma(a_1, a_r)_{2\beta}x^{\beta+\gamma},$$

wo die Gränzen, zwischen welchen α und β liegen, schon bestimmt sind und γ der Bedingung $\gamma+\beta>r$ genügen muss. Wird diese Gleichung durch das Product $\sum_0^m B_\alpha x^\alpha . \Sigma(a_0, a_r)_{2\beta} x^\beta$ dividirt, so erhält man

$$12)\quad \frac{\Sigma(a_1, a_r)_{2\beta} x^\beta}{\Sigma(a_0, a_r)_{2\beta} x^\beta} = F(a_0, a_r) = \frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha} - \frac{\Sigma[A_\gamma(a_0, a_r)_{2\beta} - B_\gamma(a_1, a_r)_{2\beta}] x^{\beta+\gamma}}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha . \Sigma(a_0, a_r)_{2\beta} x}.$$

Da $\beta+\gamma>r$ ist, so ist x^{r+1} Factor der Differenz. Wenn $r=2\mu$ ist, so sind $A_{\mu+1}$ und $B_{\mu+1}$ die niedrigsten Coefficienten, welche in dem Zähler der Differenz $F(a_0, a_r) - \frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha}$ vorkommen; wenn $r=2\mu+1$ ist, so kommen die Coefficienten A von $A_{\mu+1}$, aber die Coefficienten B nur von $B_{\mu+}$ darin vor. Die Grössen $(a_0, a_r)_{2\beta}$ und $-(a_1, a_r)_{2\beta}$ können aus dem Systeme (7.) und (9.) gefunden werden, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Ist nun $m<n$ und $r=2n$, so ist der Unterschied Null. Dasselbe gilt, wenn $m>n$ und $r=2m-1$ ist. Also sind die Gleichungen (11.) völlig genau. Wenn n, oder m, oder beide unendlich sind, so wird der abgeleitete Kettenbruch im Allgemeinen nicht abbrechen und eben so wenig die Differenz verschwinden; doch sind im Zähler der Differenz die Grössen, durch welche die Convergenz der gegebenen Reihen bedingt ist, enthalten; nämlich sowohl die höhern Potenzen von x, als die höhern Coefficienten A und B.

§. 5.

Mit der Verwandlung des Verhältnisses $\frac{\sum_0^n A_\alpha x^\alpha}{\sum_0^m B_\alpha x^\alpha}$ in einen Kettenbruch $F(a_0, a_r)$, wo $r=2n$ oder $r=2m-1$ ist, ist auch das Mittel gegeben, den Quotienten $\frac{\sum_0^n A_\alpha x^{-\alpha}}{\sum_0^m B_\alpha x^{-\alpha}} = x^{m-n} . \frac{\sum_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}}{\sum_0^m B_\alpha x^{m-\alpha}}$ in einen Kettenbruch von der Form

$$h_0 - \cfrac{h_1}{x+R_1 - \cfrac{h_2}{x+R_2 - \cfrac{h_3}{x+R_3 - \text{etc.}}}}$$

zu verwandeln. Da aber dieser Bruch im Zähler und Nenner immer auf denselben Grad steigt, so setzen wir sogleich $m=n$, und in $F(a_0, a_{2n})$, $\frac{1}{x}$ statt x. Dies giebt

$$13)\quad \frac{\sum_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}}{\sum_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}} = F(a_0, a_{2n}) = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 x + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 x + \cfrac{1}{a_4 + \ldots + \cfrac{1}{a_{2n-2} + \cfrac{1}{a_{2n-1} \cdot x + \cfrac{1}{a_{2n}}}}}}}}}.$$

Bringt man die Theilnenner in die Zähler und setzt $\frac{1}{a_\alpha a_{\alpha+1}} = -p_{\alpha+1}$, so ist $p_{\alpha+1} = \frac{\Delta_{\alpha-2}.\Delta_{\alpha+1}}{\Delta_{\alpha-1}\Delta_\alpha}$, und der Kettenbruch ist, wenn noch $p_0 = +\frac{1}{a_0} = \frac{\Delta_0}{B_0}$ gesetzt wird:

$$\cfrac{p_0}{1 - \cfrac{p_1}{x - \cfrac{p_2}{1 - \cfrac{p_3}{x - \ldots - \cfrac{p_{2n-2}}{1 - \cfrac{p_{2n-1}}{x - p_{2n}}}}}}}.$$

Nun ist, wenn $R_{2\alpha}$ diesen Kettenbruch von dem Theilbruch $\frac{p_{2n}}{1}$ an bezeichnet:

$$R_{2\alpha} = \cfrac{p_{2\alpha}}{1 - \cfrac{p_{2\alpha+1}}{x - R_{2\alpha+2}}} = p_{2\alpha}\left(1 + \frac{p_{2\alpha+1}}{x - p_{2\alpha+1} - R_{2\alpha+2}}\right).$$

Die wiederholte Anwendung dieser Gleichung giebt die Gleichung

$$14)\quad \frac{\sum\limits_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}}{\sum\limits_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}} = p_0 + \cfrac{p_0 p_1}{x-p_1-p_2-\cfrac{p_2p_3}{x-p_3-p_4-\cfrac{p_4p_5}{x-p_5-p_6-\dots-\cfrac{p_{2n-2}.p_{2n-1}}{x-p_{2n-1}-p_{2n}}}}},$$

wo $p_0p_1 = \frac{\Delta_1}{B_0^2}$, $p_2p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_1^2}$, $p_4p_5 = \frac{\Delta_1\Delta_5}{\Delta_3^2}$, und allgemein $p_{\alpha+3}\,p_{\alpha+4} = \frac{\Delta_\alpha.\Delta_{\alpha+4}}{\Delta_{\alpha+2}^2}$ ist. Die Anzahl der Constanten ist in diesem sowohl, als in dem obigen Kettenbruch $2n+1$, und dieselbe Anzahl ist in dem gegebenen Verhältniss $\frac{\sum\limits_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}}{\sum\limits_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}}$ enthalten, wenn ein Coefficient $=1$ gesetzt wird. Sollen die obigen Grössen a_α, N_α, Δ_α durch die Constanten p_α ausgedrückt werden, so ist zunächst

$$N_{2\mu} = B_0.\frac{1}{a_0}.\frac{1}{a_1a_2}.\frac{1}{a_3a_4}\dots\frac{1}{a_{2\mu-1}a_{2\mu}},\quad N_{2\mu+1} = -B_0.\frac{1}{a_0a_1}.\frac{1}{a_2a_3}.\frac{1}{a_4a_5}\dots\frac{1}{a_{2\mu}a_{2\mu+1}}$$

und daher

$$N_{2\mu} = (-1)^\mu B_0.p_0p_2p_4\dots p_{2\mu},\quad N_{2\mu+1} = (-1)^\mu B_0.p_1p_3p_5\dots p_{2\mu+1}.$$

Da ferner $a_{2\mu} = -\frac{N_{2\mu-1}}{N_{2\mu}}$ und $a_{2\mu+1} = -\frac{N_{2\mu}}{N_{2\mu+1}}$ ist, so ist

$$a_{2\mu} = \frac{p_1p_3p_5\dots p_{2\mu-1}}{p_0.p_2p_4p_6\dots p_{2\mu}} \text{ und } a_{2\mu+1} = -\frac{p_0p_2p_4\dots p_{2\mu}}{p_1p_3p_5\dots p_{2\mu+1}}.$$

Aus §. 3. ergiebt sich

$$\Delta_{2\mu} = B_0^{2\mu+1}.p_0^{\mu+1}.(p_1p_2)^\mu.(p_3p_4)^{\mu-1}\dots(p_{2\mu-1}p_{2\mu})^1,$$
$$\Delta_{2\mu+1} = B_0^{2\mu+2}.(p_0p_1)^{\mu+1}.(p_2p_3)^\mu.(p_4p_5)^{\mu-1}\dots(p_{2\mu}p_{2\mu+1})_1.$$

§. 6.

Es liesse sich der Kettenbruch (13.) auch durch fortgesetzte Division aus dem Bruche $\frac{\sum\limits_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}}{\sum\limits_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}}$ entwickeln, oder durch ein System von Gleichungen ersetzen. Es seien V_α und U_α rationale ganze Functionen vom Grade α in Bezug auf x, und a_α sei eine Constante: dann lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$15)\quad \begin{cases} V_n \;\, = a_0 . U_n \;\, + V_{n-1} & U_n \;\, = a_1 x . V_{n-1} + U_{n-1} \\ V_{n-1} = a_2 . U_{n-1} + V_{n-2} & U_{n-1} = a_3 x . V_{n-2} + U_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ V_2 \;\, = a_{2n-4} . U_2 + V_1 & U_2 \;\, = a_{2n-3} x . V_1 + U_1 \\ V_1 \;\, = a_{2n-2} . U_1 + V_1 & U_1 \;\, = a_{2n-1} x . V_0 + U_0 \\ V_0 \;\, = a_{2n} . U_0 . & \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen mit einander verbunden und wird $V_n = \overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} B_\alpha x^{n-\alpha}$ und $U_n = \overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} A_\alpha x^{n-\alpha}$ gesetzt, so erhält man die Gleichung (13.). Wenn nun V_n und U_n einen linearen Factor gemein haben, so gilt dasselbe von V_{n-1}, U_{n-1}, V_{n-2}, U_{n-2} etc. Sollen aber V_1 und U_1 einen linearen Factor gemein haben, so muss wegen der Gleichung $V_1 = a_{2n-2} . U_1 + V_0$ die Grösse $V_0 = 0$, also $a_{2n-1} = \infty$ und $a_{2n} = 0$ wegen der Gleichungen $U_1 = a_{2n-1} x . V_0 + U_0$, $V_0 = a_{2n} . U_0$ sein. Diesen Gleichungen $a_{2n-1} = \infty$ und $a_{2n} = 0$ wird genügt durch $\Delta_{2n-1} = 0$, und auf keine andere Weise, weil nach (10.)

$$a_{2n-1} = -\frac{\Delta_{2n-2}^2}{\Delta_{2n-3} \cdot \Delta_{2n-1}}, \quad a_{2n} = \frac{\Delta_{2n-1}^2}{\Delta_{2n-2} \Delta_{2n}}$$

ist, und die Determinanten Δ_α, aus endlichen Elementen zusammengesetzt, nie unendlich werden. Umgekehrt ist, wenn $\Delta_{2n-1} = 0$, also $a_{2n} = 0$ ist, auch $V_0 = 0$, also den Grössen der lineare Factor gemein; derselbe Factor ist daher auch in V_n und U_n enthalten. Mithin ist

$$16) \quad \Delta_{2n-1} = 0$$

die Bedingung, welche erfüllt werden muss, damit die Functionen $\overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} A_\alpha x^{n-\alpha}$ und $\overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} B_\alpha x^{n-\alpha}$ einen linearen Factor, oder die Gleichungen $\overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} A_\alpha x^{n-\alpha}$ und $\overset{n}{\underset{0}{\Sigma}} B_\alpha x^{n-\alpha} = 0$ eine Wurzel gemein haben. Das System der Elemente für Δ_{2n-1} geht aus (9.) hervor, wenn man $\mu = n-1$, $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = A_{2n-1} = 0$ und $B_{n+1} = B_{n+2} = \dots B_{2n-1} = 0$ setzt, und ist daher

$$17)\quad \begin{cases} 0, & 0, & \dots 0, & A_n, & B_n, & 0, & \dots 0, & 0 \\ 0, & 0, & \dots A_n, & A_{n-1}, & B_{n-1}, & B_n, & \dots 0, & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ A_n, & A_{n-1}, & \dots A_2, & A_1, & B_1, & B_2, & \dots B_{n-1}, & B_n \\ A_{n-1}, & A_{n-2}, & \dots A_1, & A_0, & B_0, & B_1, & \dots B_{n-2}, & B_{n-1} \\ A_{n-2}, & A_{n-3}, & \dots A_0, & 0, & 0, & B_0, & \dots B_{n-3}, & B_{n-2} \\ \dots & & & & & & & \\ A_1, & A_0, & \dots 0, & 0, & 0 & 0, & \dots B_0, & B_1 \\ A_0, & 0 & \dots 0, & 0, & 0, & 0, & \dots 0, & B_0. \end{cases}$$

Die Bedingung $\Delta_{2n-1}=0$ ist zugleich die Eliminationsgleichung der beiden Gleichungen $\sum\limits_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum\limits_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}=0$, und steigt in Bezug auf die Coefficienten A auf die $n$te Dimension; eben so in Bezug auf die Coefficienten B, und rücksichtlich sämmtlicher Coefficienten auf die Dimension $2n$.

Sollen aber die Gleichungen $\sum\limits_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum\limits_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}=0$ zwei Wurzel gemein haben, so kommt zu der Bedingung $V_0=0$ oder Δ_{2n-1} noch die neue $V_1=0$ oder $\Delta_{2n-3}=0$ hinzu, welche letztere aus $V_1=0$ eben so, wie oben $\Delta_{2n-1}=0$ aus $V_0=0$, hervorgeht. Das System der Elemente für Δ_{2n-3} findet sich aus (9.), wenn $\mu=n-2$ gesetzt wird, und es geht aus (17.) hervor, wenn die unterste und die oberste Horizontalreihe, so wie die erste und die letzte Verticalreihe weggelassen werden. Ueberhaupt ist, wenn $\sum A_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum B_\alpha x^{n-\alpha}=0$, r Wurzeln gemein haben:

$$18)\quad \Delta_{2n-1}=0,\ \Delta_{2n-3}=0,\ \dots\ \Delta_{2(n-r)+1}=0;$$

und umgekehrt. Um die Elementensysteme für diese Determinanten zu erhalten, hat man in (9.) der Reihe nach $m=n-1,\ n-2,\ \dots\ n-r$ zu setzen, oder von dem Systeme (17.) in derselben Reihenfolge $0, 1, 2, \dots r-1$ Reihen unten und oben und links und rechts wegzulassen. Es ist daher $\Delta_{2(n-r)+1}$ in Bezug auf die Elemente A_α von der $(n-r+1)$ten Dimension; eben so in Bezug auf B_α, und in Rücksicht auf sämmtliche Coefficienten von der $2(n-r+1)$ten.

Die Determinante Δ_{2n-1} bleibt, abgesehn vom Vorzeichen, ungeändert, wenn A_α mit B_α für alle Werthe von α vertauscht wird, und auch, wenn überall A_α an die Stelle von $A_{n-\alpha}$ und B_α an die Stelle von $B_{n-\alpha}$ tritt. Die erstere Symmetrie findet auch bei den übrigen Determinanten (18.) Statt; nicht

so die andere. Da aber, sobald die Gleichungen $\sum_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}=0$ r Wurzeln gemein haben, dasselbe von den Gleichungen $\sum_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum_0^n B_\alpha x^\alpha=0$ gilt, so müssen die Gleichungen (18.) sämmtlich auch dann gelten, wenn darin A_α statt $A_{n-\alpha}$ und B_α statt $B_{n-\alpha}$ gesetzt wird. Doch enthalten die so entstandenen Ausdrücke keine neuen Bedingungen; sie sind eine Folge der Gleichungen (18.).

Auf das Obige lassen sich auch die Fälle zurückführen, in welchen die gegebenen Gleichungen von verschiedenen Graden sind. Wenn für die Gleichungen

$$\sum_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}=0 \quad \text{und} \quad \sum_0^{n-m} A_\alpha x^{n-m-\alpha}=0$$

die Bedingungen gesucht werden, unter welchen sie gemeinsame Wurzeln haben, so nehme man statt der letztern Gleichung $\sum_0^n A_\alpha x^{n-\alpha}=0$, setze $A_n=A_{n-1}=\ldots=A_{n-m+1}=0$ und schliesse die Wurzeln, welche Null sind, von der Betrachtung aus. Werden aber in (17.) die Elemente $A_n, A_{n-1}, \ldots A_{n-m-1}$ gleich Null gesetzt, so bleiben in den m ersten Horizontalreihen der Reihe nach nur $1, 2, 3, \ldots m$ Elemente, welche nicht Null sind. Sie bilden das System

$$\begin{array}{l} B_n \\ B_{n-1},\ B_n \\ B_{n-2},\ B_{n-1},\ B_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{n-m+1},\ B_{n-m+2},\ \ldots\ B_n. \end{array}$$

Es ist nur eine Combination derselben, nämlich B_n^m möglich. Daher ist B_n^m Factor der Determinante Δ_{2n-1}, welche hier gefunden wird. Es verschwindet also Δ_{2n-1}, wenn $B_n=0$ ist; doch haben dann die Gleichungen $\sum_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum_0 A_\alpha x^{n-\alpha}=0$ die Wurzel $x=0$ gemein, welche ausgeschlossen ist; daher muss der andere Factor von Δ_{2n-1}, den wir durch Δ'_{2n-1} bezeichnen wollen, verschwinden, wenn $\sum_0^n B_\alpha x^{n-\alpha}=0$ und $\sum A_\alpha x^{n-m-\alpha}=0$ eine Wurzel gemein haben. Es ist $\Delta'_{2n-1}=0$ die bekannte Eliminationsgleichung der gegebenen Gleichungen ohne einen ungehörigen Factor. Die übrigen Bedingungsgleichungen (18.) erleiden unter der Voraussetzung, dass $A_n=A_{n-1}=\ldots=A_{n-m+1}=0$ ist, geringere Abänderungen als Δ_{2n-1}.

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXXIII. Heft 2.

Fac-simile einer Handschrift von Méchain.

Monsieur le Comte

Je profite de l'occasion que me fournit un de nos habiles opticiens, M. Putois, qui va passer quelques jours à Londres, pour vous offrir un exemplaire de la Connoissance des tems de 1792. Je serai infiniment flatté si vous daignez l'accepter, non pour ce que vaut cet ouvrage, mais comme un foible hommage de mon respectueux dévouement. J'ose même prendre la liberté de vous supplier de vouloir bien faire passer les exemplaires ci-joints à MM. Maskelyne et Herschel, à qui je n'ai plus de moyens de les faire parvenir directement.

L'abbé Rochon aura sans doute eu l'honneur de vous faire part, Monsieur, qu'il vient d'être nommé l'un des commissaires de la Monnoie. Cette nouvelle place réparera un peu le tort que la révolution dans le clergé a fait à sa fortune; tous ses amis en sont enchantés. Ce qui l'afflige dans cet évènement, c'est qu'il lui ôte la possibilité de retourner en Angleterre; il vous exprimera mieux que moi ses regrets. Je comptois qu'il vous porteroit le cours de Bezout; mais je chercherai le moyen de vous faire passer cet ouvrage bientôt, si comme je le crains le paquet est un peu trop gros pour que M. Putois s'en charge. Je ferai mes efforts pour trouver ici les tables du nonagésime de M. Levesque et je les joindrai à mon envoi.

Je vous demande mille pardons, ...

Je suis avec un profond respect

Monsieur le Comte

à Paris le 14 mai 1791

votre très humble et très obéissant serviteur Méchain

10.

De curvis catenariis sphaericis dissertatio analytico-geometrica.

(Auct. Dr. *Christoph. Gudermann*, Math. Prof. ord. Monast. Guestph.)

1.

Si puncta fili gravitate aequabiliter affecti extrema cum duobus punctis superficiei sphaericae firmiter coniunguntur (in huius superficiei parte superiore), tum gravitas, tum forma superficiei efficiunt, ut omnes fili partes in superficie sphaerica positi formas sibi induant determinatas curvae cuiusdam sphaericae, quam dicimus *catenariam sphaericam*, dummodo filum est absolute flexibile, et frictio omnino abest. Meditatus de curvis catenariis proposui problema de ipsarum figuris mathematice determinandis, cui quaestioni egregie respondit Ill. Dr. *F. Minding* in huius Diarii vol. XII., quo loco simul invenit, curvas catenarias sphaericas esse eas, ut ipsarum centra gravitatis infimum locum petant atque teneant; quia vero inventa curvae aequatione problema reliquum non tetigit celeberrimus auctor, ipse illud solvendum nunc suscipio, ob eam potissimum rationem, ut insignibus curvarum catenariarum sphaericarum proprietatibus delectentur geometrae, qui in eiusmodi studiis versantur et delectamenta quaerunt geometrica.

E principiis mechanices nota sunt aequationes differentiales generales tres:

$$\frac{\partial(m.\frac{\partial x}{\partial s})}{\partial s}+n.U+X=0,$$

$$\frac{\partial(m.\frac{\partial y}{\partial s})}{\partial s}+n.V+Y=0,$$

$$\frac{\partial(m.\frac{\partial z}{\partial s})}{\partial s}+n.W+Z=0,$$

in quibus U, V, W sunt coefficientes in aequatione superficiei differentiali obvii: $U\partial x+V\partial y+W\partial z=0$; x, y, z sunt linae coordinatae tres puncti M

ad catenariam pertinentis; X, Y, Z sunt tres vires, quae filum afficiunt in directionibus ad coordinatarum axes parallelis; m est vis filum in puncto M tendens, n est vis filum in M versus superficiem premens et ∂s est differentiale arcus curvae catenariae relatum ad ipsius punctum M.

Ut superficies curvae sit sphaerica valet aequatio $x^2+y^2+z^2-1=0$, quare est $U=2x$, $V=2y$ et $W=2z$. Gravitatis directio per sphaerae centrum transeuns superficiem secet in puncto superficiei supremo O, coniuncto cum punctis X, Y, Z axium ad superficiem pertinentibus per arcus circulorum maximorum $OX=\alpha$, $OY=\beta$, $OZ=z$, et distantia $OM=v$ sit. Nota est formula

$$1.\qquad \cos v = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

Est insuper $X=-g\cos\alpha$, $Y=-g\cos\beta$, $Z=-g\cos\gamma$; sit gravitas $=g$, ideoque $X=-\cos\alpha$, $Y=-\cos\beta$, $Z=-\cos\gamma$, si gravitas $=1$ ponitur; quare nunc valent aequationes tres differentiales:

$$\frac{\partial(m.\frac{\partial x}{\partial s})}{\partial s}+2nx=\cos\alpha,\qquad \frac{\partial(m.\frac{\partial y}{\partial s})}{\partial s}+2ny=\cos\beta,$$

$$\frac{\partial(m.\frac{\partial z}{\partial s})}{\partial s}+2nz=\cos\gamma,$$

quae evolutae fiunt

$$2.\qquad \begin{cases} m.\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial m}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+2nx=\cos\alpha \\ m.\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial m}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+2ny=\cos\beta \\ m.\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\frac{\partial m}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}+2nz=\cos\gamma. \end{cases}$$

Quia $x^2+y^2+z^2=1$, differentiando obtines $x\partial x+y\partial y+z\partial z=0$ et $x\partial^2 x+y\partial^2 y+z\partial^2 z=-\partial s^2$, et e formula $\partial x^2+\partial y^2+\partial z^2=\partial s^2$ obtines $\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z=0$, si ∂s est constans. Quare sequitur, multiplicando aequationem primam factore $\frac{\partial x}{\partial s}$, secundam factore $\frac{\partial y}{\partial s}$ et tertiam factore $\frac{\partial z}{\partial s}$ et multiplicatas addendo:

$$\frac{\partial x\partial^2 x+\partial y\partial^2 y+\partial z\partial^2 z}{\partial s^2}.m+\frac{\partial x+\partial y^2+\partial z^2}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial m}{\partial s}+\frac{2n(x\partial x+y\partial y+z\partial z)}{\partial s}$$

$$=\frac{\partial x\cos\alpha+\partial y\cos\beta+\partial z\cos\gamma}{\partial s},$$

sive simplicior aequatio $\partial m=\partial x\cos\alpha+\partial x\cos\beta+\partial z\cos\gamma$, cuius integralis est

$$3.\quad m = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + e, \quad \text{sive} \quad m = e + \cos v.$$

Si vero easdem aequationes multiplicas factoribus x, y, z, et multiplicatas colligis in summam, oritur

$$\frac{x.\partial^2 x + y.\partial^2 y + z\partial^2 z}{\partial s^2}.m + \frac{x\partial x + y\partial y + z\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial m}{\partial s} + 2n(x^2+y^2+z^2)$$
$$= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

ideoque $-m + 2n = m - e$, quare est

$$4.\quad n = m - \tfrac{1}{2}e \quad \text{sive} \quad n = \tfrac{1}{2}e + \cos v.$$

Formulis his staticis determinatur tum vis filum tendens m in M, tum vis fili punctum M versus sphaerae superficiem premens, dummodo pro harum virium unitate habes gravitatem g ipsam. Aequationem geometricam, scilicet eam curvae catenariae, ipsius hoc modo invenis. E duabus primis aequationibus (2) eliminatione quantitatis n oritur primo:

$$m.\frac{y\partial^2 x - x\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial m}{\partial s}\cdot\frac{y\partial x - x\partial y}{\partial s} = y\cos\alpha - x\cos\beta, \quad \text{et dein}$$

$$\partial\left(\frac{m(y\partial x - x\partial y)}{\partial s}\right) = (y\cos\alpha - x\cos\beta)\partial s, \quad \text{sive}$$

$$\partial\left(\frac{m(y\partial x - x\partial y)}{\cos\alpha\cos\beta.\partial s}\right) = \left(\frac{y}{\cos\beta} - \frac{x}{\cos\alpha}\right).\partial s, \quad \text{et pariter}$$

$$\partial\left(\frac{m(z\partial y - y\partial z)}{\cos\beta\cos\gamma.\partial s}\right) = \left(\frac{z}{\cos\gamma} - \frac{y}{\cos\beta}\right).\partial s,$$

$$\partial\left(\frac{m(x\partial z - z\partial x)}{\cos\alpha\cos\gamma.\partial s}\right) = \left(\frac{x}{\cos\alpha} - \frac{z}{\cos\gamma}\right).\partial s;$$

quare harum aequationum summatione oritur

$$\partial\left(\frac{m(y\partial x - x\partial y)}{\cos\alpha\cos\beta.\partial s}\right) + \partial\left(\frac{m(z\partial y - y\partial z)}{\cos\beta\cos\gamma.\partial s}\right) + \partial\left(\frac{m(x\partial z - z\partial x)}{\cos\alpha\cos\gamma.\partial s}\right) = 0,$$

et integrando invenis

$$\cos\gamma.m(y\partial x - x\partial y) + \cos\alpha.m(z\partial y - y\partial z) + \cos\beta.m(x\partial z - z\partial x) = h.\partial s,$$

vel si mavis

$$5.\quad (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + e)(\cos\gamma(y\partial x - x\partial y) + \cos\beta(x\partial z - z\partial x) + \cos\alpha(z\partial y - y\partial z))$$
$$= h.\partial s,$$

quae est *curvae catenariae sphaericae aequatio differentialis primi ordinis*, in forma quantum fieri potest generali, continens constantes duas e et h, quae ab integrationibus originem ducunt.

Curvam sphaericam *reciprocam* dicimus eam, cuius singula puncta sunt centra sphaerica circulorum maximorum eorum, qui curvam catenariam tangunt, et quae ideo quadrantis longitudine distat in quolibet puncto a curva

hac. Si punctum M' curvae nova reciprocitatis lege coniunctum est cum puncto catenariae curvae M, et x', y', z' sunt puncti M' lineae coordinatae ad easdem tres axes rectangulares relatae, valent formulae

$$-x = \frac{y'\partial z' - z'\partial y'}{\partial s'}, \quad -y = \frac{z'\partial x' - x'\partial z'}{\partial s'}, \quad -z = \frac{x'\partial y' - y'\partial x'}{\partial s'}, \quad \text{et inversae:}$$

$$-x' = \frac{y\partial z - z\partial y}{\partial s}, \quad -y' = \frac{z\partial x - x\partial z}{\partial s}, \quad -z' = \frac{x\partial y - y\partial x}{\partial s};$$

in quibus $\partial s'$ est differentiale arcus curvae reciprocae ad punctum M' relatum. Si formulis utimur his, ex aequatione (5) illico deducis aequationem curvae reciprocae differentialem hanc:

$$6.\ \begin{cases} \qquad\qquad (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma) \\ (\cos\gamma(y'x' - x'\ y') + \cos\beta(x'\partial z' - z'\partial x') + \cos\alpha(z'\partial y' - y'\partial z') + e\partial s') = h\partial s', \\ \text{sive} \quad (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma) \\ (\cos\gamma.(y'\partial x' - x'\partial y') + \cos\beta.(x'\partial z' - z'\partial x') + \cos\alpha(z'\partial y' - y'\partial z')) \\ \quad = (h - e(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)).\partial s', \end{cases}$$

quae similitudinem quandam habet cum aequatione curvae catenariae, et prorsus cum illa congruit, si constans $e = 0$ est; quare hoc quidem casu etiam curva reciproca est linea catenaria cum primitiva congruens.

Ex aequatione (5) sequitur etiam haec:

$$(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + e)(x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma) = h.$$

Quare si punctum superficiei sphaericae supremum O, quod cum puncto M coniunctum est arcu v, coniungis cum puncto reciproco M' arcu $OM = v'$, valet aequatio simplex

$$7. \quad \cos v'.(\cos v + e) = h.$$

2.

Si punctum Z coïncidit cum puncto superficiei sphaericae supremo, fit $\gamma = 0$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{2}\pi$; quare $\cos\gamma = 1$, $\cos\alpha = \cos\beta$, ideoque $z = \cos v$. Aequationes erutae nunc fiunt simpliciores, et quidem curvae catenariae aequatio differentialis nunc abit in

$$(z + e).(y\partial x - x\partial y) = h.\partial s;$$

aequatio curvae reciprocae nunc est

$$z'(y'\partial x' - x'\partial y') = (h - ez')\partial s'.$$

Aequatio denique (7) nunc abit in $z'(z + e) = h$.

Sed coordinatis nunc utamur sphaericis. Linea abscissarum sphaericarum sit circulus maximus horizontalis, cuius igitur centrum sphaericum est punctum sphaerae supremum O, et in quam a puncto M demittamus applicatam sphae-

ricam $PM = y$. Ponas igitur $\sin y$ loco z et $\cos^2 y . \partial x$ loco $y\partial x - x\partial y$, quare aequatio differentialis lineae catenariae abit in

$$1. \quad (\sin y + e) . \cos^2 y . \partial x = h . \partial s$$

unde, quia $\partial s^2 = \partial y^2 + \cos^2 y . \partial x^2$ est, derivabis has:

$$2. \quad \partial x = \frac{\pm h . \partial y}{\cos y \sqrt{(\cos^2 y(\sin y + e)^2 - h^2)}},$$

$$3. \quad \partial s = \frac{\pm (\sin y + e) \cos y \partial y}{\sqrt{(\cos^2 y(\sin y + e)^2 - h^2)}}.$$

Ambiguitates obviae desinunt, si initium abscissarum et initium arcus determinamus ita, ut crescente applicata y abscissa x et arcus s aut pariter crescant, aut decrescant.

Si in eandem lineam abscissarum a puncto reciproco M' demittimus applicatam $P'M' = y'$ et abscissam x' denominamus, aequatio curvae reciprocae fit

$$4. \quad \sin y' . \cos^2 y' . \partial x' = (h - e \sin y') . \partial s',$$

unde pari modo quo antea derivabis

$$5. \quad \partial x' = \frac{\pm (h - e \sin y') . \partial y'}{\cos y' \sqrt{(\sin^2 y' \cos^2 y' - (h - e \sin y')^2)}},$$

$$6. \quad \partial s' = \frac{\pm \sin y' \cos y' . \partial y'}{\sqrt{(\sin^2 y' \cos^2 y' - (h - e \sin y')^2)}}.$$

Nexum inter applicatas punctorum reciprocorum exprimit formula

$$7. \quad z'(z + e) = h, \quad \text{sive} \quad \sin y'(\sin y + e) = h.$$

Vires m et n variabiles quidem sunt, at differentia ipsarum est constans, vidimus enim esse

$$m = n + \tfrac{1}{2} e.$$

Si quantitas constans $e = 0$, est $m = n$. Curvam nunc decimus *parabolicam*.

Si e est quantitas negativa, in quolibet curvae puncto est $m < n$, et curvam hoc casu descriptam dicimus *ellipticam*. Si denique e est quantitas positiva, in quolibet curvae puncto vis tendens vire premente major est, et curvam tunc dicimus *hyperbolicam*. Haec sufficiat divisio in disquisitionis initio. Quia permutando $+e$ cum $-e$ in formulis differentialibus modo prolatis idem efficitur, ac si applicatam y permutamus cum $-y$ (et pariter y' permutamus cum $-y'$), concludimus, curvam catenariam totam constare e duobus ramis, sive curvis a duabus lineae abscissarum partibus oppositis jacentibus, quorum altera est elliptica, altera est hyperbolica. Si vero alter ramus est curva parabolica, etiam alter est parabolica, cum priore congrua.

Si sphaerae partem superiorem permutamus cum inferiore, ramus para-

bolicus permutatur cum ramo parabolico congruo; at ramus ellipticus cum hyperbolico, et hyperbolicus cum elliptico.

3.
De catenariis parabolicis.

Si in aequatione (2) artic. praec. ponimus $e = 0$ et $h = \sin\alpha\cos\alpha$, abscissarum initio ita sumpto, ut crescente adplicata y crescat abscissa x, habemus aequationem catenariae parabolicae hanc:

$$1. \quad \begin{cases} \partial x = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha.\partial y}{\cos y\sqrt{(\sin^2 y\cos^2 y - \sin^2\alpha\cos^2\alpha)}}, \quad \text{sive} \\ \partial x = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha.\partial y}{\cos y\sqrt{((\sin y-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin y)(\sin y+\cos\alpha)(\sin y+\sin\alpha))}}. \end{cases}$$

Si igitur $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ et $\frac{1}{2}\pi - \alpha = \alpha'$, ideoque $\alpha' > \frac{1}{4}\pi$ sumuntur, applicata y erit inter fines α et α', et sita est curva inter duos circulos minores e centro lineae abscissarum radiis α' et α descriptos, quos ascendens ab inferiore ad superiorem et descendens a superiore ad inferiorem alternatim tangit. Quia enim, si λ est angulus, quem applicata y puncti M facit cum circulo maximo curvam in M tangente, formulae generales $\tang\lambda = \cos y.\frac{\partial x}{\partial y}$, $\cos\lambda = \frac{\partial y}{\partial s}$, $\sin\lambda = \cos y.\frac{\partial x}{\partial s}$ praebent

$$2. \quad \sin\lambda = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2y};$$

perspicis, esse angulum $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, si $y = \alpha$ et si $y = \alpha'$. Si applicatae duae y et y' sumuntur, et anguli λ alter valor λ' est, λ et λ' diversi erunt, si $y + y' \gtrless \frac{1}{2}\pi$; si vero $y + y' = \frac{1}{2}\pi$, erit $\sin 2y' = \sin 2\lambda$, ideoque $\lambda' = \lambda$. Angulus λ est minimus et quidem $= 2\alpha$ est, si applicata y est media inter extremas $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{1}{4}\pi$.

Formula inventa viam monstrat, qua inveniatur circulus max. curvam in M tangens. Applicatam $PM = y$ ultra pedem P prolonges, ut prolongatio $PM' = PM = y$ sit, sive $MM' = 2y$, (punctum M' erit rami coniugati punctum), et e centro M describas circulum minorem radio $= 2\alpha$; si dein e puncto M ducis circulos maximos duos, qui circulum illum minorem tangant, ipsarum unus, et quidem is, quae applicata illa y minores transit, tanget et curvam nostram parabolicam. Si N est ipsius contactus cum circulo minore, triangulum facias $MM'N$, cuius hypotenusa erit $MM' = 2y$, cathetus $M'N = 2\alpha$, angulus N est rectus.

Vertices curvae sunt ea ipsius puncta innumerabilia, pro quibus $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, i. e. ea puncta, in quibus curva tangit circulos supra descriptos minores parallelos. Sit A curvae vertex inferior et B curvae vertex superior subsequens.

Arcus curvae AM et BM computatu facillimi sunt. Si arcum $AM = s$ ponimus, est $s = \int_\alpha \frac{\sin y \cos y . \partial y}{\sqrt{(\sin^2 y \cos^2 y - \sin^2\alpha \cos^2\alpha}} = \int_\alpha \frac{\sin 2y . \partial y}{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha}}$

$= \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{-\partial \frac{\cos 2y}{\cos 2\alpha}}{\sqrt{(1 - \frac{\cos^2 2y}{\cos^2 2\alpha})}}$, quare valet formula $s = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{\cos 2y}{\cos 2\alpha}\right)$, sive inversa

$$3. \quad \cos 2y = \cos 2\alpha . \cos 2s.$$

Hinc perspicis esse trianguli $M'MN$ cathetum $MN = 2s = 2.AM$, quae est curvae *rectificatio geometrica.* E formula (3), ponendo $y = \alpha'$, invenis esse $\cos(2.AB) = -1$, ideoque $AB = \frac{1}{2}\pi =$ quadranti circuli maximi; qui valor est memorabilis, quum a curvae parametro sive constante α non pendeat. Sit 2Δ area trianguli MNM', est $\operatorname{tang}\Delta = \operatorname{tang}\frac{1}{2}NM . \operatorname{tang}\frac{1}{2}NM' = \operatorname{tang}\alpha . \operatorname{tang} s$, et videbis, etiam curvae *quadraturam* cum hac area esse coniunctam. Si f est area inter curvam AM, inter applicatas punctorum A et M et abscissam interceptam x, formula notissima $\partial f = \sin y . \partial x$ praebet

$$f = \int_\alpha \frac{\sin 2\alpha . \operatorname{tang} y . \partial y}{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}} = \int_0 \frac{\operatorname{tang}\alpha \partial \operatorname{tang} s}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha . \operatorname{tang}^2 s} = \int_0 \frac{\partial \operatorname{tang}\Delta}{1 + \operatorname{tang}^2\Delta}$$

quare est $f = \Delta$, *sive semissi areae trianguli characteristici aequalis est.* Area, quae ad quadrantem AB pertinet tota igitur est $= \frac{1}{2}\pi$. Si punctum M est tale, ut ipsius applicata y sit $= \frac{1}{4}\pi$, est $s = \frac{1}{4}\pi$, quare punctum M in arcu AMB est medium, i. e. $AM = BM$. Hinc sequitur aream modo dictam totam applicata PM tunc in partes dividi, quorum minor $= \alpha$ et maior $= \alpha'$.

3.

Jam supra (in artic. 1) vidimus, curvae parabolicae curvam reciprocam omnino congruere cum illa. Cum punctorum reciprocorum applicatae coniunctae sint aequatione

$$1. \quad \sin y \sin y' = \sin\alpha . \cos\alpha,$$

vides, esse $y' = \alpha'$, si $y = \alpha$, et esse $y' = \alpha$ si $y = \alpha'$. Si A est vertex reciprocus verticis A, et B' est reciprocus verticis B, applicata verticis A' est α' et applicata verticis B' est α. Si igitur arcum $A'M' = s'$ ponis, formula $\cos 2y = \cos 2\alpha . \cos 2s$ mutanda est in $\cos 2y' = \cos 2\alpha' . \cos 2s' = -\cos 2\alpha . \cos 2s'$, quare aequatio:

$$2\sin^2 y \,.\, 2\sin^2 y' = 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha, \quad \text{sive}$$
$$(1-\cos 2y)(1-\cos 2y') = \sin^2 2\alpha \quad \text{migrat in}$$
$$(1-\cos 2\alpha\cos 2s)(1+\cos 2\alpha\,.\cos 2s') = \sin^2 2\alpha,$$

unde deducis simpliciorem hanc:

$$2. \quad \tang s' = \frac{\tang s}{\tang \alpha},$$

quae nexum exprimit inter arcus reciprocos s et s'. Quia supra vidimus esse $\tang f = \tang \alpha\,.\tang s$, pro curva reciproca valet formula $\tang f' = \tang \alpha'\,.\tang s'$, sive $\tang f' = \frac{\tang s}{\tang^2 \alpha}$, ideoque $\tang f' = \frac{\tang f}{\tang^2 \alpha}$, quae formula nexum perhibet inter quadraturas arearum reciprocarum.

Si radium osculi sphaericum curvae primitivae pro ipsius puncto M litera r obsignas, et lineam normalem signo N, formulae generales

$$\tang r = \frac{\partial \sin y}{\partial \sin y'} \text{ et } \tang N = \frac{\sin y}{\sin y'}$$

praebent has: $\tang r = -\frac{2\sin^2 y}{\sin 2\alpha}$ et $\tang N = \frac{2\sin^2 y}{\sin 2\alpha}$, e quibus perspicis r et N esse magnitudine eadem et situ oppositas lineas. Valor negativus ipsius $\tang r$ insuper indicat, curvam totam esse convexam versus abscissarum lineam. Quo indicato formulam mutamus in $\tang r = \frac{\sin^2 y}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Pro vertice A est $y = \alpha$, ideoque $r = \alpha$, et pro vertice B est $y = \alpha'$, ideoque $r = \alpha'$.

Cum scimus arcum esse convexum, area f etiam computatur ope formulae $f = \frac{3}{2}\pi + \lambda - 2\pi + s'$ sive $f = \lambda + s' - \frac{1}{2}\pi$, et pariter invenies formulam reciprocam $f = \lambda' + s - \frac{1}{2}\pi$ secundum generalissimum theorema de curvis reciprocis ab auctore inventum.

Formulam si exempli gratia primam $f = \lambda + s' - \frac{1}{2}\pi$ calculo vis comprobare, in formula $\tang f = \frac{\tang\lambda\tang s' - 1}{\tang\lambda + \tang s'}$ substituas $\tang\lambda = \frac{\tang 2\alpha}{\sin 2s}$ et $\tang s' = \frac{\tang s}{\tang\alpha}$, qui fiunt $\tang\lambda\,.\tang s' - 1 = \frac{\sin^2 s + \tang^2\alpha\,.\cos^2 s}{(1-\tang^2\alpha)\cos^2 s}$ et $\tang\lambda + \tang s' = \frac{\sin^2 s + \tang^2\alpha\,.\cos^2 s}{\tang\alpha(1-\tang^2\alpha)\sin s\cos s}$, ideoque $\tang f = \tang\alpha\,.\tang s$; quod et supra invenimus

4.

Si curvae aequationem $x = \int_\alpha \frac{\sin 2\alpha\,.\partial y}{\cos y\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}}$ integrare vis, introducas arcum s' curvae reciprocae ope aequationis

$$(1 - \cos 2y)(1 + \cos 2\alpha . \cos 2s') = \sin^2 2\alpha$$
$$\text{sive } \operatorname{tang} s' = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} . \sqrt{(\operatorname{tang}(y-\alpha) \operatorname{tang}(y+\alpha))}$$

quo fit $x = \int_0^{s'} \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha} . \frac{\sqrt{(1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2 s')}}{1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha}\sin^2 s'} . \partial s'$, ideoque comparanda est cum integrali

$$D'(u, a) = \int_0 \frac{tn'a . dn'a . dn^2 u . \partial u}{1 - dn'^2 a . sn^2 u}:$$

Si primo ponimus $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 - \operatorname{tang}^2\alpha = k^2$, fit $k' = \operatorname{tang}\alpha$. Recepto modulo k sit $s' = amu$. erit $\sqrt{(1 - k^2\sin^2 s')} = \sqrt{(1 - k^2\sin^2 u)} = dnu$, $\partial s' = dnu . du$, ideoque

$$x = \int_0 \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} . \frac{dn^2 u . \partial u}{1 - \frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha} sn^2 u}.$$

Si vero nunc ponimus $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha} = dn'^2 a = 1 - k'^2 sn'^2 a$, quo fit $sn'a = \operatorname{tang}\alpha$, sive

$$sn'a = k', \quad cn'a = k,$$

eruis $tn'a . dn'a = \frac{k'}{k}\sqrt{(1 - k'^2 . k'^2)} = k'\sqrt{(1 + k'^2)} = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$, unde perspicis esse

$$x = {}'D(u, a).$$

E formula $s' = amu$ sequitur $\operatorname{tang} s' = tnu$, quare est $tncu = \frac{1}{k'tnu} = \frac{1}{k'\operatorname{tang} s'} = \frac{1}{\operatorname{tang} s}$, unde perspicis esse $s = \frac{1}{2}\pi - amcu$.

Abscissa tota arcui AB subtensa quia est $X = {}'D(k, a)$, abscissam arcui BM subtensam invenis $X - x = {}'D(k, a) - {}'D(u, a)$.

Si x' est abscissa reciproca, quae quidem subtensa est arcui $A'M'$, in formula ultima permutandi sunt arcus $(\frac{1}{2}\pi - s)$ et s', quo si mutatur u in u', fit

$$x' = {}'D(k, a) - {}'D(u', a),$$

in qua est $s = \frac{1}{2}\pi - amu'$ et $s' = amcu'$, unde sequitur $u + u' = k$. Relatio inter abscissas x et x' est ea, ut differentia $x' - x$ sit complementum subtangentis, quae ad curvam primitivam vel ad curvam reciprocam pertinet, cum duae lineae subtangentes sunt eiusdem magnitudinis, et memineris, initia abscissarum x et x' esse puncta e diametro opposita.

Si igitur subtangentem curvae $= t$ ponimus, erit $x' - x = \frac{1}{2}\pi - t$.

Quam legem generalem, si calculo ipso volumus confirmare, e formulis $\tang \lambda = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}}$ et $\tang t = \tang \lambda . \sin y$ componimus

$$\tang t = \frac{\sin 2\alpha . \sin y}{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}};$$ quare confirmanda est formula

$$\tang (x' - x) = \frac{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}}{\sin 2\alpha . \sin y}.$$

Quia $x' - x = {}'D(k, a) - {}'D(k - u, a) - {}'D(u, a) = \text{arc tang}\left(\frac{dn'a}{tn'a} snu\, snc\, u\right)$, (Conf. §. 126. theoriae functionum modularium et integralium ab ipsis pendentium a me edito), est $\tang (x' - x) = \frac{dn'a}{tna} snu\, sncu = \frac{k^2}{k}\sqrt{(1 + k'^2)}.snu\, sncu$ $= \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha \sin \alpha} \sin s' \cos s$. Quia vero $\sin s' = \frac{2 \cos \alpha \sin s}{\sqrt{(2(1 - \cos^2 2\alpha \cos 2s)}} = \frac{\cos \alpha \sin s}{\sin y}$, componimus $\tang (x' - x) = \frac{\cos 2\alpha . \sin s \cos s}{\sin \alpha \cos \alpha \sin y} = \frac{\cot \alpha \sin s}{\sin y}$, quae formula cum demonstranda iam congruit, dummodo substituas $\sin 2s = \frac{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}}{\cos 2\alpha}$.

Simul perspicis abscissam arcui BM subtensam hoc modo exprimi posse:

$$X - x = {}'D(k - u, a) + \text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{(\sin^2 2y - \sin^2 2\alpha)}}{\sin 2\alpha \sin y}\right).$$

[Conferas et dissertationem mathematicam inauguralem: „De curva catenaria sphaerica parabolica" Auctore Al. Cl. Perger, Berolini, typis Reimeri, Anno 1838 editam].

5.

De catenariarum ellipticarum et hyperbolicarum verticibus.

Aequationes relatae ad curvas catenarias ellipticas nanciscimur, si in formulis articuli 2. ponimus $-e$ loco e; quare aequatio huius curvae differentialis est

$$\partial x = \frac{\pm h \partial y}{\cos y \sqrt{(\cos^2 y (\sin y - e)^2 - h^2)}};$$ porro est

$$\partial s = \frac{\pm \cos y (\sin y - e) . \partial y}{\sqrt{(\cos^2 y (\sin y - e)^2 - h^2)}}$$ et

$$\partial f = \frac{\pm h \sin y . \partial y}{\cos y \sqrt{(\cos^2 y (\sin y - e)^2 - h^2)}},$$

si s est arcus et f est area curvae ellipticae. Ut succedant integrationes harum aequationum, eruendae sunt valores ipsius y, qui efficiunt, ut expressio

$$Z = \cos^2 y (\sin y - e)^2 - h^2$$

nihilo fiat aequalis, quo simul limites innotescunt, inter quos continetur appli-

cata y, quae ad curvae ellipticae punctum M pertinet. Si λ est angulus, quem curva facit cum applicata y et angulus non obtusus intelligitur, invenis

$$\sin\lambda = \frac{h}{\cos y(\sin y - e)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{h}{\sqrt{Z}}.$$

Quare vides quaestionem de resolvenda aequatione $Z=0$ coïncidere cum quaestione de verticibus curvae, i. e. iis ipsius punctis, quorum applicatae sunt simul normales; et enim est angulus $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, si $Z=0$, sive si

$$1. \quad \cos y(\sin \gamma - e) = h.$$

Resolvenda aequatio in forma rationali est

$$2. \quad \begin{cases} z^4 - 2e.z^3 - (1-e^2)z^2 + 2e.z + h^2 - e^2 = 0, & \text{si } z = \sin\gamma, \text{ et} \\ z'^4 - (1-e^2).z'^2 + 2hez' + h^2 = 0, & \text{si } z' = \cos y \text{ ponitur.} \end{cases}$$

Quia in hac aequatione potetas z'^3 deest, concludimus, quatuor radices ipsius esse tales, ut earum summa sit $=0$.

Ne resolutio aequationum harum biquadraticarum per regulas vulgares formulas producat abstrusas, disquisitionem alio modo incipiamus.

Sit $A=\gamma'-\delta$ applicata verticis inferioris et $B=\gamma'+\delta$ ea verticis superioris, quae aequationi $\cos y \sin(y-e)=h$ satisfacient, si valent aequationes

$$\sin(\gamma'-\delta)\cos(\gamma'-\delta) - e\cos(\gamma'-\delta) - h = 0,$$
$$\sin(\gamma'+\delta)\cos(\gamma'+\delta) - e\cos(\gamma'+\delta) - h = 0,$$

e quibus prodeunt valores

$$e = \frac{-\cos 2\gamma'.\cos\delta}{\sin\gamma'} \quad \text{et} \quad h = \frac{\cos(\gamma'+\delta)\cos(\gamma'-\delta)}{\operatorname{tang}\gamma'}.$$

Quia $\delta < \frac{1}{2}\pi$, ut e sit quantitas positiva, arcus $\gamma' > \frac{1}{4}\pi$ sumendus est. Fiat $\gamma+\gamma' = \frac{1}{2}\pi$ et $\gamma < \frac{1}{4}\pi$; erit

$$e = \frac{\cos 2\gamma.\cos\delta}{\cos\gamma} \quad \text{et} \quad h = \frac{\sin(\gamma-\delta)\sin(\gamma+\delta)}{\cot\gamma}.$$

Quare ut h sit valor positivus, $\delta<\gamma$ sumendus est. Quare sunt

$$3. \quad A = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma - \delta, \quad B = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma + \delta$$

unde, quia $\gamma < \frac{1}{4}\pi$ et $\delta < \gamma$, perspicis, applicatas A et B esse positivas. Eliminatione arcus δ prodit aequatio cubica

$$4. \quad \begin{cases} \dfrac{2h}{\sin 2\gamma} = \dfrac{e^2}{\cos^2 2\gamma} - 1, \quad \text{sive} \\ v^3 + 2hv^3 - (1-e^2)v - 2h = 0, \end{cases}$$

cuis una saltem radix nota est $v = \sin 2\gamma$, si est $e = \dfrac{\cos 2\gamma \cos\delta}{\cos\gamma}$ et $h = \dfrac{\sin^2\gamma - \sin^2\delta}{\cot\gamma}$.

Si in aequatione praecedente ponimus $\frac{e}{\cos 2\gamma} = \frac{1}{\cos\nu}$, vice versa est

$$5. \quad e = \frac{\cos 2\gamma}{\cos\nu}, \qquad 2h = \sin 2\gamma . \operatorname{tang}^2\nu, \qquad \cos\delta = \frac{\cos\gamma}{\cos\nu}.$$

Arcus nunc γ et ν pro arbitrio sumimus tales, ut $\gamma < \frac{1}{4}\pi$ et $\nu < \gamma$ sit, ne δ fiat arcus imaginarius.

Aequationi primae biquadraticae sunt radices $z = \sin A$ et $z = \sin B$; duae reliquae sint $z = -\sin C$ et $z = -\sin D$; pariter alterius aequationis biquadraticae radices duae sunt $z' = \cos A$ et $z' = \cos B$, duae reliquae igitur sint $z' = -\cos C$ et $z' = -\cos D$. Quare valent formulae

$\cos A + \cos B - \cos C - \cos D = 0$; $\quad \sin A + \sin B - \sin C - \sin D = 2e$;

$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \cos D = h^2$; $\quad \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \sin D = h^2 - e$,

et quia ex antecedentibus componimus

$$6. \quad \begin{cases} h^2 - e^2 = \dfrac{(\sin^2\gamma - \cos^2\gamma\cos^2\nu)(\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\nu)}{\cos^4\nu}, \\ \cos A + \cos B = \dfrac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\nu}, \qquad \sin A + \sin B = \dfrac{2\cos^2\gamma}{\cos\nu}, \\ \sin A . \sin B = \dfrac{\cos^2\gamma - \sin^2\gamma\cos^2\nu}{\cos^2\nu}, \qquad \cos A . \cos B = \cos^2\gamma \operatorname{tang}^2\nu, \end{cases}$$

prodeunt novae

$$7. \quad \begin{cases} \cos C + \cos D = \dfrac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\nu}, \qquad \sin C + \sin D = \dfrac{2\sin^2\gamma}{\cos\nu}, \\ \cos C . \cos D = \sin^2\gamma . \operatorname{tang}^2\nu, \qquad \sin C . \sin D = \dfrac{\sin^2\gamma - \cos^2\gamma\cos^2\nu}{\cos^2\nu}. \end{cases}$$

Si igitur ponimus $C = \alpha - \delta'$ et $D = \alpha + \delta'$, erit $\cos C + \cos D = 2\cos\alpha\cos\delta'$ $= \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\cos\nu}$ et $\sin C + \sin D = 2\sin\alpha\cos\delta' = \frac{2\sin^2\gamma}{\cos\nu}$, unde concludimus $\operatorname{tang}\alpha$ $= \operatorname{tang}\gamma$ et insuper $\cos\delta' = \frac{\sin\gamma}{\cos\nu}$. Valores modo eruti conditionibus antecedentibus satisfaciunt omnibus, quare formulis

$$8. \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\pi - \gamma - \delta \\ B = \frac{1}{2}\pi - \gamma + \delta \end{cases} \text{ addendae sunt } \begin{matrix} C = \gamma - \delta' \\ D = \gamma + \delta', \end{matrix}$$

in quibus $\gamma < \frac{1}{4}\pi$, et arcus δ et δ' determinantur formulis

$$9. \quad \cos\delta = \frac{\cos\gamma}{\cos\nu} \text{ et } \cos\delta' = \frac{\sin\gamma}{\cos\nu},$$

in quibus ν est arbitrarius arcus arcu γ minor. Quia $\sin\gamma < \cos\gamma$, vides esse

$$10. \quad \delta' > \delta \text{ et } \delta' < \tfrac{1}{2}\pi - \gamma.$$

Positis ergo $e = \frac{\cos 2\gamma}{\cos\nu}$ et $h = \sin\gamma\cos\gamma . \operatorname{tang}^2\nu$, est forma biquadratica

$$z^4-2ez^3-(1-e^2)z^2+2ez+h^2-e^2=(z-\sin A)(z-\sin B)(z+\sin C)(z+\sin D),$$
$$z^4-(1-e^2)z^2+2hez+h^2=(z-\cos A)(z-\cos B)(z+\cos C)(z+\cos D),$$
ideoque

$$11.\quad\begin{cases}\cos^2y(\sin y-e)^2-h^2=(\sin y-\sin A)(\sin B-\sin y)(\sin y+\sin C)(\sin y+\sin D),\\ \cos^2y\sin(y+e)^2-h^2=(\sin y-\sin C)(\sin D-\sin y)(\sin y+\sin A)(\sin y+\sin B),\\ \sin^2y\cos^2y-(h+e\sin y)^2=(\sin y-\cos B)(\cos A-\sin y)(\sin y+\cos C)(\sin y+\cos D),\\ \sin^2y\cos^2y-(h-e\sin y)^2=(\sin y-\cos D)(\cos C-\sin y)(\sin y+\cos A)(\sin y+\cos B).\end{cases}$$

Si in aequationibus his sumis $\sin y=1$, ideoque $\cos y=0$, invenis relationes particulares

$$12.\quad\begin{cases}h^2=(1-\sin A)(1-\sin B)(1+\sin C)(1+\sin D),\\ h^2=(1+\sin A)(1+\sin B)(1-\sin C)(1-\sin D),\\ (h+e)^2=(1-\cos A)(1-\cos B)(1+\cos C)(1+\cos D),\\ (h-e)^2=(1+\cos A)(1+\cos B)(1-\cos C)(1-\cos D).\end{cases}$$

Ceterum rationes quantitatum A, B, C, D sunt eae, ut sit

$$13.\quad\begin{cases}C<A<B<D, \text{ ideoque}\\ \sin C<\sin A<\sin B<\sin D\\ \cos C>\cos A>\cos B>\cos D,\end{cases}$$

quibus addimus

$$14.\quad A+B+C+D=\pi.$$

Quia $\delta'<\frac{1}{2}\pi-\gamma$, est $\gamma+\delta'<\frac{1}{2}\pi$, quare est applicata absolute maxima $D<\frac{1}{2}\pi$. Ut applicata minima $C=\gamma-\delta'$ sit positiva, vel saltem non sit negativa, δ' non maior arcu γ esse debet, quare $\cos\delta'$ non minor quam $\cos\gamma$, ideoque $\frac{\sin\gamma}{\cos\nu}$ non minor quam $\cos\gamma$, id est

$$\operatorname{tang}\gamma \text{ non minor esse debet quam } \cos\nu.$$

Quia $\nu<\gamma$, ideoque $\cos\nu>\cos\gamma$, functio $\operatorname{tang}\gamma<\cos\gamma$ esse non debet. Si $\operatorname{tang}\gamma=\cos\gamma$, est $\gamma=38^\circ\,10'\,5''$, quare arcus γ sumendus est inter limites $38^\circ\,10'\,5''$ et 45°, ne applicata minima $C=\gamma-\delta'$ fiat negativa.

Applicatae y limites in ramo elliptico quia sunt A et B, curva haec continetur inter duos circulos minores descriptos e centro lineae abscissarum radiis $\frac{1}{2}\pi-A$ et $\frac{1}{2}\pi-B$; curva duos hos circulos alternatim tangit; tum ascendens a circulo inferiore ad circulum superiorem; tum descendens ab hoc ad illum.

Pariter curva hyperbolica est inter duos circulos minores e centro opposito descriptis, quorum radii sunt $\frac{1}{2}\pi-C$ et $\frac{1}{2}\pi-D$, et qui a curva hyperbolica alternatim tanguntur. Curvae duae coniugatae permutantur, si permutamus

e et $-e$, in quo simul permutabis γ et $\frac{1}{2}\pi-\gamma$, δ et δ', A et C, B et D, dum constantes h et ν manent eaedem.

E ratione quantitatum ν et γ quinque casus diversi sunt distinguendi.

I. Si $\nu<\gamma$, et $\nu<\frac{1}{4}\pi$, ideoque $\nu<\frac{1}{2}\pi-\gamma$, quare δ et δ' sunt simul reales, ideoque rami duo coniugati sunt simul reales.

II. Si $\nu=\gamma$, est $\delta=0$ et $\cos\delta'=\operatorname{tang}\gamma$, ideoque δ' realis est. Inter quatuor applicatas A, B, C, D duae primae sunt aequales, quare ramus ellipticus nunc est circulus, cuius radius $=\frac{1}{2}\pi-A=\frac{1}{2}\pi-B$; ramus vero hyperbolicus realis est.

III. Si ν est inter fines γ et $\frac{1}{2}\pi-\gamma$, arcus δ est imaginarius et δ' realis; quare ramus ellipticus ipse est imaginarius, et ramus hyperbolicus realis est.

IV. Si $\nu=\frac{1}{2}\pi-\gamma$, arcus δ est imaginarius et $\delta'=0$; quare ramus ellipticus est imaginarius et ramus hyperbolicus est circulus, cuius radius $=\frac{1}{2}\pi-C=\frac{1}{2}\pi-D$.

V. Si $\nu>\frac{1}{2}\pi-\gamma$, arcus δ et δ' sunt imaginarii, ideoque imaginarii sunt duo rami coniugati.

Si in casu I. applicata C est negativa, ramus hyperbolicus geometrice quidem realis, at statice imaginarius est.

6.

Sit igitur $\nu<\gamma$, ut duo curvae rami sint simul reales; sint porro α et β arcus duo novi, quorum quisque $<\frac{1}{4}\pi$, et quorum complementa $\alpha'=\frac{1}{2}\pi-\alpha$, $\beta'=\frac{1}{2}\pi-\beta$ sint. Ponamus, quia $\delta'<\delta$ est,

$$\delta=\beta-\alpha \quad \text{et} \quad \delta'=\beta'-\alpha=\tfrac{1}{2}\pi-\alpha-\beta,$$

ut habemus formulas elegantiores

$$1. \quad \begin{cases} A=\frac{1}{2}\pi+\alpha-\beta-\gamma, & B=\frac{1}{2}\pi-\alpha+\beta-\gamma, \\ C=\alpha+\beta+\gamma-\frac{1}{2}\pi, & D=\frac{1}{2}\pi-\alpha-\beta+\gamma, \end{cases}$$

quae applicatas $ABCD$ tribus ex arcubus α, β, γ constituunt. Quia nunc est

$$\cos(\beta-\alpha)=\frac{\cos\gamma}{\cos\nu} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha+\beta)=\frac{\sin\gamma}{\cos\nu},$$

eliminatione arcus γ prodit aequatio

$$2. \quad \frac{1}{\cos\nu}=\sqrt{(1+\sin 2\alpha\sin 2\beta)}, \text{ sive } \operatorname{tang}\nu=\sqrt{(\sin 2\alpha.\sin 2\beta)},$$

et eliminatio arcus ν praebet aequationem

$$\operatorname{tang}\gamma=\frac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}=\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta},$$

quae eiecto arcu v relationem exprimit unicam inter arcus tres α, β, γ conditionalem, ita ut e binis pro arbitrio sumptis computari queat tertius. Est ea inter ipsos ratio in genere, ut sit

$$3. \qquad \alpha < \beta < \gamma < \tfrac{1}{4}\pi.$$

Quia est $\tan \gamma = \mathfrak{Tang}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\alpha))$, $\tan\beta = \mathfrak{Tang}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\beta))$ et $\mathfrak{Tang}\,\alpha = \tan(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\alpha))$, substituendo invenis $\mathfrak{Tang}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\gamma)) = \mathfrak{Tang}(\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\beta) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\alpha))$, quare relatio in forma simplicissima haec est:

$$4. \qquad \mathfrak{L}(2\gamma) = \mathfrak{L}(2\alpha) + \mathfrak{L}(2\beta)$$

sive: $\tan\alpha \,.\, \tan\beta = \tan\alpha + \tan\beta - \tan\alpha$. Facillimo negotio erues formulas

$$5. \quad \begin{cases} \sin\gamma = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha \sin 2\beta)}}; & \cos\gamma = \dfrac{\cos(\beta-\alpha)}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha \sin 2\beta)}}; & \tan\gamma = \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}; \\ \sin\gamma = \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sqrt{(1+\sin 2\alpha \sin 2\gamma)}}; & \cos\beta = \dfrac{\cos(\gamma+\alpha)}{\sqrt{(1-\sin 2\alpha \sin 2\gamma)}}; & \tan\beta = \dfrac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos(\gamma+\alpha)}; \\ \sin\alpha = \dfrac{\sin(\gamma-\beta)}{\sqrt{(1-\sin 2\beta \sin 2\gamma)}}; & \cos\alpha = \dfrac{\cos(\gamma+\beta)}{\sqrt{(1-\sin 2\beta \sin 2\gamma)}}; & \tan\alpha = \dfrac{\sin(\gamma-\beta)}{\cos(\gamma+\beta)}. \end{cases}$$

Adiumento functionum hyperbolicarum aequationem (4) facillime transformas in sequentes

$$6. \quad \begin{cases} \sin 2\gamma = \dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{1+\sin 2\alpha \sin 2\beta}, & \cos 2\gamma = \dfrac{\cos 2\alpha \cos 2\beta}{1+\sin 2\alpha \sin 2\beta}, & \tan 2\gamma = \dfrac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos 2\alpha \,.\, \cos 2\beta}, \\ \sin 2\beta = \dfrac{\sin 2\gamma - \sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha \sin 2\gamma}, & \cos 2\beta = \dfrac{\cos 2\alpha \cos 2\gamma}{1-\sin 2\alpha \sin 2\gamma}, & \tan 2\beta = \dfrac{\sin 2\gamma - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha \cos 2\gamma}, \\ \sin 2\alpha = \dfrac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{1-\sin 2\beta \sin 2\gamma}, & \cos 2\alpha = \dfrac{\cos 2\beta \cos 2\gamma}{1-\sin 2\beta \sin 2\gamma}, & \tan 2\alpha = \dfrac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{\cos 2\beta \cos 2\gamma}, \end{cases}$$

ita ut sit:

$$7. \quad \begin{cases} \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma, \quad \text{quemadmodum} \\ \tan\alpha \,.\, \tan\beta \,.\, \tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta - \tan\gamma. \end{cases}$$

Formulae $2h = \sin 2\gamma \,.\, \tan^2 v$ et $e = \dfrac{\cos 2\gamma}{\cos v}$ nunc migrunt in has:

$$8. \quad \begin{cases} 2h = \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma \\ e = \sqrt{(\cos 2\alpha \,.\, \cos 2\beta \,.\, \cos 2\gamma)}. \end{cases}$$

Aequationis cubicae supra inventae $v^3 + 2h\,.\,v^2 - (1-e^2)v - 2h = 0$ radix una erat $v = \sin 2\gamma$; si reliquae sunt v' et v'', est

$$v + v' + v'' = -2h \quad \text{et} \quad v\,.\,v'\,.\,v'' = 2h;$$

quare invenis $v' + v'' = -\sin 2\alpha - \sin 2\beta$ et $v'\,.\,v'' = \sin 2\alpha \sin 2\beta$, unde concludis esse $v' = -\sin 2\beta$ et $v'' = -\sin 2\alpha$. Aequationis cubicae

$$9.\quad \begin{cases} v^3 + 2h.v^2 - (1-e^2)v - 2h = 0 & \text{radices igitur sunt} \\ -\sin 2\alpha, \quad -\sin 2\beta, \quad +\sin 2\gamma. \end{cases}$$

Insuper obtinemus aequationem

$$10.\quad 1 - e^2 = \sin 2\alpha \sin 2\gamma + \sin 2\beta \sin 2\gamma - \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

Similes inventae in artic. 5. aequationi (4) nunc sunt

$$11.\quad \frac{e^2}{\cos^2 2\gamma} - \frac{2h}{\sin 2\gamma} = 1, \quad \frac{e^2}{\cos^2 2\beta} + \frac{2h}{\sin 2\beta} = 1, \quad \frac{e^2}{\cos^2 2\alpha} + \frac{2h}{\sin 2\alpha} = 1.$$

Brevitatis causa in sequentibus plerumque utimur signis his:

$$\begin{array}{llll} \sin A = a, & \sin B = b, & \sin C = c, & \sin D = d, \\ \cos A = a', & \cos B = b', & \cos C = c', & \cos D = d', \end{array}$$

quae quantitates sic exprimuntur:

$$12.\quad \begin{cases} a = \sin A = +\cos(\beta+\gamma-\alpha), \\ b = \sin B = +\cos(\alpha+\gamma-\beta), \\ c = \sin C = -\cos(\alpha+\beta+\gamma), \\ d = \sin D = +\cos(\alpha+\beta-\gamma), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} a' = \cos A = \sin(\beta+\gamma-\alpha), \\ b' = \cos B = \sin(\alpha+\gamma-\beta), \\ c' = \cos C = \sin(\alpha+\beta+\gamma), \\ d' = \cos D = \sin(\alpha+\beta-\gamma). \end{array}$$

Si uteris formulis (5), evolvendo et reducendo invenies et formulas elegantiores

$$13.\quad \begin{cases} a' = 2\cos\alpha \sin\beta \cos\gamma, & b' = 2\sin\alpha \cos\beta \cos\gamma, \\ c' = 2\cos\alpha \cos\beta \sin\gamma, & d' = 2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma. \end{cases}$$

7.

Quia $z^4 - 2ez^3 - (1-e^2)z^2 + 2ez + h^2 - e^2 = (z-a)(z-b)(z+c)(z+d)$ est, evolvendo obtinemus formulas

$$1.\quad \begin{cases} 2e = a + b - c - d, \\ 1 - e^2 = (a+b)(c+d) - ab - cd, \\ 2e = ab(c+d) - cd(a+b), \\ h^2 - e^2 = abcd. \end{cases}$$

Pariter aequatio $z^4 - (1-e^2)z^2 + 2hez + h^2 = (z-a')(z-b')(z+c')(z+d')$ praebet

$$2.\quad \begin{cases} 0 = a' + b' - c' - d', \\ 1 - e^2 = (a'+b')(c'+d') - a'b' - c'd', \\ 2he = a'b'(c'+d') - c'd'(a'+b'), \\ h^2 = a'b'c'd'. \end{cases}$$

Quia aequationi $\cos\gamma \sin(\gamma - e) = h$ satisfaciunt valores $\sin\gamma = a$ et $\cos\gamma = a'$; pariter $\sin\gamma = b$, $\cos\gamma = b'$; $\sin\gamma = -c$, $\cos\gamma = -c'$; $\sin\gamma = -d$, $\cos\gamma = -d'$, oriuntur aequationes quatuor

$$3.\quad a'(a-e) = h, \quad b'(b-e) = h, \quad c'(c+e) = h, \quad d'(d+e) = h,$$

e quarum combinatione oriuntur formulae

$$4.\quad e=\frac{aa'-bb'}{a'-b'}=\frac{aa'-cc'}{a'+c'}=\frac{aa'-dd'}{a'+d'}=\frac{bb'-cc'}{b'+c'}=\frac{bb'-dd'}{b'+d'}=\frac{dd'-cc'}{c'-d'},$$

$$5.\quad h=\frac{b-a}{a'-b'}.a'b'=\frac{a+c}{a'+c'}.a'c'=\frac{a+d}{a'+d'}.a'd'=\frac{b+c}{b'+c'}.b'c'=\frac{b+d}{b'+d'}.b'd'=\frac{d-c}{c'-d'}.c'd'.$$

E formulis his multiplicatione obtinemus $h^2=\frac{(b-a)(d-c)}{(a'-b')(c'-d')}a'b'c'd'$, et quia $h^2=a'b'c'd'$, invenimus

$$6.\quad \begin{cases}(b-a)(d-c)=(a'-b')(c'-d'),\\ (a+c)(b+d)=(a'+c')(b'+d'),\\ (a+d)(b+c)=(a'+d')(b'+c').\end{cases}$$

E formulis (12 artic. praec.) componimus $a-c=2\cos(\beta+\gamma)\cos\alpha$, $ac=-\cos^2(\beta+\gamma)+\sin^2\alpha$, $1-ac=\cos^2\alpha+\cos^2(\beta+\gamma)$, quare oriuntur formulae

$$7.\quad \begin{cases}\sqrt{((1+a)(1-c))}=\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma); & \sqrt{((1-a)(1+c))}=\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma),\\ \sqrt{((1-b)(1+d))}=\sin\alpha+\sin(\gamma-\delta); & \sqrt{((1+b)(1-d))}=\sin\alpha-\sin(\gamma-\beta),\\ \sqrt{((1+c')(1-a'))}=\sin\alpha+\cos(\gamma+\beta); & \sqrt{((1-c')(1+a'))}=\sin\alpha-\cos(\gamma+\beta),\\ \sqrt{((1+b')(1-d'))}=\cos\alpha+\sin(\gamma-\beta); & \sqrt{((1-b')(1+d'))}=\cos\alpha-\sin(\gamma-\beta),\end{cases}$$

quae adiumento formularum (5) ulterius transformari possunt, dummodo substituis

$\cos(\gamma+\beta)=\cos\alpha.\sqrt{(1-\sin2\beta\sin2\gamma)}$ et $\sin(\gamma-\beta)=\sin\alpha\sqrt{(1-\sin2\beta\sin2\gamma)}$.

Superest ut valores productorum aequalium (6) eruamus, quarum ratio est ea, ut si ponimus

$$l=\sqrt{((a+d)(b+c))}=\sqrt{((a'+d')(b'+c'))},$$
$$l'=\sqrt{((b-a)(d-c))}=\sqrt{((a'-b')(c'-d'))},$$

sit $\sqrt{(l^2-l'^2)}=\sqrt{((a+c)(b+d))}=\sqrt{((a'+c')(b'+d'))}$.

Invenimus autem valores

$$8.\quad \begin{cases} l=\sqrt{(\sin2\beta(\sin2\gamma+\sin2\alpha))}=\sqrt{(2\sin2\beta\sin(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha))},\\ l'=\sqrt{(\sin2\gamma(\sin2\beta-\sin2\alpha))}=\sqrt{(2\sin2\gamma\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha))},\\ \sqrt{(l^2-l'^2)}=\sqrt{(\sin2\alpha(\sin2\gamma+\sin2\beta))}=\sqrt{(2\sin2\alpha\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta))}.\end{cases}$$

Si vero formulas (4) ad usum vocamus, facillime invenies

$$9.\quad\begin{cases} l = \dfrac{\sqrt{((aa'-dd')(bb'-cc'))}}{e} = \dfrac{\cos 2\beta}{e}\sqrt{(\sin(2\gamma-2\alpha)\sin(2\gamma+2\alpha))}, \\ l' = \dfrac{\sqrt{((aa'-bb')(dd'-cc'))}}{e} = \dfrac{\cos 2\gamma}{e}\sqrt{(\sin(2\beta-2\alpha)\sin(2\beta+2\alpha))}, \\ \sqrt{(l^2-l'^2)} = \dfrac{\sqrt{((aa'-cc')(bb'-dd'))}}{e} = \dfrac{\cos 2\alpha}{e}\sqrt{(\sin(2\gamma+2\beta)\sin(2\gamma-2\beta))} \end{cases}$$

E formulis his computus quantitatum l, l et $\sqrt{(l^2-l'^2)}$ est expeditissimus. Si igitur ponimus $\lambda = \frac{l'}{l}$ et $\lambda = \frac{\sqrt{(l^2-l'^2)}}{l}$, est

$$10.\quad\begin{cases} \lambda = \sqrt{\dfrac{\sin 2\gamma \sin(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha)}{\sin 2\beta \sin(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}} = \dfrac{\cos 2\gamma}{\cos 2\beta}\sqrt{\dfrac{\sin(2\beta-2\alpha)\sin(2\beta+2\alpha)}{\sin(2\gamma-2\alpha)\sin(2\gamma+2\alpha)}}, \\ \lambda' = \sqrt{\dfrac{\sin 2\alpha \sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma-\beta)}{\sin 2\beta \sin(\gamma+\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta}\sqrt{\dfrac{\sin(2\gamma+2\beta)\sin(2\gamma-2\beta)}{\sin(2\gamma-2\alpha)\sin(2\gamma-2\alpha)}}. \end{cases}$$

8.

De arcu catenariae ellipticae AM *et de ipsius complemento* BM.

In disquisitionibus de catenariis parabolicis iam vidimus, harum curvarum rectificationem esse facillimam; quam ob causam primo proponimus problema de catenariarum ellipticarum rectificatione. Quia applicata $PM = y$ puncti M in catenaria elliptica sita est inter limites sive applicatas A et B, quae ad vertices curvae huius pertinent, sit A vertex inferior et B vertex superior curvae ellipticae, ut applicata verticis A sit A et applicata verticis B sit B. Punctum M curvam inter vertices A et B contentam dividit in partes AM et $BM = AB - AM$. Quia arcus AM crescit crescente applicata y, est

$$AM = \int_A \frac{(\sin y - e)\cos y . \partial y}{\sqrt{Z}} = \int_a \frac{(z-e)\partial z}{\sqrt{Z}},$$

si brevitatis causa ponimus $z = \sin y$ et $Z = \cos^2 y(\sin y - e)^2 - h^2 = (z-a)(b-z)(z+c)(z+d)$

Quia est z inter limites a et b, ponamus

$$\frac{z-a}{b-z} = r.t^2, \text{ et vice versa } z = \frac{a+brt^2}{1+rt^2}.$$

unde componimus $\dfrac{\partial z}{\sqrt{Z}} = \dfrac{2.\sqrt{r}.\partial t}{\sqrt{((a+c+(b+c)rt^2)(a+d+(b+d)rt^2))}}$; quare si sumitur $\frac{b+c}{a+c}.r = 1$ et $\frac{b+d}{a+d}r = \lambda'^2$, invenis

$$\lambda = \sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{(a+d)(b+c)}},\quad r = \frac{a+c}{b+c} \text{ et } \frac{\partial z}{\sqrt{Z}} = \frac{2\sqrt{r}}{\sqrt{((a+c)(a+d))}}\cdot\frac{\partial t}{\sqrt{((1+t^2)(1+\lambda'^2 t^2))}}$$

sive $\lambda' = \sqrt{\frac{l^2-l'^2}{l^2}}$ et $\lambda = \frac{l'}{l}$, sive

$$\lambda = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(a+d)(b+c)}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\sqrt{Z}} = \frac{2.\partial v}{l},$$

si habita ratione ad modulum λ sumitur $t = tn\,v$, quo fit $\partial v = \frac{\partial t}{\sqrt{(1+t^2)}\sqrt{(1+\lambda'^2 t^2)}}$. Moduli λ et λ' et divisor l constans in artic. praec. formulis exhibiti sunt ad calculum numericum aptissimis. E formula $r.t^2 = \frac{z-a}{b-z}$ sequuntur

$$1. \quad \begin{cases} tn\,v = \sqrt{\frac{(b+c)(z-a)}{(a+c)(b-z)}}; & tnc\,v = \sqrt{\frac{(a+d)(b-z)}{(b+d)(z-a)}}; \\ sn\,v = \sqrt{\frac{(b+c)(z-a)}{(b-a)(c+z)}}; & snc\,v = \sqrt{\frac{(a+d)(b-z)}{(b-a)(d+z)}}; \\ cn\,v = \sqrt{\frac{(a+c)(b-z)}{(b-a)(c+z)}}; & cnc\,v = \sqrt{\frac{(b+d)(z-a)}{(b-a)(d+z)}}; \\ dn\,v = \sqrt{\frac{(a+c)(d+z)}{(a+d)(c+z)}}; & dnc\,v = \sqrt{\frac{(b+d)(c+z)}{(b+c)(d+z)}} \end{cases}$$

et formulae inversae totidem, quarum notatu dignissima est,

$$z = \frac{(b+c)a + (b-a)c.sn^2 v}{b+c-(b-a)sn^2 v} = a + \frac{(b-a)(a+c)\,sn^2 v}{b+c-(b-a)sn^2 v}$$

cum illico praebeat arcum curvae ellipticae

$$AM = \frac{2(a-c)v}{l} + 2.\int_0 \frac{(b-a)(a+c)}{(b+c)l} \cdot \frac{sn^2 v.\partial v}{1-\frac{b-a}{b+c}sn^2 v}.$$

Integrale eruendum comparemus cum integrali

$$'S(v,p) = \int_0 \frac{\lambda'^2 sn'p\,cn'p.dn'p.sn^2 v.\partial v}{1-dn'^2 p.sn^2 v};$$

quem in finem ponamus $dn'^2 p = 1 - \lambda'^2 sn'^2 p = \frac{b-a}{b+c}$, quo fiunt formulae

$$2. \quad \begin{cases} sn'p = \sqrt{\frac{a+d}{b+d}}; & snc'p = \sqrt{\frac{b+c}{b+d}}; \\ cn'p = \sqrt{\frac{b-a}{b+d}}; & cnc'p = \sqrt{\frac{d-c}{b+d}}; \\ dn'p = \sqrt{\frac{b-a}{b+c}}; & dnc'p = \sqrt{\frac{d-c}{a+d}}; \\ tn'p = \sqrt{\frac{a+d}{b-a}}; & tnc'p = \sqrt{\frac{b+c}{d-c}} \end{cases}$$

e quibus componimus $\lambda'^2 sn'p\,cn'p\,dn'p = \frac{(a+c)(b-a)}{(b+c)l}$, unde perspicitur esse arcum

$$AM = \frac{2(a-c)v}{l} + 2.'S(v,p).$$

Quia $'S(v,p) = 'C(v,p) - \lambda^n sn'p\, snc'p.v = 'C(v,p) - \frac{a+c}{l}.v$

et $'S(v,p) = 'D(v,p) - \frac{sn'p}{snc'p}v = 'D(v,p) - \frac{a+d}{l}.v$, arcus AM tribus modis exprimitur:

$$3.\quad\begin{cases} AM = \frac{2(a-e)v}{l} + 2.'S(v,p), \\ AM = -\frac{2(c+e)v}{l} + 2.'C(v,p), \\ AM = -\frac{2(d+e)v}{l} + 2.'D(v,p). \end{cases}$$

Formulae (1) exprimunt quantitatem argumenti v, formulae (2) exprimunt parametrum p; illae referendae sunt ad modulum λ et hae ad modulum λ'; qui moduli e formulis in fine articuli praecedentis computantur una cum valore denominatoris

$$l = \sqrt{((a+d)(b+c))} = \sqrt{((a'+d')(b'+c'))}.$$

Quia ponendo $v = L$ (quadranti ad modulum λ pertinenti) arcus AM extenditur ad AB, est

$$AB = \frac{2(a-e)L}{l} + 2.'S(L,p) = -\frac{2(c+e)}{l}L + 2.'C(L,p) = -\frac{2(d+e)L}{l} + 2.'D(L,p).$$

Subtrahendo invenis alteram partem $BM = AB - AM$, scilicet

$$BM = \frac{2(a-e)(L-v)}{l} + 2'S(L,p) - 2.'S(v,p),$$

$$BM = -\frac{2(c+e)(L-v)}{l} + 2'C(L,p) - 2.'C(v,p),$$

$$BM = -\frac{2(d+e)(L-v)}{l} + 2.'D(L,p) - 2.D(v,p);$$

quae formulae adhibitis iis in § 120 theoriae functionum modularium contrahuntur ad

$$4.\quad\begin{cases} BM = +\frac{2(a-e)(L-v)}{l} + 2.C(L-v,\, L'-p), \\ BM = -\frac{2(c+e)(L-v)}{l} + 2.D(L-v,\, L'-p), \\ BM = -\frac{2(b-e)(L-v)}{l} - 2.S(L-v,\, L'-p). \end{cases}$$

9.

De arcu catenariae hyperbolicae CN *et de ipsius complemento* DN.

Sint vertices hyperbolicae catenariae puncta C et D ea, quorum appli-

catae etiam signis C et D significantur. Quare quia crescente applicata y_1, quae ad punctum curvae N pertineat, crescit et arcus CN, est

$$CN = \int_c \frac{\cos y_1 (\sin y_1 + e) . \partial y_1}{\sqrt{(\cos^2 y_1 (\sin y_1 + e)^2 - h^2)}} = \int_c \frac{(z_1 + e) . \partial z_1}{\sqrt{Z_1}}$$

si brevitatis causa $z_1 = \sin y_1$ et $Z_1 = z_1^4 + 2e . z_1^3 - (1-e^2) z_1^2 - 2ez_1 + h^2 - e^2$ ponimus.

Formulas nunc derivandas invenis ex iis articuli praecedentis, si permutantur a et c, b et d, z et z_1, $-e$ et e, y et y_1, z et z_1, v et v_1, p et p_1, Z et Z_1. In permutationibus his quantitates

$$1. \quad l = \sqrt{((a+d)(b+c))}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(a+d)(b+c)}}, \quad \lambda' = \sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{(a+d)(b+c)}}$$

non mutantur; quare est $\frac{\partial z_1}{\sqrt{Z_1}} = \frac{2 . \partial v_1}{l}$, si argumentum v_1 et ipsius complementum $L - v_1$ determinantur formulis

$$2. \quad \left\{ \begin{aligned} sn\, v_1 &= \sqrt{\frac{(a+d)(z_1-c)}{(d-c)(a+z_1)}} \\ cn\, v_1 &= \sqrt{\frac{(a+c)(d-z_1)}{(d-c)(a+z_1)}} \\ tn\, v_1 &= \sqrt{\frac{(a+d)(z_1-c)}{(a+c)(d-z_1)}} \\ dn\, v_1 &= \sqrt{\frac{(a+c)(b+z_1)}{(b+c)(a+z_1)}} \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad \begin{aligned} snc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(c+b)(d-z_1)}{(d-c)(z_1+b)}}, \\ cnc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(b+d)(z_1-c)}{(d-c)(b+z_1)}}, \\ tnc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(c+b)(d-z_1)}{(b+d)(z_1-c)}}, \\ dnc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(b+d)(a+z_1)}{(a+d)(b+z_1)}}, \end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{(a+d)c + (d-c)a . sn^2 v_1}{a+d-(d-c) sn^2 v_1} = c + \frac{(d-c)(a+c) sn^2 v_1}{a+d-(d-c) sn^2 v_1}.$$

Si permutationibus supra indicatis parameter p_1 migrat in p_1, oriuntur formulae

$$3. \quad \left\{ \begin{aligned} sn\, p_1 &= \sqrt{\frac{b+c}{b+d}} \\ cn\, p_1 &= \sqrt{\frac{d-c}{b+d}} \\ tn\, p_1 &= \sqrt{\frac{b+c}{d-c}} \\ dn\, p_1 &= \sqrt{\frac{d-c}{a+d}} \end{aligned} \right. \quad \text{et} \quad \begin{aligned} snc\, p_1 &= \sqrt{\frac{a+d}{b+d}}, \\ cnc\, p_1 &= \sqrt{\frac{b-a}{b+d}}, \\ tnc\, p_1 &= \sqrt{\frac{a+d}{b-a}}, \\ dnc\, p_1 &= \sqrt{\frac{b-a}{b+c}}. \end{aligned}$$

Quare sistimus formulas

$$4. \quad \left\{ \begin{aligned} CN &= + \frac{2(c+e)}{l} v_1 + 2 . 'S(v_1, p_1), \\ CN &= - \frac{2(a-e) v_1}{l} + 2 . 'C(v_1, p_1), \\ CN &= - \frac{2(b-e) v_1}{l} + 2 . 'D(v_1, p_1). \end{aligned} \right.$$

Si formulas (3) comperas cum formulis (2 artic. praeced.), non te fugiet, esse parametrum p' complementum parametri p, sive esse

$$p_1 + p = L',$$

si memineris esse L' quadrantem modularem eum, qui ad modulum λ' pertineat. Quare si permutamus catenariam ellipticam cum hyperbolica, parametrum p permutamus cum ipsius complemento p_1. Altera vero arcus hyperbolici CD pars DN nunc exprimitur formulis

$$5. \quad \begin{cases} DN = \dfrac{2(c+e)(L-v_1)}{l} + 2.C(L-v_1, p), \\ DN = \dfrac{-2(a-e).(L-v_1)}{l} + 2.D(L-v_1, p), \\ DN = \dfrac{2(d+e)(L-v_1)}{l} - 2.S(L-v_1, p). \end{cases}$$

10.

De punctis coniugatis M *et* N *curvae ellipticae et hyperbolicae, et de arcubus coniugatis harum curvarum.*

Punctum M curvae catenariae ellipticae dicimus *coniugatum* cum puncto N curvae hyperbolicae, si ipsarum applicatae $y = \arcsin(z)$ et $y_1 = \arcsin(z_1)$ ad idem argumentum $v = v_1$ functionum modularium pertinent, et quidem *homologe coniugatum*, quia crescentibus applicatis duo argumenta simul crescunt. Si vero $v = L - v_1$, punctum M cum N *non homologe* coniugatum esse dicimus. Relationes inter applicatas punctorum homologe coniugatorum M et N praebent formulae (1 artic. 8.) comparatae cum formulis (2 articuli praeced.). Ut sit $sn\,v = sn\,v_1$, valet relatio

$$1. \quad \begin{cases} \dfrac{(b+c)(z-a)}{(b-a)(c+z)} = \dfrac{(a+d)(z_1-c)}{(d-c)(a+z_1)}, \quad \text{pariter} \\ \dfrac{b-z}{c+z} = \dfrac{b-a}{d-c} \cdot \dfrac{d-z_1}{a+z_1}, \\ \dfrac{d+z}{c+z} = \dfrac{a+d}{b+c} \cdot \dfrac{b+z_1}{a+z_1}, \\ \dfrac{z-a}{b-z} = \dfrac{a+d}{b+c} \cdot \dfrac{z_1-c}{d-z_1}, \\ \dfrac{(a+d)(b-z)}{(b-a)(d+z)} = \dfrac{(c+b)(d-z_1)}{(d-c)(z_1-b)}, \\ \dfrac{z-a}{d+z} = \dfrac{b-a}{d-z} \cdot \dfrac{z_1-c}{b+z_1}. \end{cases}$$

Aequationes hae sex, quibus sunt formae proportionum, evolutae migrant in unicam formam

$$2.\quad (a-b-c+d)zz_1+(bd-ac)(z-z_1)+bd(c-a)-ac(d-b)=0.$$

E formulis (1) sequitur fieri $z_1=c$ pro $z=a$, et $z_1=d$ pro $z=b$; quare vertices A et C sunt puncta homologe coniugata, nec non vertices B et D. Quodlibet punctum in arcu AM situm punctum homologe coniugatum suum habet in arcu CN; idem valet de arcubus BM et DN. Hanc ob causam arcus ipsos AM et CN duarum curvarum dicimus homologe coniugatos, nec non arcus BM et DN. Addendo invenimus semisummam arcuum coniugatorum AM et CN:

$$\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\frac{a+c}{l}.v+{}'S(v,p)+{}'S(v,p_1)$$

in qua $p+p_1=L$. Quia vero ${}'S(v,p)+{}'S(v,p_1)=-\lambda'^2 sn'p\, snc'p.v + \text{arc tang}(\lambda'^2 sn'p\, snc'p.\frac{tn\,v}{dn\,v})$ et $\lambda'^2 sn'p\, snc'p=\frac{a+c}{l}$, prior aequatio contrahitur ad hanc:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\frac{a+c}{l}\cdot\frac{tn\,v}{dn\,v}=\frac{a+c}{l\lambda'}\cdot\frac{cnc\,v}{cn\,v},\quad \text{et quia}$$

$\lambda'=\frac{\sqrt{(l^2-l'^2)}}{l}$, ideoque $l\lambda'=\sqrt{(l^2-l'^2)}$, nec non $\frac{a+c}{l\lambda'}=\frac{a+c}{\sqrt{(a+c)(b+d)}}=\sqrt{\frac{a+c}{b+d}}$, est

$$3.\quad\begin{cases}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\sqrt{\frac{a+c}{b+d}}\cdot\frac{cnc\,v}{cn\,v}=\sqrt{\left(\frac{\sin(\gamma+\beta)}{\cos(\gamma+\beta)}\text{tang}\,\alpha\right)}.\frac{cnc\,v}{cn\,v},\quad \text{sive}\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\sqrt{\text{tang}(\gamma-\beta)\,\text{tang}(\gamma+\beta)}.\frac{cnc\,v}{cn\,v}.\end{cases}$$

Si argumentum v extendimus ad valorem $v=L$, invenimus summam

$$4.\quad AB+CD=\pi,$$

quae proprietas arcum inter maxime memorabiles est referenda. Quia e formulis artic. 8. componimus

$$\frac{cnc\,v}{cn\,v}=\sqrt{\frac{b+d}{a+c}}\cdot\sqrt{\frac{(z-a)(c+z)}{(b+z)(d+z)}},$$

semisumma arcuum homologe coniugatorum etiam exprimitur formula elegantiore:

$$5.\quad\begin{cases}\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\sqrt{\frac{(z-a)(z+c)}{(b-z)(d+z)}},\quad \text{et pariter}\\ \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\sqrt{\frac{(z_1-c)(z_1+a)}{(d-z_1)(b+z_1)}}.\end{cases}$$

Insuper est ob formulam (4)

$$\tfrac{1}{2}(BM+DN)+\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\tfrac{1}{2}\pi, \text{ ideoque}$$
$$\cot\tfrac{1}{2}(BM+DN)=\tang\tfrac{1}{2}(AM+CN).$$

Si ponimus semisummam arcuum homologe coniugatorum

$$\tfrac{1}{2}(AM+CN)=\tang s,$$

arcus s crescit inde a limite 0 usque ad $\frac{1}{2}\pi$, dum argumentum v crescit a limite 0 usque ad limitem L; quare arcus s pariter se habet ac arcus curvae catenariae parabolicae inter vertices vicinos, et aequationes (5) evolutione abeunt in

$$z^2+((d-b)\sin^2 s-(a-c)\cos^2 s)z-(bd\sin^2 s+ac\cos^2 s)=0 \quad \text{et}$$
$$z_1^2-((d-b)\sin^2 s-(a-c)\cos^2 s)z_1-(bd\sin^2 s+ac\cos^2 s)=0,$$

quarum altera abit in alteram permutando z et $-z_1$; quare radices aequationis primae sunt z et $-z_1$, et radices secundae sunt z_1 et $-z$. Concludimus igitur esse

$$z-z_1=(a-c)\cos^2 s-(d-b)\sin^2 s,$$
$$z.z_1=ac\cos^2 s+bd\sin^2 s,$$

unde componimus sequentes:

$$(1+\sin y)(1-\sin y_1)=(1+z)(1-z_1)=(1+a)(1-c)\cos^2 s+(1+b)(1-d)\sin^2 s$$
$$(1-\sin y)(1+\sin y_1)=(1-z)(1+z_1)=(1-a)(1+c)\cos^2 s+(1-b)(1+d)\sin^2 s.$$

Formulas has hunc in modum transformamus. Sit

$$6.\quad \sqrt{(1-\sin 2\beta.\sin 2\gamma)}=\tang g$$

ut habeamus $\cos(\gamma+\beta)=\cos\alpha.\tang g$ et $\sin(\gamma-\beta)=\sin\alpha\tang g$, quo secundum formulas (7. artic. 7.) fiunt

$$\sqrt{((1+a)(1-c))}=\cos\alpha(1+\tang g);\quad (1+a)(1-c)=\frac{\cos^2\alpha(1+\sin 2g)}{\cos^2 g},$$
$$\sqrt{((1-a)(1+c))}=\cos\alpha(1-\tang g);\quad (1-a)(1+c)=\frac{\cos^2\alpha(1-\sin 2g)}{\cos^2 g},$$
$$\sqrt{((1+b)(1-d))}=\sin\alpha(1-\tang g);\quad (1+b)(1-d)=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin 2g)}{\cos^2 g},$$
$$\sqrt{((1-b)(1+d))}=\sin\alpha(1+\tang g);\quad (1-b)(1+d)=\frac{\sin^2\alpha(1+\sin 2g)}{\cos^2 g};$$

ideoque

$$(1+\sin y)(1-\sin y_1)=\frac{(1+\sin 2g)\cos^2\alpha\cos^2 s+(1-\sin 2g)\sin^2\alpha\sin^2 s}{\cos^2 s},$$
$$(1-\sin y)(1+\sin y_1)=\frac{(1-\sin 2g).\cos^2\alpha\cos^2 s+(1+\sin 2g)\sin^2\alpha\sin^2 s}{\cos^2 s},$$

sive

$$\sqrt{(1+\sin y)(1-\sin y_1)} = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha \cos 2s + \sin 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)}{1+\cos 2g}},$$

$$\sqrt{(1-\sin y)(1+\sin y_1)} = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha \cos 2s - \sin 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)}{1+\cos 2g}}.$$

E formulis his multiplicatione invenimus

$$7. \quad \cos y . \cos y_1 = \frac{\sqrt{[(1+\cos 2\alpha \cos 2s)^2 - \sin^2 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)^2]}}{1+\cos 2g};$$

at additione et subtractione:

$$8. \quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}(y+y_{,}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha \cos 2s + \sin 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)}{1+\cos 2g}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha \cos 2s - \sin 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)}{1+\cos 2g}}, \\ \sin\frac{1}{2}(y-y') = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha \cos 2s + \sin 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)}{1+\cos 2g}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha \cos 2s - \sin 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)}{1+\cos 2g}}. \end{cases}$$

Ope formularum harum e data semisumma s duorum arcuum homologe coniugatorum AM et CN computabis applicatas punctorum M et N coniugatorum ipsas. Usum formulae vero (7) gravissimum infra vidibus. Addimus formulam hanc:

$$9. \quad 1 - \sin y \sin y_{,} = \frac{1+\cos 2\alpha . \cos 2s}{1+\cos 2g},$$

11.

De punctis reciprocitatis lege coniunctis, et de arcu elliptico reciproco A′M′, *ipsiusque complemento* B′M′.

Cum curva catenaria elliptica reciprocitatis lege coniuncta est curva alia talis, ut quivis circulus maximus curvam alteram tangens centrum habeat suum sphaericum in curva altera. Punctum illud contactus et hoc centrum sunt puncta reciproca, quia hoc fit punctum contactus, si illud est centrum circuli tangentis maximi. Sit M' punctum cum puncto M reciprocitatis lege coniunctum et in formula (7. artic. 2) ponatur $-e$ loco e, quo fit

$$1. \quad \sin y'(\sin y - e) = h, \quad \text{sive} \quad z'(z-e) = h,$$

si $y = \arcsin(z)$ est applicata puncti M et $y' = \arcsin(z')$ est applicata puncti M'.

Quia in artic. 7. invenimus $e = \frac{aa'-bb'}{a'-b'}$ et $h = \frac{b-a}{a'-b'} . a'b'$, formula $z' = \frac{h}{z-e}$ abit in hanc:

$$2. \quad z' = a'b' \cdot \frac{b-a}{a'(z-a)+b'(b-z)}.$$

Si in hac ponitur $z=a$, fit $z'=a'$; quare si punctum reciprocum verticis A appellamus A', applicata puncti A' est arc sin $(a') = \frac{1}{2}\pi - A$. Si vero ponimus $z=b$, fit $z'=b'$, quare punctum reciprocum verticis B est punctum B', cuius applicata est arc sin $(b') = \frac{1}{2}\pi - B$. Videmus igitur esse $z' = \sin y$, contentum inter limites a' et b', sive y' inter limites $\frac{1}{2}\pi - A$ et $\frac{1}{2}\pi - B$. Si in tractanda curva reciproca $A'M'B'$ pro abscissarum x' initio sumis priori initio e diametro oppositum, crescente abscissa x' decrescit applicata y' puncti M', quare curvae aequatio differentialis est

$$x' = \int_{\frac{1}{2}\pi - A} \frac{-(h+e\sin y').\partial y'}{\cos y'\sqrt{(\sin^2 y'\cos^2 y' - (h+e\sin y')^2)}} = \int_{a'} \frac{-(h+ez').\partial z}{(1-z^2)\sqrt{Z'}}.$$

Si λ' est angulus, quem circulus curvam hanc in M' tangens maximus facit cum applicata y', est tang $\lambda' = -\frac{\cos y'.\partial x'}{\partial y'}$, quare est

$$3. \quad \begin{cases} \text{tang}\,\lambda' = \dfrac{h+e\sin y'}{\sqrt{(\sin^2 y'\cos^2 y' - (h+e\sin y')^2)}} = \dfrac{h-ez'}{\sqrt{Z'}}, \quad \text{sive} \\ \sin\lambda' = \dfrac{h+e\sin y'}{\sin y'\cos y'}. \end{cases}$$

Etiam nunc verticem appellamus curvae punctum id, pro quo angulus $\lambda' = \frac{1}{2}\pi$ est, ideoque $\sin^2 y'\cos^2 y - (h+e\sin y')^2 = (\sin y' - \cos B)(\cos A - \sin y')$ $(\sin y' + \cos C)(\sin y' + \cos D) = 0$, et cum aequationi huic satisfaciunt valores supra inventi $y' = \frac{1}{2}\pi - A$ et $y' = \frac{1}{2}\pi - B$, videmus puncta A' et B' esse vertices curvae novae, vel quod idem est, applicatas has esse simul lineas normales. Curva nostra igitur tota continetur inter duos circulos minores e centro lineae abscissarum O descriptos radiis A et B, quos circulos curva alternatim tangit, quae a circulo inferiore ascendit ad circulum superiorem, a quo descendit ad inferiorem; et sic deinceps in infinitum.

Aequatio (2) facillime redigitur in formam

$$\frac{a'-z'}{z'-b'} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{z-a}{b-z},$$

et quia in artic. 7. invenimus $h = \frac{b+c}{b'+c'}.b'c' = \frac{a+c}{a'+c'}a'c'$ ideoque

$$\frac{a'}{b'} \cdot \frac{b'+c'}{a'+c'} = \frac{b+c}{a+c},$$

componendo obtinemus

$$\sqrt{\frac{(b'+c')(a'-z')}{(a'+c')(z'-b')}} = \sqrt{\frac{(b+c)(z-a)}{(a+c)(b-z)}}.$$

quae ob formulas (1) reducitur ad simplicem hanc:

$$tn\, v = \sqrt{\frac{(b'+c)(a'-z')}{(a'+c')(z'-b')}},$$

qua punctum reciprocum M' ad idem argumentum v functionum modularium revocatur ac punctum M ipsum in curva catenaria elliptica situm.

In articulo 7. iam inventae sunt formulae

$$4. \quad \begin{cases} l = \sqrt{((a+d)(b+c))} = \sqrt{((a'+d')(b'+c'))}, \\ l' = \sqrt{((b-a)(d-b))} = \sqrt{((a'-b')(c'-d'))}, \\ \sqrt{(l^2-l'^2)} = \sqrt{((a+c)(b+d))} = \sqrt{((a'+c')(b'+d'))}, \end{cases}$$

quibus moduli cum prioribus congrui λ et λ' exprimuntur

$$5. \quad \lambda = \sqrt{\frac{(a'-b')(c'-d')}{(a'+d')(b'+c')}} \quad \text{et} \quad \lambda' = \sqrt{\frac{(a'+c')(b'+d')}{(a'+d')(b'+c')}}.$$

Ope harum formularum facillime erues has:

$$6. \quad \begin{cases} sn\, v = \sqrt{\frac{(b'+c')(a'-z')}{(a'-b')(c'+z')}}, & snc\, v = \sqrt{\frac{(a'+d')(z'-b')}{(a'-b')(d'+z')}}, \\ cn\, v = \sqrt{\frac{(a'+c')(z'-b')}{(a'-b')(c'+z')}}, & cnc\, v = \sqrt{\frac{(d'+b')(a'+z')}{(a'-b')(d'+z')}}, \\ dn\, v = \sqrt{\frac{(a'+c')(d'+z')}{(a'+d')(c'+z')}}, \quad \text{et} & dnc\, v = \sqrt{\frac{(b'+d')(c'+z')}{(b'+c')(d'+z')}}, \\ tn\, v = \sqrt{\frac{(b'+c')(a'-z')}{(a'+c')(z'-b')}}, & tnc\, v = \sqrt{\frac{(a'+d')(z'-b')}{(b'+d')(a'-z')}}. \end{cases}$$

Formula $sn^2 v = \frac{b'+c'}{a'-b'} \cdot \frac{a'-z'}{c'-z'}$ differentiando praebet $2 sn\, v . cn\, v . dn\, v . \partial v = -\frac{(b'+c')(a'+c') . \partial z'}{(a'-b')(c'+z')^2}$; quia vero, si memineris esse

$$Z' = \sin^2 y' \cos^2 y' - (h + e \sin y')^2 = (a'-z')(z'-b')(z'+c')(z'+d'),$$

componendo invenis $sn\, v\, cn\, v . dn\, v = \frac{(a'+c)(b'+c')}{a'-b'} \cdot \frac{1}{l} \cdot \frac{\sqrt{Z'}}{(c'+z')^2}$, divisione oritur

$$7. \quad \frac{-\partial z'}{\sqrt{Z'}} = \frac{2 . \partial v}{l}.$$

His praeparatis rectificatio arcus $A'M'$, qui cum arcu elliptico AM reciprocitatis lege coniunctus est, facile invenitur. Est primo

$$A'M' = \int_{\frac{1}{2}\pi - A} \frac{-\sin y' \cos y' . \partial y'}{\sqrt{Z'}} = \int_{a'} \frac{-z' . \partial z'}{\sqrt{Z'}} = \int_0 \frac{2z' . \partial v}{l};$$

quia vero est $z' = \frac{(b'+c')a' - (a'-b')c' sn^2 v}{b'+c'+(a'-b') sn^2 v} = a' - \frac{(a'-b')(a'+c') sn^2 v}{b'+c'+(a'-b') sn^2 v}$ obtinemus primo

$$A'M' = \frac{2a'v}{l} - 2.\int_0 \frac{(a'-b')(a'+c')}{l(b'+c')} \cdot \frac{sn^2 v.\partial v}{1+\frac{a'-b'}{b'+c'}sn^2 v}.$$

Si integrale hoc comparamus cum integrali

$$S(v, p') = \int_0 \frac{\lambda^2 tn' p' \cdot dn' p' . sn^2 v . \partial v}{cn'^2 p'(1+\lambda^2 tn'^2 p' . sn^2 v)},$$

ponendum est $\lambda tn' p' = \sqrt{\frac{a'-b'}{b'+c'}}$, unde adiumento formularum (5) inveniuntur

$$8. \quad \begin{cases} sn' p' = \sqrt{\frac{a'+d'}{a'+c'}}, & snc' p' = \sqrt{\frac{b'+c'}{a'+c'}}, \\ cn' p' = \sqrt{\frac{c'-d'}{a'+c'}}, & cnc' p' = \sqrt{\frac{a'-b'}{a'+c'}}, \\ dn' p' = \sqrt{\frac{c'-d'}{b'+c'}}, \quad \text{et} & dnc' p' = \sqrt{\frac{a'-b'}{a'+d'}}, \\ tn' p' = \sqrt{\frac{a'+d'}{c'-d'}}, & tnc' p' = \sqrt{\frac{b'+c'}{a'-b'}}, \end{cases}$$

e quibus componimus

$$\frac{\lambda^2 tn' p . dn' p}{cn'^2 p'} = \frac{(a'-b')(a'+c')}{l(b'+c')},$$

unde perspicis, esse

$$9. \quad \begin{cases} A'M' = \frac{2a'v}{l} - 2.S(v, p'), \text{ quibus addimus} \\ A'M' = \frac{2b'v}{l} + 2.C(v, p'), \\ A'M' = \frac{2d'v}{l} + 2.D(v, p'). \end{cases}$$

Alteram arcus partem $B'M' = A'B' - A'M'$ exprimit formula $B'M' = \frac{2a'(L-v)}{l} - 2(S(L, p') - S(v, p'))$, quae formulis theoriae functionum modularium (conf. §. 120.) reducitur ad simpliciorem

$$10. \quad \begin{cases} B'M' = \frac{-2c'.(L-v)}{l} - 2.'D(L-v, L'-p'), \\ B'M = \frac{2b'.(L-v)}{l} + 2.'S(L-v, L'-p'), \\ B'M = \frac{2d'.(L-v)}{l} + 2'C(L-v, L'-p'). \end{cases}$$

12.

De arcu hyperbolico reciproco C'N', *et de ipsius complemento* D'N'.

Cum arcu hyperbolico CND coniunctus est reciprocitatis lege arcus

$C'N'D'$, ita ut puncta reciproca sint C' et C; N' et N; D' et D. Formulas, quae ad arcum $C'N'D'$ pertinent, obtines omnes, dummodo permutas in formulis artic. praed. a' et c', b' et d', a et c, b et d, z' et z'_1, angulos λ' et λ'_1, argumenta v et v_1; Z' et $Z'_1 = \sqrt{(\sin^2 y'_1 \cos^2 y'_1 - (h - \sin y'_1)^2)}$; moduli vero λ et λ' manent iidem. Si ad formulas (8. artic. praeced.) animadvertis, videbis permutationibus illis id fieri, ut parameter p' permutetur cum ipsius complemento $L' - p'$, qui ad modulum λ' pertineat. Quare nunc valet formula

$$1. \quad z'_1 = c'd'.\frac{d-c}{c'(z_1-c)+d'(d-z_1)},$$

quae exprimit nexum inter applicatam $y'_1 = \text{arc}\sin(z'_1)$ puncti N' cum applicata $y_1 = \text{arc}\sin(z_1)$ puncti N in catenaria hyperbolica. Porro est

$$2. \quad x'_1 = \int_{\frac{1}{2}\pi - C} \frac{-(h - e\sin y'_1)\partial y'_1}{\cos y'_1 \sqrt{Z'_1}} = \int_{c'} \frac{-(h - ez'_1).\partial z'_1}{(1-z'^2_1).\sqrt{Z'_1}},$$

quae formula referenda est ad abscissarum initium id, quod est e diametro oppositum abscissarum initio illo, ad quod referimus curvas primitivas.

Formulae (6) nunc migrant in

$$3. \quad \begin{cases} sn\, v_1 = \sqrt{\frac{(a'+d')(c'-z'_1)}{(c'-d')(a'+z'_1)}}, \\ cn\, v_1 = \sqrt{\frac{(a'+c')(z'_1-d')}{(c'-d')(a'+z'_1)}}, \\ dn\, v_1 = \sqrt{\frac{(a'+c')(b'+z'_1)}{(c'+b')(z'_1-d')}}, \\ tn\, v_1 = \sqrt{\frac{(d'+a')(c'-z'_1)}{(a'+c')(z'_1-d')}}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} snc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(c'+b')(z'_1-d')}{(c'-d')(b'+z'_1)}}, \\ cnc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(b'+d')(c'-z'_1)}{(c'-d')(b'+z'_1)}}, \\ dnc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(b'+d')(a'+z'_1)}{(a'+d')(b'+z'_1)}}, \\ tnc\, v_1 &= \sqrt{\frac{(b'+c')(z'_1-d')}{(b'+d')(c'-z'_1)}}, \end{aligned}$$

quarum argumentum v_1 omnino idem est ac in formulis (2. artic. 9.), dummodo puncta N et N' sunt reciproca, vel quod idem, dummodo valet aequatio modo prolata (1) sive $\sin y'_1 = \frac{h}{\sin y_1 + e}$. Aequatio (7. artic. praeced.) nunc mutatur in $\frac{-\partial z'_1}{\sqrt{Z'_1}} = \frac{2\partial v_1}{l}$, quia permutationibus indicatis producta l, l' et $\sqrt{(l^2 - l'^2)}$ eosdem valores retinent; ideoque

$$4. \quad C'N' = \int_{c'} \frac{-z'_1.\partial z'_1}{\sqrt{Z'_1}} \text{ et } z'_1 = \frac{(a'+d')c' - (c'-d')a'sn^2 v_1}{d'+d'+(c'-d')sn^2 v},$$

quae formulae perducent ad

$$5.\quad \begin{cases} C'N' = \frac{2c'v_1}{l} - 2.S(v_1,\, L'-p'), \\ C'N' = \frac{2d'v_1}{l} + 2.C(v_1,\, L'-p'), \\ C'N' = \frac{2d'v_1}{l} + 2.D(v_1,\, L'-p'), \end{cases}$$

et ad formulas

$$6.\quad \begin{cases} D'N' = \frac{-2a'(L-v_1)}{l} - 2.'D(L-v_1, p'), \\ D'N' = \frac{2d'(L-v_1)}{l} + 2.'S(L-v_1, p'), \\ D'N' = \frac{-2b'(L-v_1)}{l} + 2.'C(L-v_1, p'). \end{cases}$$

Angulus λ'_1 denique, quem curva $N'D$ facit cum applicata y'_1 puncti N', determinatur formulis

$$7.\quad \operatorname{tang} \lambda'_1 = \frac{h-e.z'_1}{\sqrt{Z'_1}} \quad \text{et} \quad \sin \lambda'_1 = \frac{h-e \sin y'_1}{\sin y'_1 \cos y'_1}.$$

13.

De curvamine curvarum AMB, CND, A'M'D' et C'N'D'.

Sit r radius curvaturae sphaericus pertinens ad curvae AMB punctum M, cuius applicata est y; longitudinem huius radii praebet formula

$\operatorname{tang} r = \frac{\partial \sin y}{\partial \sin y'} = \frac{\partial z}{\partial z'}$, et quia pro curva catenaria elliptica est

$z'(z-e) = h$, ideoque $\partial z = \frac{-h\partial z}{(z-e)^2}$, invenitur formula

$$\operatorname{tang} r = \frac{(z-e)^2}{h},$$

si omittimus signum praefixum —, quo indicatur, curvam catenariam ellipticam *totam esse convexam* versus abscissarum lineam.

Si N significat arcum normalem ductum per curvae punctum M et prolongatum usque ad abscissarum lineam, est $\operatorname{tang} N = \frac{\sin y}{\sin y'} = \frac{z}{z'}$; quare invenis

$$\operatorname{tang} N = \frac{z(z-e)}{h},$$

unde perspicis esse

$$\operatorname{tang} r = \operatorname{tang} N - \frac{e}{z'}.$$

Quare radius curvaturae r pertinens ad catenariae ellipticae punctum quodlibet M differt a linea normali per idem punctum M ducta.

Pro linea hyperbolica similes inveniuntur formulae ad ipsius punctum N relatae, scilicet

$$\text{tang}\, r_1 = \frac{(z_1+e)^2}{h}, \quad \text{tang}\, N_1 = \frac{z_1(z_1+e)}{h}, \quad \text{tang}\, r_1 = \text{tang}\, N + \frac{e}{z'_1}.$$

Inter catenarias igitur sphaericas curvae parabolicae genus est unicum, quod excellat insigni proprietate aequalitatis inter radium curvaturae et lineam normalem eruta in artic. 3. Ceterum hae curvae omnes in eo consentiunt, ut sint convexae versus abscissarum lineam. Complementa $\frac{1}{2}\pi - r$ et $\frac{1}{2}\pi - r_1$ esse radios curvaturae, quae ad curvarum reciprocarum $A'M'B'$ et $C'N'D'$ puncta M' et N' respective pertineant, res notissima est.

14.

Quadratura tum catenariae ellipticae, tum catenariae hyperbolicae, et quadratura duarum curvarum reciprocarum.

Ad arcum ellipticum AM pertinet quadrigoni area, quod terminatur arcu elliptico ipso, applicatis punctorum A et M et abscissa x ab applicatas his intercepta, sive arcui AM subtensa; sit f area huius quadrigoni, in quo tres anguli sunt recti et angulus quartus est ille angulus λ, qui e formulis articuli (5) computatur his:

$$\sin \lambda = \frac{h}{\cos y(\sin y - e)} \quad \text{et} \quad \text{tang}\, \lambda = \frac{h}{\sqrt{(\cos^2 y(\sin y - e)^2 - h^2)}}.$$

Si latera quadrigoni f essent arcus circulorum maximorum, f esset $= \frac{3}{2}\pi + \lambda - 2\pi$, sive $f = \lambda - \frac{1}{2}\pi$. Quia vero latus AM non est arcus circuli maximi, sed arcus versus quadrigoni aream convexus, secundum auctoris theorema de areis sphaericis computandis generalissimum invento iam valori $\lambda - \frac{1}{2}\pi$ addendus est arcus cum arcu AM reciprocitatis lege coniunctus $A'M'$, ita ut sit

$$f = A'M' + \lambda - \tfrac{1}{2}\pi = A'M' - (\tfrac{1}{2}\pi - \lambda), \quad \text{sive}$$

$$f = A'M' - \text{arc cos}\left(\frac{h}{\cos y(\sin y - e)}\right).$$

Si et valorem arcus $A'M'$ substituis, prodit iam formula

$$1. \quad f = \frac{2a'v}{l} - 2.S(v, p') - \text{arc cos}\left(\frac{h}{\cos y(\sin y - e)}\right),$$

in qua argumentum v ex puncti M applicata y per formulas (1. artic. 8) et parameter p' e formulis (8. artic. 11.) computatur.

Ad eandem formulam etiam non adiuti theoremate illo generalissimo aeque facili modo hoc quidem casu pervenimus. Quia $\log\sin\lambda = \log h - \log\cos y - \log(\sin y - e)$, differentiando oritur

$$\cot\lambda.\partial\lambda = \operatorname{tang} y.\partial y - \frac{\cos y.\partial y}{\sin y - e},$$

quae multiplicata aequatione $\operatorname{tang}\lambda = \frac{h}{\sqrt{Z}}$ abit in

$$\partial\lambda = \sin y.\frac{h\partial y}{\cos y\sqrt{Z}} - \frac{h\cos y.\partial y}{(\sin y - e)\sqrt{Z}}.$$

Quia vero $\frac{h\partial y}{\cos y\sqrt{Z}} = \partial x$, $\frac{\cos y.\partial y}{\sqrt{Z}} = \frac{\partial z}{\sqrt{Z}} = -\frac{\partial z'}{\sqrt{Z'}}$, quia utraque ratio $= \frac{2.\partial v}{l}$, et quia $\frac{h}{\sin y - e} = \frac{h}{z - e} = z'$, oritur

$$\partial\lambda = \sin y.\partial x + \frac{z'\partial z'}{\sqrt{Z'}},$$

quae quia $\partial f = \sin y.\partial x$ et $\int\frac{-z'\partial z'}{\sqrt{Z'}} = A'M'$, integrando praebet

$$\lambda = f - A'M' + \text{const.},$$

quae formula invento constantis incogniti valore $\frac{1}{2}\pi$ omnino congruit cum formula antea inventa.

Sit pariter f_1 area quadrigoni, cuius latera sunt arcus hyperbolicus CN, applicatae punctorum C et N, et cuius quartum latus sit abscissa arcui CN subtensa; eodem ratiocinio invenis formulam $f_1 = C'N' + \lambda_1 - \frac{1}{2}\pi$ sive

$$2.\quad f_1 = \frac{2c'v_1}{l} - 2.S(v_1, L' - p') - \arccos\left(\frac{h}{\cos y_1(\sin y_1 - e)}\right),$$

in qua argumentum v_1 computabis ope formularum (2. articuli 9.) et parametrum $L' - p'$ cum ipsius complemento p' ope formularum (8. articuli 11.).

Sit f' area quadrigoni, quod pertinet ad arcum reciprocum $A'M'$ et f'_1 area quadrigoni, quod pertinet ad arcum reciprocum $C'N'$; eodem modo invenies formulas

$$3.\quad \begin{cases} f' = \frac{1}{2}\pi - \lambda' + AM \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}\pi - \lambda'_1 + CN, \text{ sive} \\ f' = \arccos\left(\frac{h + e\sin y'}{\sin y'\cos y'}\right) + AM, \\ f' = \arccos\left(\frac{h - \sin y'_1}{\sin y'_1\cos y'_1}\right) + CN. \end{cases}$$

15.

De punctis M′ *et* N′ *et de arcubus* A′M′ *et* C′N′ *homologe coniugatis, et ipsorum semisumma.*

E formulis inventis patet, ponendo argumentum functionum modularium variabile $v_1 = v$, non solum puncta M et N fieri homologe coniugata, sed et puncta M' et N' in curvis reciprocis sita. Homologe coniugati simul sunt vertices tum A' et C', tum B' et D', ideoque et arcus ipsi $A'M'$ et $C'N'$, nec non arcus $B'M'$ et $D'N'$. Eruamus iam semisummam arcuum $A'M'$ et $C'N'$, quae sit σ, et quae invenitur e formulis (9. artic. 11.) et e formulis (5. artic. 12.) Invenimus primo

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(A'M' + C'N') = \frac{a'+c'}{l} \cdot v - S(v, p') - S(v, L'-p'),$$

quae per formulam notam reducitur ad simpliciorem

$$\text{tang } \sigma = \frac{a'+c'}{l} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}, \quad \text{et quia}$$

$$\text{tang } s = \frac{a+c}{l} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}, \quad \text{(conf. formul. 3. artic. 11.)}$$

est $\text{tang } \sigma = \frac{a'+c'}{a+c} . \text{tang } s$. Reductione fit $a'+c' = 2\sin(\beta+\gamma)\cos\alpha$ et $a+c = 2\sin(\beta+\gamma)\sin\alpha$, quare adest formula

$$1. \quad \text{tang } \sigma = \frac{\text{tang } s}{\text{tang } \alpha}.$$

Comparata haec formula cum (2.) in articulo (3.) edocet: Si semisumma $s = \frac{1}{2}(AM + CN)$ aequalis est arcui catenariae parabolicae, semisumma $\sigma' = \frac{1}{2}(A'M' + C'N')$ aequalis erit arcui reciproco parabolico. Addimus: Si parameter curvae parabolicae est $\alpha = \frac{1}{2}(A + C)$, parameter $\alpha' = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ erit semisumma applicatarum, quae $\frac{1}{2}\pi - A$ et $\frac{1}{2}\pi - C$ sunt et ad vertices reciprocos A' et C' pertinent. Simul perspicis esse $A'B' + C'D' = \pi$, quia pro $s = \frac{1}{2}\pi$ est $\sigma = \frac{1}{2}\pi$.

Tenet igitur curva parabolica locum quasi medium inter curvam ellipticam et hyperbolicam, et pariter res se habet, si simul loco trium curvarum sumis curvas reciprocas. Quam inter tres curvas relationem mox clarius perspiciemus studio et admiratione dignissimam. Facillimo negotio invenies

$$2. \quad \text{tang } \sigma = \sqrt{\frac{(a'-z')(c'+z')}{(z'-b')(d'+z')}} \quad \text{et} \quad \text{tang } \sigma = \sqrt{\frac{(c'-z'_1)(a'+z'_1)}{(z'_1-d')(b'+z'_1)}},$$

et vice versa ad computandas applicatas punctorum homologe coniugatorum

e data semisumma arcuum coniugatorum $A'M'$ et $C'N'$ evolvendo invenies aequationes

$$z'^2+((c'-a')\cos^2\sigma-(b'-d')\sin^2\sigma).z'-(a'c'\cos^2\sigma+b'd'\sin^2\sigma)=0,$$
$$z_1'^2-((c'-a')\cos^2\sigma-(b'-d')\sin^2\sigma).z'_1-(a'c'\cos^2\sigma+b'd'\sin^2\sigma)=0,$$

unde perspicis radices aequationis primae esse z' et $-z'_1$, alterius vero z'_1 et $-z'$, ideoque

$$z'-z'_1=(c'-a')\cos^2\sigma-(b'-d')\sin^2\sigma,$$
$$z'z'_1=a'c'\cos^2\sigma+b'd'\sin^2\sigma.$$

Quae formulae si iterum (conferatur artic. 10.) ponimus $\operatorname{tang} g=\sqrt{(1-\sin 2\beta\sin 2\gamma)}$, abeunt in

$$3.\quad\begin{cases}\sin y'-\sin y'_1=\operatorname{tang} g.\sin 2\alpha\cos 2\sigma,\\ \sin y'.\sin y'_1=\dfrac{\cos 2g(1+\cos 2\alpha.\cos 2\sigma)}{1+\cos 2g}.\end{cases}$$

E formulis prioribus coniunctis invenis

$$(1+\sin y'_1)(1-\sin y')=(1+c')(1-a)\cos^2\sigma+(1+d')(1-b')\sin^2\sigma,$$
$$(1-\sin y'_1)(1+\sin y')=(1-c')(1+a)\cos^2\sigma+(1-d')(1+b')\sin^2\sigma,$$

quas reduces ad simpliciores

$$\sqrt{((1+\sin y'_1)(1-\sin y'))}=\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma}{1+\cos 2g}},$$
$$\sqrt{((1-\sin y'_1)(1+\sin y'))}=\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma}{1+\cos 2g}}.$$

Multiplicatio nunc praebet

$$4.\quad \cos y'.\cos y'_1=\frac{\sqrt{[(1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma)(1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma)]}}{1+\cos 2g},$$

additio vero et subtractio:

$$5.\quad\begin{cases}\cos\frac{1}{2}(y'_1+y')=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma}{1+\cos 2g}}+\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma}{1+\cos 2g}},\\ \cos\frac{1}{2}(y'_1+y')=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma}{1+\cos 2g}}-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma}{1+\cos 2g}}.\end{cases}$$

E formulis in articulo 14. prolatis invenimus semisummas arearum

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1)=\tfrac{1}{2}(A'M'+C'N')+\tfrac{1}{2}(\lambda+\lambda_1)-\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\tfrac{1}{2}(f'+f'_1)=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda'_1)+\tfrac{1}{2}(AM+CN),$$

sive

$$6.\quad\begin{cases}\frac{1}{2}(f+f_1)=\sigma+\frac{1}{2}(\lambda+\lambda_1)-\frac{1}{2}\pi,\\ \frac{1}{2}(f'+f'_1)=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda'_1)+s.\end{cases}$$

16.

De nexu inter abscissas et areas catenariarum ellipticarum et hyperbolicarum.

Sit initium abscissarum, quae ad puncta catenarium pertinent, pes applicatae primae A, quae ad verticem A pertinet, erit abscissa

$$x = \int_a \frac{h.\partial z}{(1-z)\sqrt{Z}} \quad \text{et area} \quad f = \int_a \frac{hz.\partial z}{(1-z)\sqrt{Z}}.$$

E formulis his componuntur

$$x+f = \int_a \frac{h\partial z}{(1-z)\sqrt{Z}} \quad \text{et} \quad x-f = \int_a \frac{h.\partial z}{(1+z)\sqrt{Z}}, \quad \text{quare est}$$

$$x+f = \int_0 \frac{2h\partial v}{l(1-z)} \quad \text{et} \quad x-f = \int_0 \frac{2h\partial v}{l(1-z)}.$$

Quia vero $z = \frac{(b+c)a+(b-a)c\,sn^2v}{b+c-(b-a)sn^2v}$, est

$$\frac{1}{1-z} = \frac{b+c-(b-a)sn^2v}{(b+c)(1-a)-(b-a)(1+c)sn^2v} = \frac{1}{1-a} + \frac{(b-a)(a+c)sn^2v}{(1-a)((b+c)(1-a)-(b-a)(1+c)sn^2v)},$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{b+c-(b-a)sn^2v}{(b+c)(1+a)-(b-a)(1-c)sn^2v} = \frac{1}{1+a} - \frac{(b-a)(a+c)sn^2v}{(1+a)((b+c)(1+a)-(b-a)(1-c)sn^2v)},$$

ideoque oriuntur formulae integrandae.

$$x+f = \frac{2hv}{l(1-a)} + \frac{2h(b-a)(a+c)}{(b+c)(1-a)^2l}\cdot\int_0 \frac{sn^2v.\partial v}{1-\frac{(b-a)(1+c)}{(b+c)(1-a)}sn^2v},$$

$$x-f = \frac{2hv}{l(1+a)} - \frac{2h(b-a)(a+c)}{(b+c)(1+a)^2l}\cdot\int_0 \frac{sn^2v.\partial v}{1-\frac{(b-a)(1-c)}{(b+c)(1+a)}sn^2v}.$$

Integralia proposita eruenda comparanda sunt cum his:

$$'S(v,q) = \lambda'^2 sn'q\,cn'q\,dn'q.\int_0 \frac{sn^2v.\partial v}{1-dn'^2q.sn^2v},$$

$$'S(v,r) = \lambda'^2 sn'r\,cn'r\,dn'r.\int_0 \frac{sn^2v.\partial v}{1-dn'^2r.sn^2v}:$$

quem in finem ponamus

$$dn'q = \sqrt{\frac{(1+c)(b-a)}{(1-a)(b+c)}}, \qquad dn'r = \sqrt{\frac{(1-c)(b-a)}{(1+a)(b+c)}},$$

unde adiumento formularum, quibus exprimuntur moduli

$$l = \sqrt{(a+d)(b+c)}, \quad l' = \sqrt{(b-a)(d-c)}; \quad \sqrt{(l^2-l'^2)} = \sqrt{(a+c)(b+d)},$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{(b-a)(d-c)}{(a+d)(b+c)}} \quad \text{et} \quad \lambda' = \sqrt{\frac{(a+c)(b+d)}{(a+d)(b+c)}},$$

derivabis sequentes

$$1.\quad\begin{cases} sn'q = \sqrt{\frac{(1-b)(a+d)}{(1-a)(b+d)}}, & sn'r = \sqrt{\frac{(1+b)(a+d)}{(1+a)(b+d)}}, \\ cn'q = \sqrt{\frac{(1+d)(b-a)}{(1-a)(b+d)}}, & cn'r = \sqrt{\frac{(1-d)(b-a)}{(1+a)(b+d)}}, \\ dn'q = \sqrt{\frac{(1+c)(b-a)}{(1-a)(b+c)}}, & dn'r = \sqrt{\frac{(1-c)(b-a)}{(1+a)(b+c)}}, \\ snc'q = \sqrt{\frac{(1+d)(b+c)}{(1+c)(b+d)}}, & snc'r = \sqrt{\frac{(1-d)(b+c)}{(1-c)(b+d)}}, \\ cnc'q = \sqrt{\frac{(1-b)(d-c)}{(1+c)(b+d)}}, & cnc'r = \sqrt{\frac{(1+b)(d-c)}{(1-c)(b+d)}}, \\ dnc'q = \sqrt{\frac{(1-a)(d-c)}{(1+c)(d+a)}}, & dnc'r = \sqrt{\frac{(1+a)(d-c)}{(1-c)(d+a)}}, \end{cases}$$

quae sunt tales, ut permutando a et $-a$, b et $-b$, c et $-c$, d et $-d$, simul permutentur parametri q et r; permutando vero a et c, b et d, permutentur q et $L'-r$, r et $L'-q$.

Ex iisdem componimus vero

$$\lambda'^2 sn'q\, cn'q\, dn'q = \frac{(b-a)(a+c)}{l(1-a)^2(b+c)}\sqrt{((1-a)(1-b)(1+c)(1+d))},$$

$$\lambda'^2 sn'r\, cn'r\, dn'r = \frac{(b-a)(a+c)}{l(1+a)^2(b+c)}\sqrt{((1+a)(1+b)(1-c)(1-d))},$$

quae formulis (12. articuli 5.) contrahuntur ad

$$\lambda'^2 sn'q\, cn'q\, dn'q = \frac{(b-a)(a+c)h}{(1-a)^2(b+c)l} \quad\text{et}\quad \lambda'^2 sn\,r\, cn'r\, dn'r = \frac{(b-a)(a+c)h}{(1+a)^2(b+c)l},$$

unde perspicis esse

$$2.\qquad x+f = \frac{2hv}{l(1-a)} + 2.'S(v,q) \quad\text{et}\quad x-f = \frac{2hv}{l(1+a)} - 2.'S(v,r),$$

in quibus argumentum v determinetur formulis (1. articuli 8.). Si O est centrum lineae abscissarum superius, sector circuli maximi, cuius crura per puncta A et M transeunt, $=x$ est, a quo sectore si subtrahitur area f, remanet sector sive triangulum AOM, cuius latus AM est arcus curvae catenariae ellipticae. Quare est

$$\text{sector } AOM = \frac{2hv}{l(1+a)} - 2.'S(v,r).$$

Si O' est centrum lineae abscissarum inferius, pari modo intelliges, esse $x+f=$ sectori $AO'M$, ideoque

$$\text{sector } AO'M = \frac{2hv}{l(1+a)} + 2.'S(v,q$$

Duo sectores coniunctim efficiunt biangulum sphaericum $OAO'MO$. Complementa horum sectorum sunt

$$\text{sector } BOM = \frac{2h(L-v)}{l(1+a)} - 2('S(L,r) - 'S(v,r)) \quad \text{et}$$

$$\text{sector } BO'M = \frac{2h(L-v)}{l(1+a)} + 2.('S(L,q) - 'S(v,q))$$

quae formulae contrahuntur ad.

$$\text{sector } BOM = \frac{2h(L-v)}{l(1+a)} - 2.C(L-v, L'-r),$$

$$\text{sector } BO'M = \frac{2h(L-v)}{l(1-a)} + 2.C(L-v, L'-q).$$

Si x_1 est abscissa subtensa arcui CD hyperbolico, quem in inferioris hemisphaerae superficie descriptum esse censemus, et area ad ipsum pertinens iterum signo f_1 significatur, quia ipsius x_1 initium est idem ac abscissae prioris x, e formulis (2.) illico concludis novas, dummodo permutas v et v_1, a et c, b et d, x et x_1, f et f_1, quo permutari q cum $L'-r$ et r cum $L'-q$ iam supra memoratum est; quare habes

$$3. \quad x_1 + f_1 = \frac{2hv_1}{l(2-c)} + 2.'S(v_1, L'-r) \text{ et } x_1 - f_1 = \frac{2hv_1}{l(1+c)} - 2.'S(v_1, L'-q).$$

Quia area f_1 nunc in eadem hemisphaerae superficie continetur, in qua centrum O' est situm, invenies:

$$\text{sector } CON = \frac{2hv_1}{l(1-c)} + 2.'S(v, L'-r),$$

$$\text{sector } CO'N = \frac{2hv_1}{l(1+c)} - 2.'S(v, L'-q).$$

quorum complementa sunt

$$\text{sector } DON = \frac{2h(L-v_1)}{l(1-c)} + 2.C(L-v_1, r),$$

$$\text{sector } DO'N = \frac{2h(L-v_1)}{l(1+c)} - 2.C(L-v_1, q).$$

Argumentum v_1 in formulis modo praecedentibus computabis e formulis (2. articuli 10.)

(Cont. seq.)

11.

Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br.)

(Fortsetzung der Abhandlung No. 1. im ersten und No. 7. im vorigen Heft.)

V.

§. 26.

Die Facultäten lassen sich auch benutzen, um die Kreisfunctionen darzustellen. Bekanntlich ist

$$1.\quad \text{Sin}\,\frac{n}{2m}\pi = \frac{n}{2m}\pi \cdot \frac{2m-n}{2m} \cdot \frac{2m+n}{2m} \cdot \frac{4m-n}{4m} \cdot \frac{4m+n}{4m} \cdot \frac{6m-n}{6m} \cdot \frac{6m+n}{6m} \cdots$$

$$2.\quad \text{Cos}\,\frac{n}{2m}\pi = \frac{m-n}{m} \cdot \frac{m+n}{m} \cdot \frac{3m-n}{3m} \cdot \frac{3m+n}{3m} \cdot \frac{5m-n}{5m} \cdot \frac{5m+n}{5m} \cdots$$

$$3.\quad \text{Sin}\,\frac{n\pi}{2m} = \frac{n}{m} \cdot \frac{2m-n}{m} \cdot \frac{2m+n}{3m} \cdot \frac{4m-n}{3m} \cdot \frac{4m+n}{5m} \cdot \frac{6m-n}{4m} \cdots$$

$$4.\quad \text{Cos}\,\frac{n\pi}{2m} = \frac{m-n}{2m}\pi \cdot \frac{m+n}{2m} \cdot \frac{3m-n}{2m} \cdot \frac{3m+n}{4m} \cdot \frac{5m-n}{4m} \cdot \frac{5m+n}{6m} \cdots$$

$$5.\quad \text{Tng.}\frac{n\pi}{2m} = \frac{n}{m-n} \cdot \frac{2m-n}{m+n} \cdot \frac{2m+n}{3m-n} \cdot \frac{4m-n}{3m+n} \cdot \frac{4m+n}{5m-n} \cdot \frac{6m-n}{5m+n} \cdots$$

$$6.\quad \text{Cot.}\frac{n\pi}{2m} = \frac{m-n}{n} \cdot \frac{m+n}{2m-n} \cdot \frac{3m-n}{2m+n} \cdot \frac{3m+n}{4m-n} \cdot \frac{5m-n}{4m+n} \cdot \frac{5m+n}{6m-n} \cdots$$

Diese Reihen sind Facultäten, deren Factoren ins Unendliche fortlaufen. Sie unterliegen den in (§. 12. u. 13.) aufgestellten Gesetzen und lassen sich daher auf Facultäten mit gebrochenen Exponenten zurückführen. Wendet man die dort angenommene Bezeichnung wieder an, so erhält man aus dem Obigen:

$$7.\quad \text{Sin}\,\frac{n}{2m}\pi = \frac{n}{2m}\pi \cdot \frac{(2m+n)^{\alpha|2m}}{(2m)^{\alpha|2m}} \cdot \frac{(2m-n)^{\alpha\,2m}}{(2m)^{\alpha;2m}},$$

$$8.\quad \text{Cos}\,\frac{n}{2m}\pi = \frac{(m-n)^{\alpha|2m}}{m^{\alpha|2m}} \cdot \frac{(2m-n)^{\alpha|2m}}{m^{\;|2m}},$$

$$9.\quad \text{Sin}\,\frac{n}{2m}\pi = \frac{n^{\alpha|2m}}{m^{\alpha|2m}} \cdot \frac{(2m-n)^{\alpha;2m}}{(m+n)^{\alpha|2m}},$$

$$10.\quad \text{Cos}\,\frac{n}{2m}\pi = \frac{m-n}{m}\pi \cdot \frac{(m+n)^{\alpha|2m}}{(2m)^{\alpha|2m}} \cdot \frac{(3m-n)^{\alpha|2m}}{(2m)^{\alpha|2m}},$$

$$11.\quad \text{Tang}.\frac{n}{2m}\pi = \frac{n^{\alpha|2m}}{(m-n)^{\alpha|2m}}\cdot\frac{(2m-n)^{\alpha|2m}}{(m+n)^{\alpha|2m}},$$

$$12.\quad \text{Cot}\ \frac{n}{2m}\pi = \frac{(m-n)^{\alpha|2m}}{n^{\alpha|2m}}\cdot\frac{(m+n)^{\alpha|2m}}{(2m-n)^{\alpha|2m}}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich leicht vereinfachen, wenn schickliche Werthe für n und m eingeführt oder zweckmässige Veränderungen mit ihnen vorgenommen werden. Bringt man sämmtliche Facultäten nach (1. §. 11.) auf solche zurück, deren Zunahme die Einheit ist, und setzt dann n statt $\frac{1}{2}n$, so ergeben sich folgende Formeln:

$$13.\quad \text{Sin}\ \frac{n}{m}\pi = \pi.\frac{\frac{n}{m}\left(\frac{n}{m}+1\right)^{\alpha|1}\left(-\frac{n}{m}+1\right)^{\alpha|1}}{1^{\alpha|1}.1^{\alpha|1}} = \pi.\frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{1^{\alpha|1}}\cdot\frac{\left(1-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{1^{\alpha|1}},$$

$$14.\quad \text{Cos}\ \frac{n}{m}\pi = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{(\frac{1}{2})^{\alpha|1}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{(\frac{1}{2})^{\alpha|1}},$$

$$15.\quad \text{Sin}\ \frac{n}{m}\pi = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{(\frac{1}{2})^{\alpha|1}(\frac{1}{2})^{\alpha|1}},$$

$$16.\quad \text{Cos}\ \frac{n}{m}\pi = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{1^{\alpha|1}.1^{\alpha|1}},$$

$$17.\quad \text{Tg}\ \frac{n}{m}\pi = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}},$$

$$18.\quad \text{Cot}.\frac{n}{m}\pi = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}.$$

Wird die Gleichung (13.) mit (18. u. 16. §. 13) verglichen, so ergiebt sich

$$19.\quad \text{Sin}\ \frac{n}{m}\pi = \frac{\pi}{1^{\frac{n}{m}-1|1}1^{-\frac{n}{m}|1}}$$

oder

$$20.\quad 1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Diese Gleichung wurde schon in (21. §. 13.) gefunden. Die Gleichung, welche auf dem angegebenen Wege so einfach folgt, hat *Kramp* (Anal. des réfr. Pg. 50. No. 20.) aus dem Quotienten $\frac{\sin n\pi}{\sin m\pi}$ abgeleitet, indem er n zuerst

unendlich klein annimmt, und dann wieder in eine endliche Grösse übergehen lässt. *Legendre* hat sie (Exerc. d. calc. int. T. II. Pg. 6. No. 6.) durch Integrale und auf ziemlich weit führendem Wege entwickelt. Die Gleichung (20.) lässt sich zu noch andern Formen benutzen. Es ist nämlich

$$1^{\frac{n}{m}-1|1} = 1^{\frac{n}{m}|1}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-1|1} = \frac{m}{n}.1^{\frac{n}{m}|1}.$$

Führt man diesen Werth in (20.) ein, so erhält man

$$21. \quad 1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}|1} = \frac{n}{m}.\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Es ist ferner $1^{-\frac{n}{m}+1|1} = 1^{-\frac{n}{m}|1}\left(1-\frac{n}{m}\right) = \frac{m-n}{m}.1^{-\frac{n}{m}|1}$.

Durch Einführung dieses Werths in (20.) ergiebt sich:

$$22. \quad 1^{-\frac{n}{m}+1|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1} = \frac{m-n}{m}.\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Wird dagegen der Werth von $1^{-\frac{n}{m}+1|1} = \frac{m-n}{m}.1^{-\frac{n}{m}|1}$ in (21.) eingeführt, so erhält man

$$23. \quad 1^{-\frac{n}{m}+1|1}.1^{\frac{n}{m}|1} = \frac{m-n}{m}.\frac{n}{m}.\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Es ist $1^{-\frac{n}{m}-1|1} = 1^{-\frac{n}{m}|1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^{-1|1} = -\frac{m}{n}.1^{-\frac{n}{m}|1}$ und

$$1^{+\frac{n}{m}+1|1} = 1^{\frac{n}{m}|1}\left(\frac{m+n}{m}\right).$$

Werden diese Werthe in (1.) eingeführt, so ergiebt sich

$$24. \quad 1^{-\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{n}{m}+1|1} = -\frac{m+n}{m}.\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Die Einführung des letzten Werths in (21.) giebt

$$25. \quad 1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}+1|1} = \frac{n}{m}.\frac{m+n}{m}.\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Die Einführung des ersten Werthes in (21.) giebt

$$26. \quad 1^{-\frac{n}{m}-1|1}.1^{\frac{n}{m}|1} = -\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Durch Einführung des eben genannten Werthes in (20.) erhält man

$$27. \quad 1^{-\frac{n}{m}-1|1}\, 1^{\frac{n}{m}-1|1} = -\frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Den Ausdruck von $\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}$ hat *Euler* im 8ten und 9ten Cap. 1ten Theils seiner Integral-Rechnung auf bestimmte Integrale zurückgebracht, und durch diese auf unendliche Factorenfolgen. *Kramp* hat zuerst den Ausdruck auf die Form (20.) zurückgeführt. Ausser dieser Gleichung hat *Kramp* (Annal. d. math. p. *Gergonne* T. III. Pg. 128.) auch No. 23. der hier mitgetheilten Gleichungen gefunden. Aus dem hiesigen Entwicklungsgange geht deutlich hervor, dass die vorstehenden Gleichungen nur von gebrochenen Exponenten gelten. Dies stimmt genau mit der Natur der betrachteten Grössen. Auf diese Beschränkung ist insbesondere zu merken; was bisher nicht geschehen zu sein scheint; denn häufig werden diese Formeln so dargestellt, dass man versucht sein könnte, sie auch auf Exponenten auszudehnen, welche ganze Zahlen sind.

Die obigen Formeln lassen sich leicht auf allgemeinere Gesetze bringen, wenn (§. 7.) angewendet wird. Es ist alsdann

$$1^{\frac{n}{m}+t|1} . 1^{-\frac{n}{m}-r|1} = (-1)^r \frac{(m+n)^{t|m}.m^r}{n^{r|m}.m^t} . 1^{\frac{n}{m}|1} . 1^{-\frac{n}{m}|1}.$$

Wird hier der Werth aus (21.) eingeführt, so ergiebt sich

$$28. \quad 1^{\frac{n}{m}+t|1} . 1^{-\frac{n}{m}-r|1} = (-1)^r \frac{(m+n)^{t|m} m^r}{n^{r|m}.m^t} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} \quad \text{und}$$

$$29. \quad 1^{\frac{n}{m}+t|1} . 1^{-\frac{n}{m}-t|1} = (-1)^t \frac{n+tm}{m} \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Auf gleiche Weise erhält man folgende bemerkenswerthe Relationen:

$$30. \quad 1^{\frac{n}{m}-t|1} . 1^{-\frac{n}{m}-r|1} = (-1)^r \frac{m^{t+r}}{n^{t|-m} n^{r|m}} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$31. \quad 1^{\frac{n}{m}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-t|1} = (-1)^t \frac{m^{2t}}{n^{t|-m}.n^{t|m}} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}$$

$$= (-1)^t . \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{m^2}{n^2-2^2m^2} \cdots \frac{m^2}{(n^2-(t-1)^2m^2} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$32.\quad 1^{\frac{n}{m}+t|1}\,1^{-\frac{n}{m}+r|1} = \frac{(m+n)^{t|m}.(m-n)^{r|m}}{m^{r+t}} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$33.\quad 1^{\frac{n}{m}+t|1}\,1^{-\frac{n}{m}+t|1} = \frac{(m+n)^{t|m}(m-n)^{t|m}}{m^{2t}} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}$$

$$= \frac{m^2-n^2}{m^2} \cdot \frac{2^2m^2-n^2}{m^2} \cdots \frac{t^2m^2-n^2}{m^2} \cdot \frac{n}{m} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$34.\quad 1^{\frac{n}{m}-t|1}\,1^{-\frac{n}{m}+r|1} = \frac{(m-n)^{r|m}m^t}{n^{t|-m}.m^r} \cdot \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$35.\quad 1^{\frac{n}{m}-t|1}\,1^{-\frac{n}{m}+t|1} = (-1)^{t-1}\left(\frac{tm-n}{m}\right) \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Die Gleichungen (28., 30., 32. u. 34.) schliessen alle in (20. bis 27.) entwickelten speciellen Fälle in sich. Die Ausdrücke (29. u. 35.) lassen sich unmittelbar aus (21.) ableiten, wenn $\frac{n \pm tm}{m}$ statt $\frac{n}{m}$ gesetzt wird. Es ist alsdann

$$36.\quad 1^{\frac{n}{m}+t|1}\,1^{-\frac{n}{m}-t|1} = \frac{n+tm}{m}\,\frac{\pi}{\sin\left(\frac{n}{m}+t\right)\pi} = (-1)^t\,\frac{n+tm}{m}\,\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

$$37.\quad 1^{\frac{n}{m}-t|1}\,1^{-\frac{n}{m}+t|1} = \frac{n-tm}{m} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{n}{m}-t\right)\pi} = (-1)^{t-1}\,\frac{tm-n}{m}\,\frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},$$

§. 27.

Setzt man in den Gleichungen (23. u. 25. §. 12.) $a = \frac{1}{2}$, $d = 1$, so ergiebt sich aus der Gleichung (24. §. 26.) der Ausdruck

$$1.\quad \operatorname{Cos}\frac{n}{m}\pi = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{\frac{n}{m}|1}(\frac{1}{2})^{-\frac{n}{m}|1}}.$$

Man kann hierin die Basis der beiden Facultäten mit der Einheit beginnen lassen. Dann erhält man nach (13. u. 23. §. 11.):

$$(\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{m}|1}.(\tfrac{1}{2})^{-\frac{n}{m}|1} = \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}{1^{-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}} = \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}{\pi},$$

wenn (26. §. 13.) zu Hülfe genommen wird. Es ergiebt sich auch sofort aus (1.):

$$2.\quad \cos\frac{n}{m}\pi = \frac{\pi}{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}},$$

oder auch

$$3.\quad 1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Diese Gleichung lässt sich noch weiter umformen. Es ist nämlich

$$1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-1|1} = \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}}{\frac{1}{2}+\frac{n}{m}} = \frac{2m}{m+2n}.1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}.$$

Hiernach geht (3.) in

$$4.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = \frac{m+2n}{2m}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}$$

über. Ferner ist

$$1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = 1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-1|1} = \frac{1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}}{\frac{1}{2}-\frac{n}{m}} = \frac{2m}{m-2n}.1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}.$$

Wird dieses in (3.) eingeführt, so erhält man

$$5.\quad 1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}\,1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1} = \frac{m-2n}{2m}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Werden beide Werthe gleichzeitig in (3.) eingeführt, so ergiebt sich

$$6.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1} = \left(\tfrac{1}{4}-\frac{n^2}{m^2}\right)\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi} = \frac{m^2-4n^2}{4m^2}\cdot\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Bekanntlich ist

$$\sin\left(\frac{n}{m}+\tfrac{1}{2}\right)\pi = \cos\frac{n}{m}\pi.$$

Man kann daher die Gleichungen (3. bis 6.) auch aus den Gleichungen (20. bis 23. §. 26.) ableiten, wenn man $\frac{n}{m}+\frac{1}{2}$ statt $\frac{n}{m}$ setzt.

Wird die Gleichung (3.) durch die Gleichung (20. §. 26.) dividirt, so erhält man

$$7.\quad \operatorname{Tg}\frac{n}{m}\pi = \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}}.$$

Werden ebenso die Gleichungen (4., 5., 6.) durch (20. §. 26.) dividirt, so ergiebt sich

$$8.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}|1}} = \frac{m+2n}{2m}\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi,$$

$$9.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}|1}} = \frac{m-2n}{2m}\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi,$$

$$10.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}\;1^{-\frac{n}{m}|1}} = \frac{m^2-4n^2}{4m^2}\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi = \left(\tfrac{1}{4}-\frac{n^2}{m^2}\right)\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi.$$

Man kann nun noch jede der Gleichungen (4., 5., 6.) durch die Gleichungen (21. bis 27. §. 26.) und die Gleichung (3.) durch jede der Gleichungen (24. bis 27. §. 26.) dividiren. Dieses giebt eine Menge verschiedener Ausdrücke. Von denselben heben wir nur folgende aus:

$$11.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}|1}\;1^{-\frac{n}{m}|1}} = \frac{m+2n}{m}\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi,$$

$$12.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}-1|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}+1|1}} = \frac{m-2n}{2(m-n)}\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi,$$

$$13.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{n}{m}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}+1|1}} = \frac{(m+2n)(m-2n)}{2n\,.\,2(m-n)}\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi,$$

$$14.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}\,.\,1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}{1^{-\frac{n}{m}-1|1}\;1^{\frac{n}{m}|1}} = -\,\mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi.$$

Man kann auch die Ausdrücke (7. bis 14.) dadurch umformen, dass man im Zähler und Nenner die gleichen Facultäten ausscheidet. Dadurch entsteht aus (7. und 9.):

$$15.\quad \mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}|1}.\left(1-\frac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}|1} = \frac{n}{m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}|1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^{-\frac{1}{2}|1}$$

$$= \frac{n}{m\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}|1}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}|1}}$$

$$16.\quad \mathrm{Tg}\,\frac{n}{m}\pi = \frac{2m}{m-2n}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}|1}\left(1-\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}|1}$$

u. s. w. Auch diese Ausdrücke gelten für gebrochene Exponenten. Dies scheint *Kramp* übersehen zu haben. Dadurch wurde er zu manchen Schlüssen verleitet, die sich nicht wohl rechtfertigen lassen. Alle die Ausdrücke geben unter der genannten Voraussetzung richtige Werthe; wie sich zeigt, wenn man sie auf einen bekannten Fall anwendet. Setzt man nämlich $\frac{n}{m} = \frac{1}{4}$, so ist bekanntlich $\text{Tg}\, 45^0 = 1$. Aus (7.) ergiebt sich dieser Werth unmittelbar. Aus (8.) ergiebt sich $\frac{6}{8}\text{Tg}\, 45^0 = \frac{1^{\frac{1}{4}|1}}{1^{-\frac{1}{4}|1}} = (\frac{3}{4})^{\frac{1}{4}|1} . 1^{\frac{3}{4}|1} = \frac{3}{4}$, also $\text{Tg}\, 45^0 = 1$. Aus (9.) erhält man $\frac{1^{\frac{1}{4}|1}}{1^{-\frac{3}{4}|1}} = (\frac{1}{4})^{\frac{3}{4}|1} . 1^{\frac{1}{4}|1} = \frac{1}{4}$, woraus gleichfalls der nämliche Werth folgt u. s. w. Die Gleichung (5.) und die erste Form der Gleichung (15.) hat auch *Bessel* in seiner Abhandlung (§. 11. *S.* 258. Königsberger Archiv) angegeben.

Man kann die Gleichungen (15. u. 16.) auch zu Darstellung anderer Ausdrücke benutzen. Wird nach (15. §. 26.) in der Gleichung (25. §. 12.) $a = \frac{1}{2}$, $d = 1$ und $\frac{n}{m} - \frac{1}{2}$ statt $\frac{n}{m}$ gesetzt, so ergiebt sich

$$(\tfrac{1}{2})^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha|1}}{\left(1 - \frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}.$$

Eben so findet man durch Einführung der nämlichen Werthe in (23. §. 12.):

$$(\tfrac{1}{2})^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1} = \frac{(\frac{1}{2})^{\alpha|1}}{\left(\frac{n}{m}\right)^{\alpha|1}}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in (15. §. 26.) ergiebt sich

$$17. \qquad \text{Sin}\, \frac{n}{m}\pi = \frac{1}{(\frac{1}{2})^{-\frac{n}{m}+\frac{1}{2}|1} . (\frac{1}{2})^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}.$$

So sehr dieser Ausdruck auch der Form nach von dem in (20. §. 26.) gefundenen verschieden ist, so ist er ihm doch dem Inhalte nach gleich. Bringt man nämlich die Basis der in ihm enthaltenen Facultäten nach (13. §. 11.) auf die Einheit, so ergiebt sich

$$18. \qquad \text{Sin}\, \frac{n}{m}\pi = \frac{1^{-\frac{1}{2}|1} . 1^{-\frac{1}{2}|1}}{1^{-\frac{n}{m}|1} . 1^{\frac{n}{m}-1|1}} = \frac{\pi}{1^{-\frac{n}{m}|1} . 1^{+\frac{n}{m}-1|1}}.$$

Auf gleiche Weise lässt sich die Gleichung (16. §. 26.) behandeln. Setzt man nämlich in den Gleichungen (16. u. 18. §. 13.) $\frac{n}{m} + \frac{1}{2}$ statt $\frac{n}{m}$, so erhält man

$$1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-1|1}=\frac{1^{a|1}}{\left(\frac{n}{m}+\frac{1}{2}\right)^{a|1}} \quad \text{und} \quad 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}=\frac{1^{a|1}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{m}\right)^{a|1}},$$

und hiernach aus (16. §. 26.):

$$19. \quad \operatorname{Cos}\frac{n}{m}\pi=\frac{\pi}{1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}}.$$

In (3.) dieses Paragraphs wurde diese Gleichung auf eine andere Weise gefunden.

Aus den Resultaten in diesem und dem vorhergehenden Paragraph zeigt sich, dass aus den Ausdrücken (1. bis 4. §. 26.) nur zwei Grundgleichungen gewonnen werden, und dass (1. und 3., 2. und 4. §. 26.) nur einen und denselben Werth haben, wenn auch ihre Form verschieden ist. Die Grundgleichungen. welche die Kreisfunctionen auf die Facultäten zurückbringen, sind die (20. §. 26.) und (3.) in diesem Paragraph. Aus ihnen folgen die übrigen. Für den Ausdruck des Sinus durch Facultäten sind acht verschiedene Gleichungen (20. bis 27. §. 26.) angegeben; für den des Cosinus nur vier (§. 3. bis 6.). Man kann auch für den Cosinus, nach Analogie von (24. bis 27. §. 26.), noch vier andere Ausdrücke aufstellen; sie sind jedoch nicht so einfach wie die obigen und werden deshalb hier übergangen. Der Ausdruck der Tangente, Contangente u. s. w. durch Kreisfunctionen hat keine weitere Schwierigkeit; nach dem bekannten Zusammenhange der Kreisfunctionen *untereinander*.

Es lassen sich endlich auch durch die bis jetzt gefundenen Resultate die Facultäten mit der Reihe

$$20. \quad e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\dots$$

vergleichen. Bekanntlich ist

$$21. \quad \operatorname{Sin}\frac{n}{m}\pi=\frac{e^{\frac{n}{m}\pi.i}-e^{-\frac{n}{m}\pi.i}}{2.i},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ ist. Eben so ist

$$22. \quad \operatorname{Cos}\frac{n}{m}\pi=\frac{e^{\frac{n}{m}\pi i}-e^{-\frac{n}{m}\pi i}}{2}.$$

Dieses giebt nach (20. §. 26. und 3. in diesem Paragraph):

$$23. \quad 1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}-1|1}=\frac{2i\pi}{e^{i\frac{n}{m}\pi}-e^{-i\frac{n}{m}\pi}},$$

$$24.\quad 1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}|1}=\frac{2\pi}{e^{i\frac{n}{m}\pi}+e^{-i\frac{n}{m}\pi}}.$$

Aus (23.) erhält man auch folgenden Ausdruck:

$$25.\quad 1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{\frac{n}{m}|1}=\frac{2in\pi}{m(e^{i\frac{n}{m}\pi}-e^{-i\frac{n}{m}\pi})}.$$

Setzt man $i.\frac{n}{m}$ statt $\frac{n}{m}$ in (24. u. 25.), und bemerkt, dass $i^2=-1$ ist, so findet sich aus (25. u. 24.):

$$26.\quad 1^{-\frac{n\sqrt{-1}}{m}|1}.1^{\frac{n\sqrt{-1}}{m}|1}=\frac{2\frac{n}{m}\pi}{e^{\frac{n}{m}\pi}-e^{-\frac{n}{m}\pi}}\quad\text{und}$$

$$27.\quad 1^{\frac{n\sqrt{-1}}{m}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n\sqrt{-1}}{m}-\frac{1}{2}|1}=\frac{2\pi}{e^{\frac{n}{m}\pi}+e^{-\frac{n}{m}\pi}}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass Facultäten, deren Exponenten imaginär sind, auf reelle Werthe führen können. Aus (26. u. 27.) ergiebt sich

$$28.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}\sqrt{-1}-\frac{1}{2}|1}.1^{-\frac{n}{m}\sqrt{-1}-\frac{1}{2}|1}}{1^{-\frac{n}{m}\sqrt{-1}|1}\;1^{\frac{n}{m}\sqrt{-1}|1}}=\frac{m}{n}.\frac{e^{\frac{n}{m}\pi}-e^{-\frac{n\pi}{m}}}{e^{\frac{n\pi}{m}}+e^{-\frac{n}{m}\pi}}.$$

Auch die in diesem Paragraph aufgestellten Gleichungen (1. bis 14.) lassen sich auf allgemeinere Formen bringen. Wendet man wieder die im vorigen Paragraph angegebene Methode an, so erhält man folgende Gleichungen:

$$29.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t|1}\;1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t|1}=(-1)^r\frac{(3m+2n)^{t|2m}(2m)^r}{(m+2n)^{r|2m}(2m)^t}.\frac{m+2n}{m}.\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$30.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t|1}.1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t|1}=(-1)^t.\frac{(2t+1)m+2n}{2m}.\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$31.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t|1}\;1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-r|1}=(-1)^r.\frac{(2m^{r+t}(m+2n)}{(2n+m)^{t|-2m}(2n+m)^{r|2m}.2m}.\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

$$32.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t|1}\;1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t|1}=(-1)^t\frac{(2m)^{2t}.(m+2n)}{(2n+m)^{t|-2m}(2n+m)^{r|2m}}.\frac{\pi}{2m\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$33.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t|1}\;1^{\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r|1}=\frac{(3m+2n)^{t|2m}(m-2n)^{r|2m}}{(2m)^{r+t}}.\frac{2n+m}{2m}.\frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$34.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t|1} . 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t|1} = \frac{(3m+2n)^{t|2m}(m-2n)^{t|2m}}{(2m)^{2t}} \cdot \frac{2n+m}{2m} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$35.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+r|1} = \frac{(m-2n)^{r|2m}(2m)^{t}}{(2m)^{r}(2n+m)^{t|-2m}} \cdot \frac{2n+m}{2m} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi},$$

$$36.\quad 1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t|1} = (-1)^{t-1}\frac{(2t-1)m-2n}{2m} \cdot \frac{\pi}{\cos\frac{n}{m}\pi}.$$

Eben so ergeben sich aus der Verbindung von (29. u. 35. §. 26.) mit (30. u. 36.) folgende Relationen:

$$37.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t|1}}{1^{\frac{n}{m}+t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-t|1}} = \frac{(2t+1)m+2n}{2(n+tm)} \operatorname{Tg}\frac{n}{m}\pi,$$

$$38.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}+t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}-t|1}}{1^{\frac{n}{m}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}+t|1}} = -\frac{(2t+1)m+2n}{2(tm-n)} . \operatorname{Tg}\frac{n}{m}\pi,$$

$$39.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t|1}}{1^{\frac{n}{m}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}+t|1}} = \frac{(2t-1)m-2n}{2(tm-n)} . \operatorname{Tg}\frac{n}{m}\pi,$$

$$40.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}+\frac{1}{2}-t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-\frac{1}{2}+t|1}}{1^{\frac{n}{m}+t|1}\, 1^{-\frac{n}{m}-t|1}} = -\frac{(2t-1)m-2n}{2(n+tm)} \operatorname{Tg}\frac{n}{m}\pi,$$

§. 28.

Die in den zwei vorhergehenden Paragraphen gefundenen Gleichungen lassen sich zu weitern Anwendungen benutzen. Die Gleichung (21. §. 26.) giebt ein Mittel ab, noch andere Ausdrücke für die Logarithmen der Facultäten mit gebrochenen Exponenten aufzustellen. Man erhält aus ihr

$$1.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} + \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \lg \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Bezeichnen wir nun die Vorzahlen der begleitenden Reihe in (15. §. 22.) der Reihe nach durch A_0, A_1, A_2, ..., so findet sich

$$2.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = 9\lg m - \lg(m+n)^{9|m} + \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$- \frac{10m+n}{m} + A_0 - A_1\frac{n}{m} - A_3\frac{n^3}{m^3} + \ldots.$$

Eben so aus (21. §. 22.):

$$3.\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = 9\lg m - \lg(m-n)^{9|m} + \frac{10m-n}{m}\lg\frac{10m-n}{m} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m-n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi$$
$$- \frac{10m-n}{m} + A_0 + A_1\frac{n}{m} + A_2\frac{n^2}{m^2} + A_3\frac{n^3}{m^3} + \ldots.$$

Wird die Gleichung (3.) von (2.(abgezogen, so erhält man

$$4.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} - \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \lg\frac{(m-n)^{9|m}}{(m+n)^{9|m}} + \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \frac{10m-n}{m}\lg\frac{10m-n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m-n}{10m+n}$$
$$- \frac{2n}{m} - 2A_1\frac{n}{m} - 2A_3\frac{n^3}{m^3} - 2A_5\frac{n^5}{m^5} - \ldots.$$

Zählt man (1.) und (4.) zusammen, so ergiebt sich

$$5.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg.\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{(m-n)^{9|m}}{(m+n)^{9|m}} + \tfrac{1}{2}\frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m}$$
$$- \frac{10m-n}{2m}\lg.\frac{10m-n}{m} + \tfrac{1}{4}\lg\frac{10m-n}{10m+n}$$
$$- (1+A_1)\frac{n}{m} - A_3\frac{n^3}{m^3} - A^5\frac{n^5}{m^5} - A^7\frac{n^7}{m^7} - \ldots.$$

Wird (4.) von (1.) abgezogen, so findet sich

$$6.\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{(m-n)^{9|m}}{(m+n)^{9|m}} - \frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m}$$
$$+ \frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m} - \tfrac{1}{4}\lg\frac{10m-n}{10m+n}$$
$$+ \frac{n}{m}(1+A_1) + A_3\frac{n^3}{m^3} + A_5\frac{n^5}{m^5} + A_7\frac{n^7}{m^7} + \ldots.$$

Setzt man für A_1, A_3, A_5 .... die Werthe aus (§. 22.), so ergiebt sich aus (5. und 6.)

$$7.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{(m-n)^{9|m}}{(m+n)^{9|m}} + \frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m}$$
$$- \frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m-n}{10m+n}$$
$$- \frac{n}{m}\,1{,}000\,832\,503\,927\,324\ \ldots.$$
$$- \frac{n^3}{m^3}\,0{,}000\,008\,305\,828\,467\,0\ \ldots.$$
$$- \frac{n^5}{m^5}\,0{,}000\,000\,082\,759\,735\,2\ \ldots.$$

. . . .

$$8. \quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg \frac{n\pi}{m \sin \frac{n}{m}\pi} - \tfrac{1}{2}\lg \frac{(m-n)^{9|m}}{(m+n)^{9|m}} - \frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m}$$

$$+ \frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m} - \tfrac{1}{4}\lg\frac{10m-n}{10m+n}$$

$$+ \frac{n}{m}\, 1{,}000\,832\,503\,927\,324 \,\ldots.$$

$$+ \frac{n^3}{m^3}\, 0{,}000\,008\,305\,828\,467\,0 \,\ldots.$$

$$+ \frac{n^5}{m^5}\, 0{,}000\,000\,082\,759\,735\,2 \,\ldots.$$

. . . .

Für Briggische Logarithmen gestalten sich diese Formeln etwas anders. Wendet man die eben benutzte Entwicklungsart auf die Gleichungen (27. und 28. §. 22.) an und bezeichnet die Vorzahlen der begleitenden Reihe durch $B_0, B_1, B_2 \ldots.$, so erhält man

$$9. \quad \lg \text{br.}\, 1^{\frac{n}{m}|1} - \lg \text{br.}\, 1^{-\frac{n}{m}|1} = -\lg\frac{(m+n)^{9|m}}{(m-n)^{9|m}} + \frac{10m+n}{m}\lg\frac{10m+n}{m} - \frac{10m-n}{m}\lg\frac{10m-n}{m}$$

$$- \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{10m-n} - 2B_1\frac{n}{m} - 2B_3\frac{n^3}{m^3} - 2B_5\frac{n^5}{m^5} - \ldots.$$

Werden nun für (1.) auch Briggische Logarithmen genommen, wird dann (9.) zu (1.) addirt und davon abgezogen, und werden in die Resultate die Werthe für $B_1, B_3, B_5, \ldots.$ aus (27. u. 28. §. 22.) gesetzt, so ergiebt sich

$$10. \quad \lg \text{br.}\, 1^{\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m \sin\frac{n}{m}\pi} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{(m+n)^{9|m}}{(m-n)^{9|m}} + \frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m} - \frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m}$$

$$- \tfrac{1}{4}\lg\frac{10m+n}{10m-n}$$

$$- \frac{n}{m}\, 0{,}434\,656\,033\,765\,051\,6 \,\ldots.$$

$$- \frac{n^3}{m^3}\, 0{,}000\,002\,607\,175\,470\,8 \,\ldots.$$

$$- \frac{n^5}{m^5}\, 0{,}000\,000\,035\,942\,096\,36 \,\ldots.$$

$$- \frac{n^7}{m^7}\, 0{,}000\,000\,000\,357\,678\,6 \,\ldots.$$

. . . .

$$11.\quad \lg \text{br.}\, 1^{-\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg \frac{n\pi}{m \sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg \frac{(m+n)^{9|m}}{(m-n)^{9|m}} - \frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m} + \frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m}$$

$$+ \tfrac{1}{4}\lg\frac{10m+n}{10m-n} + \frac{n}{m}\, 0{,}434\,656\,033\,765\,051\,6 \ldots.$$

$$+ \frac{n^3}{m^3}\, 0{,}000\,003\,601\,175\,470\,8 \ldots.$$

$$+ \frac{n^5}{m^5}\, 0{,}000\,000\,035\,942\,096\,3 \ldots.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das nämliche Verfahren lässt sich auf die in (§. 23.) entwickelten Ausdrücke anwenden. Bezeichnet man die Vorzahlen der Entwicklungen in (12. u. 13. §. 23.) der Reihe nach durch $C_1, C_2, C_3, \ldots.$, so ergiebt sich

$$12.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = -\lg\frac{m+n}{m} + C_1\frac{n}{m} + C_2\frac{n^2}{m^2} - C_3\frac{n^3}{m^3} + C_4\frac{n^4}{m^4} - \ldots.$$

$$13.\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = -\lg\frac{m-n}{m} - C_1\frac{n}{m} + C_2\frac{n^2}{m^2} + C_3\frac{n^3}{m^3} + C_4\frac{n^4}{m^4} + \ldots.$$

Wird (13.) von (12. abgezogen, so erhält man

$$14.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} - \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \lg\frac{m-n}{m+n} + 2C_1\frac{n}{m} - 2C_3\frac{n^3}{m^3} - 2C_5\frac{n^5}{m^5} - \ldots.$$

Wird (14.) zu (1.) addirt, und davon abgezogen, so ergeben sich folgende zwei Darstellungen der Logarithmen von Facultäten mit gebrochenen Exponenten:

$$15.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{m-n}{m+n} + C_1\frac{n}{m} - C_3\frac{n^3}{m^3} - C_5\frac{n^5}{m^5} - \ldots.$$

$$16.\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{m-n}{m+n} - C_1\frac{n}{m} + C_3\frac{n^3}{m^3} + C_5\frac{n^5}{m^5} + \ldots.$$

oder auch, für hyperbolische Logarithmen:

$$17.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} - \tfrac{1}{2}\lg\frac{m+n}{m-n} + \frac{n}{m}\, 0{,}422\,784\,335\,098\,467\,1 \ldots.$$

$$- \frac{n^3}{m^3}\, 0{,}067\,352\,301\,053\,198\,1 \ldots.$$

$$- \frac{n^5}{m^5}\, 0{,}007\,385\,551\,028\,673\,98 \ldots.$$

$$- \frac{n^7}{m^7}\, 0{,}001\,192\,753\,911\,703\,2 \ldots.$$

$$- \frac{n^9}{m^9}\, 0{,}000\,223\,154\,758\,453\,5 \ldots.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$18.\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{m+n}{m-n} - \frac{n}{m}\,0{,}427\;784\;335\;098\;467\;1\ldots$$
$$+\frac{n^3}{m^3}\,0{,}067\;352\;301\;053\;198\;1\ldots$$
$$+\frac{n^5}{m^5}\,0{,}007\;385\;551\;028\;673\;98\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für Briggische Logarithmen ergiebt sich

$$19.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{m+n}{m-n} + \frac{n}{m}\,0{,}183\;612\;903\;768\;48\ldots$$
$$-\frac{n^3}{m^3}\,0{,}029\;250\;732\;691\;7\ldots$$
$$-\frac{n^5}{m^5}\,0{,}003\;207\;504\;058\ldots$$
$$-\frac{n^7}{m^7}\,0{,}000\;518\;006\;442\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$20.\quad \lg 1^{-\frac{n}{m}|1} = \tfrac{1}{2}\lg \frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{m+n}{m-n} - \frac{n}{m}\,0{,}183\;612\;903\;768\;48\ldots$$
$$+\frac{n^3}{m^3}\,0{,}029\;250\;732\;691\;7\ldots$$
$$+\frac{n^5}{m^5}\,0{,}003\;207\;504\;058\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Gleichung (17.) hat *Bessel* in der angeführten Abhandlung entwickelt. Seine Zahlen in den angegebenen Formeln stimmen nicht alle mit den hiesigen.

§. 29.

Man kann auch die Gleichung (20. §. 26.) benutzen, um die in (§. 14) entwickelten Ausdrücke zu finden. Es sei, wie dort angenommen,

$$1.\quad \Sigma_1^{m-1}\left(1^{-\frac{x}{m}|1}\right) = 1^{-\frac{1}{m}|1}.1^{-\frac{2}{m}|1}\ldots.1^{-\frac{m-2}{m}|1}.1^{-\frac{m-1}{m}|1}.$$

Nun unterscheide man die Fälle, wenn m eine gerade und wenn es eine ungerade Zahl ist. Wendet man die Gleichung (20. §. 26.) auf den Fall an, wo m eine gerade Zahl ist, so ergiebt sich

$$2.\quad 1^{-\frac{1}{2m}|1}.1^{-\frac{2m-1}{m}} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2m}\pi},\qquad 1^{-\frac{2}{m}|1}.1^{-\frac{2m-2}{2m}} = \frac{\pi}{\sin\frac{2}{2m}\pi},\ \ldots$$

$$\ldots\ 1^{-\frac{m}{2m}|1}.1^{-\frac{m}{2m}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{2m}\pi},\ \ldots$$

$$\ldots\ 1^{-\frac{2m-2}{2m}|1}.1^{-\frac{2}{2m}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi},\qquad 1^{-\frac{2m-1}{2m}|1}.1^{-\frac{1}{2m}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{m}\pi}.$$

Für eine ungerade Zahl erhält man

$$3.\quad 1^{-\frac{1}{2m+1}|1}.1^{-\frac{2m}{2m+1}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{2m+1}\pi},\qquad 1^{-\frac{2}{2m+1}|1}.1^{-\frac{2m-1}{2m+1}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{2}{2m+1}\pi},\ \ldots$$

$$\ldots\ 1^{-\frac{m}{2m+1}|1}.1^{-\frac{m+1}{2m+1}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{2m+1}\pi},\qquad 1^{-\frac{m+1}{2m+1}|1}.1^{-\frac{m}{2m+1}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{m}{2m+1}\pi},$$

$$1^{-\frac{2m-1}{2m+1}|1}.1^{-\frac{2}{2m+1}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{2m-1}{2m+1}\pi},\qquad 1^{-\frac{2m}{2m+1}|1}.1^{-\frac{1}{2m+1}|1} = \frac{\pi}{\sin\frac{2m}{2m+1}\pi},$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Ausdrücke (2. u. 3.) Quadrate der einfachen Reihen

$$4.\quad \Sigma_1^{2m-1}\left(1^{-\frac{x}{2m}|1}\right)\quad\text{und}\quad \Sigma_1^{2m}\left(1^{-\frac{x}{2m+1}|1}\right)$$

sind und dass sich ferner die Producte der Facultäten so in zwei Abtheilungen bringen lassen, dass die ersten $2m$ Glieder den letzten $2m$ Gliedern gleich sind.

Es ist nun die Aufgabe, das Product der Sinus, welches dem Quadrate der eben angegebenen Facultätenproducte gleich ist, auf eine andere Form zu bringen. Hiezu giebt die Analysis das Mittel. Ihr zufolge ist

$$5.\quad \frac{\sin 2mz}{2^{2m-1}\sin z} = \sin\left(\frac{\pi}{2m}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{2m}+z\right)\sin\left(\frac{2}{2m}\pi-z\right)\sin\left(\frac{2}{2m}\pi-z\right)\ldots$$
$$\ldots\sin\left(\frac{m-1}{2m}\pi-z\right)\sin\left(\frac{m-1}{2m}+z\right).\sin\left(\frac{m}{2m}\pi-z\right)$$

$$6.\quad \frac{\sin(2m+1)z}{2^{2m}\sin z} = \sin\left(\frac{\pi}{2m+1}-z\right)\sin\left(\frac{\pi}{2m+1}+z\right)\sin\left(\frac{2}{2m+1}\pi-z\right)\sin\left(\frac{2}{2m+1}\pi+z\right)\ldots$$
$$\ldots\sin\left(\frac{m-1}{2m+1}\pi-z\right)\sin\left(\frac{m-1}{2m+1}\pi+z\right)\sin\left(\frac{m}{2m+1}-z\right)\sin\left(\frac{m}{2m+1}+z\right).$$

Wird in beiden Gleichungen $z=0$ gesetzt, so nehmen die Ausdrücke links die Form $\frac{0}{0}$ an. Ihr Werth lässt sich für diesen Fall entweder durch Entwicklung in Reihen, oder durch Differenziiren finden. Man erhält für $z=0$:

$$\frac{\sin 2mz}{2^{2m-1}\sin z} = \frac{2m}{2^{2m-1}} \text{ und } \frac{\sin(2m+1)z}{2^{2m}.\sin z} = \frac{2m+1}{2^{2m}}.$$

Aus (5. und 6.) ist

$$7. \quad \sin\frac{\pi}{2m}.\sin\frac{2\pi}{2m}\sin\frac{3\pi}{2m}\ldots\sin\frac{m-1}{2m}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}\pi} = \sqrt{\frac{2m}{2^{2m-1}}}$$

$$8. \quad \sin\frac{\pi}{2m+1}.\sin\frac{2\pi}{2m+1}.\sin\frac{3\pi}{2m+1}\ldots\sin\frac{m-1}{2m+1}\pi.\sin\frac{m\pi}{2m+1} = \sqrt{\frac{2m+1}{2^{2m}}}.$$

Die Gleichungen (7. u. 8.) umfassen die Hälfte der Factoren in (2. u. 3.) und sind daher den Ausdrücken (4.) an Werth gleich. Diesem zufolge ist

$$9. \quad \Sigma_1^{2m-1}(1^{-\frac{x}{2m}|1}) = \sqrt{\frac{\pi^{2m-1}.2^{2m-1}}{2m}},$$

$$10. \quad \Sigma_1^{2m}(1^{-\frac{x}{2m+1}|1}) = \sqrt{\frac{\pi^{2m}.2^{2m}}{2m+1}}.$$

Die beiden Ausdrücke vereinigen sich in folgenden:

$$11. \quad \Sigma^{m-1}(1^{-\frac{x}{m}|1}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}.m^{-\frac{1}{2}}.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun die in (§. 14.) gefundenen leicht weiter ableiten. Es ist nämlich

$$12. \quad 1^{n|1}.1^{n-\frac{1}{m}|1}.1^{n-\frac{2}{m}|1}\ldots 1^{n-\frac{m-1}{m}|1} = 1^{nm|1}.m^{-nm-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}.$$

§. 30.

In (§. 1.) ist gezeigt worden, dass sich jede Facultät mit gebrochenem Exponenten durch einen Quotienten zweier ins Unendliche fortlaufenden Facultäten und, unter bestimmten Bedingungen, der Quotient zweier ins Unendliche fortlaufenden Facultäten durch Facultäten mit gebrochenen Exponenten darstellen lässt. Die Anwendung der Sätze (§. 12. u. 13.) führt zu den Entwicklungen (§. 26. bis 29.).

In (§. 12.) wurde die Gleichung

$$1. \quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}}$$

u. s. w. aufgestellt, welche die Bedingungen angiebt, unter welchen der Uebergang von Facultäten mit gebrochenen Exponenten auf unendliche Factorenfolgen, und umgekehrt, gestattet ist. In dieser Gleichung kommt der Factor $(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}$ vor. In allen bisher betrachteten Fällen, wo von unendlichen

Factorenfolgen auf Facultäten mit gebrochenen Exponenten geschlossen wurde, blieb dieser Factor ausser Acht und es wurde also die Gleichung

$$2.\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\alpha|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = \frac{a(a+d)(a+2d)\ldots.}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots.}$$

der Schlussfolge zum Grunde gelegt. Es ist nun nachzuweisen, dass die Vernachlässigung des genannten Factors geschehen dürfe, ohne die Richtigkeit des erhaltenen Resultates zu beeinträchtigen.

Nimmt man die Logarithmen in der Gleichung (2.), so ergiebt sich

$$3.\quad \lg\frac{a^{\alpha|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = \lg\frac{a(a+d)(a+2d)\ldots.}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots.}.$$

Eben so ist

$$4.\quad \lg\frac{a^{\alpha|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = \lg a^{\alpha|d} - \lg(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}.$$

Wird die Gleichung (5. §. 21.) auf (4.) angewendet, so ist

$$5.\quad \lg\frac{a^{\alpha|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = R\left(\frac{a+\alpha d}{d}\right) - R\left(\frac{a}{d}\right) - R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d+\alpha d}{d}\right) + R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d}{d}\right).$$

Da eine endliche Grösse, einer unendlichen gegenüber, mit welcher sie in Verbindung steht, verschwindet, so geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

$$6.\quad \lg\frac{a^{\alpha|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d}{d}\right) - R\left(\frac{a}{d}\right).$$

Behandelt man nun die Facultät $a^{\frac{n}{m}|d}$ nach der Gleichung (5. §. 21.), so ist

$$7.\quad \lg a^{\frac{n}{m}|d} = R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d}{d}\right) - R\left(\frac{a}{d}\right).$$

Aus der Vergleichung von (2., 3., 6. u. 7.) folgt, wenn man von den Logarithmen auf die Grundgrössen übergeht:

$$8.\quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\alpha|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{\alpha|d}} = \frac{a(a+d)(a+2d)(a+3d)\ldots.}{(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)(a+\frac{n}{m}d+2d)\ldots.}.$$

In dieser Gleichung fehlt der genannte Factor. Man kann denselben

auch nach (1.) in den Calcul aufnehmen, und wird gleichwohl zu dem, eben in (8.) erhaltenen Resultate geführt. Für diesen Fall ist aus (1.), wenn die Gleichung (5. §. 21) angewendet wird:

$$9. \quad \lg a^{\frac{n}{m}|d} = R\left(\frac{a+\alpha d}{d}\right) + \frac{n}{m}\lg(a+\alpha d) - R\left(\frac{a}{d}\right) - R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d+\alpha d}{d}\right) + R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d}{d}\right).$$

Nun ist nach (3. §. 21.)

$$R\left(\frac{a+\alpha d}{d}\right) + \frac{n}{m}\lg(a+\alpha d) = \frac{a+\alpha d}{d}\lg(a+\alpha d) - \frac{a+\alpha d}{d} - \tfrac{1}{2}\lg(a+\alpha d) + \frac{n}{m}\lg(a+\alpha d)$$
$$= \left(\frac{a}{d} + \frac{n}{m} - \tfrac{1}{2} + \alpha\right)\lg(a+\alpha d) - \frac{a+\alpha d}{d}.$$

Eben so ist

$$-R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d+\alpha d}{d}\right) = -\left(\frac{a+\frac{n}{m}d+\alpha d}{d} - \tfrac{1}{2}\right)\lg\left(a+\frac{n}{m}d+\alpha d\right) + \frac{a+\frac{n}{m}d+\alpha d}{d}.$$

Da auch hier die endlichen Grössen den unendlichen gegenüber verschwinden, so erhält man durch Einführung der eben gefundenen Werthe in (9.) folgende Gleichung:

$$10. \quad \lg a^{\frac{n}{m}|d} = R\left(\frac{a+\frac{n}{m}d}{d}\right) - R\left(\frac{a}{d}\right),$$

und hieraus, da diese Gleichung aus (1.) abgeleitet wurde:

$$11. \quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}}{\left(a+\frac{n}{m}d\right)^{\alpha|d}}.$$

Nach (8. u. 11.) kann unter den angeführten Verhältnissen

$$\frac{a^{\alpha|d}}{\left(a+\frac{n}{m}d\right)^{\alpha|d}} \quad \text{für} \quad \frac{a^{\alpha|d}(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}}{\left(a+\frac{n}{m}d\right)^{\alpha|d}}$$

gesetzt und daher die Gleichung (2.) immer angewendet, also auch der Factor $(a+\alpha d)^{\frac{n}{m}}$ vernachlässigt werden.

Geht man auf die Grundgleichung zurück, aus welcher (1.) und die übrigen hier erlangten Resultate abgeleitet wurden, so ist sie in ihrer Allgemeinheit:

$$a^{x+r|d} = a^{r+x|d}$$

und in der speciell hier vorliegenden Gestalt:

$$a^{\frac{n}{m}+r|d} = a^{r+\frac{n}{m}|d}.$$

Sie enthält folgendes Gesetz:

12. In jeder Facultät, welche zwei gesonderte Exponenten hat, können die Exponenten willkürlich unter sich versetzt werden.

Man kann daher die Rechnungen, welche der eine Exponent vorschreibt, zuerst ausführen, und dann diejenigen folgen lassen, welche der andere verlangt; oder umgekehrt. Die veränderte Ausführung der Rechnungen hat auf das Ergebniss keinen Einfluss. Der Satz (12.) gilt sogar noch, wenn der eine Exponent unendlich gross ist, also die Ausführung einer unendlichen Anzahl von Operationen verlangt, und es ist

$$13. \quad a^{x+\alpha|d} = a^{\alpha+x|d};$$

was auch x bedeuten mag. Ist x ein Bruch, so entstehen die hier betrachteten Ausdrücke.

Hieraus folgt, dass man bei einer Facultät eine endliche Zahl von Operationen mit einer unendlichen (nie endenden) Zahl in Verbindung bringen, und in der Ausführung willkürlich verfahren kann. Man kann daher mit Ausführung der endlichen Zahl von Operationen beginnen und die unendliche Zahl folgen lassen, und umgekehrt, mit der unendlichen beginnen, und darauf die Zahl der endlichen folgen lassen. Im letzten Falle heisst dies so viel als die Zahl der endlichen Operationen *nie* ausführen. Sie können also auch vernachlässigt werden, wenn die Ausführung der unendlichen Operationen vorausgeht. Dies ergiebt sich auch durch eine einfache Schlussfolgerung: denn eine Operation, die nach Beendigung unendlich viel anderer vorgenommen werden soll, ausführen, heisst so viel, als sie *nie* vornehmen. Hierdurch wird wiederholt der Satz

$$14. \quad a^{x|d} = \frac{a^{\alpha|d}}{(a+x)^{\alpha|d}} = \frac{a(a+d)(a+2d)\dots\dots}{(a+xd)(a+xd+d)(a+xd+2d)\dots\dots}$$

bewiesen; der also gültig ist, ob er gleich die Form, aus der er ursprünglich entstand, nicht beibehalten hat, sondern verstümmelt (um mich dieses Ausdrucks zu bedienen) ist, und ein Glied noch enthalten sollte, welches er nicht mehr enthält, weil es keine Bedeutung mehr für ihn hat.

So wie sich nun ein Quotient zweier unendlichen Factorenfolgen unter bestimmten Bedingungen auf eine Facultät mit gebrochenem Exponenten zurückbringen lässt: so lässt sich auch ein solcher Quotient in bestimmten Fällen auf eine Facultät mit ganzem Exponenten bringen. Das Gesetz, nach welchem dies möglich ist, findet sich in (14.).

Endlich lässt sich der Quotient zweier unendlichen Factorenfolgen in bestimmten Fällen auf den Quotienten zweier endlichen Facultäten bringen. Die Form, in welcher dies immer möglich sein wird, ist

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots.}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\ldots.}.$$

Es ist nämlich

$$\lg\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots.}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\ldots.} = \lg\frac{(n+1)^{a|1}}{(m+1)^{a|1}} = \lg(n+1)^{a|1} - \lg(m+1)^{n|1}.$$

Nun ist nach (5. §. 21.)

$$15.\quad \lg\frac{(n+1)^{a|1}}{(m+1)^{a|1}} = R(n+1+a) - R(n+1) - R(m+1+a) + R(m+1)$$
$$= R(m+1) - R(n+1).$$

Nach (5. §. 21.) ist auch

$$16.\quad \lg\frac{1^{m|1}}{1^{n|1}} = R(m+1) - R(1) - R(n+1) + R(1) = R(m+1) - R(n+1).$$

Aus (15. u. 16.) folgt, wenn man von den Logarithmen auf die Grundgrössen übergeht:

$$17.\quad \frac{1^{m|1}}{1^{n|1}} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots.}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\ldots.}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch auf folgende Weise entwickeln:

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\ldots.}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\ldots.} = \frac{1^{m|1}}{1^{n|1}}\cdot\frac{1^{n|1}(n+1)^{a|1}}{1^{m|1}(m+1)^{a|1}} = \frac{1^{m|1}}{1^{n|1}}\cdot\frac{1^{n+a|1}}{1^{m+a|1}}$$
$$= \frac{1^{m|1}}{1^{n|1}}\cdot\frac{1^{a|1}}{1^{a|1}} = \frac{1^{m|1}}{1^{n|1}}.$$

Die Gleichung (17.) gilt, wie leicht zu sehen, auch dann, wenn n und m gebrochene Zahlen sind; so wie, wenn m und n gleichzeitig negative Grössen sind. Für diesen Fall lässt sich jedoch eine veränderte Darstellung erlangen. Aus (17.) folgt für ein negatives m und n:

$$18.\quad \frac{1^{-m|1}}{1^{-n|1}} = \frac{(-n+1)(-n+2)\ldots.(-n+n-1)(-n+n).1.2.3.4\ldots.}{(-m+1)(-m+2)\ldots.(-m+m-1)(-m+m).1.2.3.4\ldots.}.$$

Nun ist

$$\frac{1^{-m|1}}{1^{-n|1}} = \frac{(-n+1)(-n+2)\ldots.(-2)(-1)(-n+n)}{(-m+1)(-m+2)\ldots.(-2)(-1)(-m+m)} = = \frac{(-1)^{n-1}\,1^{n-1|1}}{(-1)^{m-1}\,1^{m-1|1}},$$

folglich ist auch

$$19.\quad \frac{(-n+1)(-n+2)(-n+3)\ldots.}{(-m+1)(-m+2)(-m+3)\ldots.} = (-1)^{n-m}\frac{1^{n-1|1}}{1^{m-1|1}},$$

Für gebrochene negative Exponenten ist nach (16. §. 13.) immer

$$20. \quad \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{\frac{p}{q}|1}} = \frac{(-\frac{p}{q}+1)(-\frac{p}{q}+2)(-\frac{p}{q}+3)\ldots.}{(-\frac{n}{m}+1)(-\frac{n}{m}+2)(-\frac{n}{m}+3)\ldots.}.$$

Ist in (18.) nur n, oder nur m negativ, so wird der Werth der Gleichung entweder 0, oder unendlich gross. Die Sätze in (15. bis 20.) gelten nicht nur, wenn die Zunahme der Facultät die Einheit ist, sondern auch für jeden andern Werth der Zunahme. Jedoch ist zu bemerken, dass man bei Anwendung der in diesem Paragraph aufgestellten Sätze vorsichtig verfahren muss; namentlich wenn es auf die umgekehrten Schlüsse ankommt. In diesem Falle ist es immer sicherer, die Gleichung (1. oder 13.), welche volle Geltung hat, zum Grunde zu legen; wie sich dies sogleich im folgenden Paragraph zeigen wird.

§. 31.

In (§§. 21., 22., 23., 24. u. 28.) wurden verschiedene Arten angegeben, den Logarithmen einer Facultät auszudrücken. Die Sätze im vorigen Paragraph geben nun ein Mittel an die Hand, die in (§. 23.) und zum Theil auch die in (§. 24. u. 28.) gefundenen Formeln auf eine ungemein einfache Weise zu entwickeln. Zu dem Ende ist von der in (13. §. 30.) aufgestellten Gleichung auszugehen, welche immer für ein ganzes und gebrochenes, positives, so wie für ein gebrochenes negatives x gilt, in bestimmten Fällen aber für ein ganzes negatives x auf einen unendlich grossen Werth führt. Aus (13.) ist

$$1. \quad \lg a^{x|d} = \lg \frac{a^{\alpha|d}(a+\alpha d)^x}{(a+xd)^{\alpha|d}}.$$

Nun ist

$$1. \quad \lg(z+u) = \lg(z(1+\tfrac{u}{z})) = \lg z + \lg(1+\tfrac{u}{z}).$$

Werden nun sämmtliche Glieder des Nenners nach dieser Gleichung behandelt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\lg(a+xd) &= \lg a + \lg(1+\tfrac{xd}{a}),\\
\lg(a+d+xd) &= \lg(a+d) + \lg(1+\tfrac{xd}{a+d}),\\
\lg(a+2d+xd) &= \lg(a+2d) + \lg(1+\tfrac{xd}{a+2d})\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hiernach geht (1.) in folgende Gleichung über:

$$3.\quad \lg a^{x|d} = -\lg(1+\frac{xd}{a}) - \lg(1+\frac{xd}{a+d}) - \lg(1-\frac{xd}{a+2d}) \ldots + x\lg(a+\alpha d)$$

$$= \lg \frac{(a+\alpha d)^x}{(1+\frac{xd}{a})(1+\frac{xd}{a+d})(1+\frac{xd}{a+2d})(1+\frac{xd}{a+3d})\ldots}.$$

Werden hier die Glieder rechts, vom zweiten an, nach folgender Reihe entwickelt:

$$4.\quad \lg(1+\frac{u}{z}) = \frac{u}{z} - \frac{u^2}{2z^2} + \frac{u^3}{3z^3} - \frac{u^4}{4z^4} + \ldots,$$

so erhält man

$$\lg(1+\frac{xd}{a+d}) = \frac{xd}{a+d} - \frac{x^2d^2}{2(a+d)^2} + \frac{x^3d^3}{3(a+d)^3} - \frac{x^4d^4}{4(a+d)^4} + \ldots$$

$$\lg(1+\frac{xd}{a+2d}) = \frac{xd}{a+2d} - \frac{x^2d^2}{2(a+2d)^2} + \frac{x^3d^3}{3(a+2d)^3} - \frac{x^4d^4}{4(a+2d)^4} + \ldots$$

$$\lg(1+\frac{xd}{a+3d}) = \frac{xd}{a+3d} - \frac{x^2d^2}{2(a+3d)^2} + \frac{x^3d^3}{3(a+3d)^3} - \frac{x^4d^4}{4(a+3d)^4} + \ldots$$

. . . .

Ordnet man die hieraus entstehenden Reihen nach den Potenzen von xd, so erhält man für (3.) folgenden Ausdruck:

$$5.\quad \lg a^{x|d} = -\lg(1+\frac{xd}{a}) + x\lg(a+\alpha d)$$

$$-xd\left(\frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \frac{1}{a+4d} + \ldots\right)$$

$$+\frac{x^2d^2}{2}\left(\frac{1}{(a+d)^2} + \frac{1}{(a+2d)^2} + \frac{1}{(a+3d)^2} + \frac{1}{(a+4d)^2} + \ldots\right)$$

$$-\frac{x^3d^3}{2}\left(\frac{1}{(a+d)^3} + \frac{1}{(a+2d)^3} + \frac{1}{(a+3d)^3} + \frac{1}{(a+4d)^2} + \ldots\right).$$

. . . .

Nun ist in diesem Journal (16ter Bd. S. 138. §. 127.) gezeigt, dass

$$xd\left(\frac{1}{a+d} + \frac{1}{a+2d} + \frac{1}{a+3d} + \frac{1}{a+4d} + \ldots\right) = xd\left(\frac{1}{d}\lg a + \alpha d) + C - \frac{1}{a}\right)$$

ist. Wird dieser Werth in (5.) eingeführt, so ergiebt sich

$$6.\quad \lg a^{x|d} = -\lg(1+\frac{xd}{a}) - C - \frac{1}{a})dx$$

$$+\frac{x^2d^2}{2}\Sigma_1^\infty \frac{1}{(a+zd)^2} - \frac{x^3d^3}{3}\Sigma_1^\infty \frac{1}{(a+zd)^3} + \frac{x^4d^4}{4}\Sigma_1^\infty \frac{1}{(a+zd)^4} - \ldots$$

Setzt man hierin $d=a=1$, so findet sich aus (6.)

$$7.\quad \lg 1^{x|1} = -\lg(1+x) + (1-C)x + \frac{x^2}{2}\Sigma_1^\infty\frac{1}{z^2} - \frac{x^3}{3}\Sigma_1^\infty\frac{1}{z^3} + \frac{x^4}{4}\Sigma_1^\infty\frac{1}{z^4} - \ldots$$

Dies ist die in (8. §. 23.) gefundene Gleichung, die immer für ein ganzes und ein gebrochenes positives oder gebrochenes negatives x gilt.

Benutzt man die Gleichung (3.), so kann man die in (15. §. 22.) gegebene Formel noch anders umformen. Es ist nämlich

$$\lg m^9 - \lg (m+n)^{9|m} = -[\lg(1+\tfrac{n}{m}) + \lg(2+\tfrac{n}{m}) + \lg(3+\tfrac{n}{m}) \ldots + \lg(9+\tfrac{n}{m})]$$

Werden die hier erhaltenen Ausdrücke nach (4.) behandelt, so findet sich

$$\begin{aligned} -\lg \frac{(m+n)^{9|m}}{m^9} = &-\lg(1+\tfrac{n}{m}) \\ &-\lg 2 - [\tfrac{n}{2m} - \tfrac{n^2}{2.2^2m^2} + \tfrac{n^3}{3.2^3m^3} - \ldots] \\ &-\lg 3 - [\tfrac{n}{3m} - \tfrac{n^2}{2.3^2m^2} + \tfrac{n^3}{3.3^3m^3} - \ldots] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\lg 9 - [\tfrac{n}{9m} - \tfrac{n^2}{2.9^2m^2} + \tfrac{n^3}{3.9^3m^3} - \ldots]. \end{aligned}$$

Wird dies nach den Potenzen von $\frac{n}{m}$ geordnet, so ergiebt sich

$$9. \quad \begin{aligned} -\lg \frac{(m+n)^{9|m}}{m^9} = &-\lg(1+\tfrac{n}{m}) - \lg(2.3.4\ldots 9) \\ &-\tfrac{n}{m}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots \tfrac{1}{9}\right) \\ &+\tfrac{n^2}{2m^2}\left(\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\ldots \tfrac{1}{9^2}\right) \\ &-\tfrac{n^3}{3m^3}\left(\tfrac{1}{2^3}+\tfrac{1}{3^3}+\ldots \tfrac{1}{9^3}\right) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Um den Werth von $\lg \frac{(m+n)^{9|m}}{m^9}$ darzustellen, sind die Werthe von $\Sigma_2^9 \frac{1}{x^p}$ nöthig. Sie sind folgende, bis auf 21 Decimalstellen berechnet; noch die 21te Decimalstelle dürfte richtig sein. Die Vorzahlen bezeichnen die Buchstaben $D_1, D_2, D_3 \ldots$

$$10. \quad \begin{aligned} D_1 &= 1{,}828\,968\,253\,968\,253\,968\,253 \ldots \\ D_2 &= 0{,}539\,767\,731\,166\,540\,690\,350 \ldots \\ D_3 &= 0{,}196\,531\,985\,674\,193\,251\,668 \ldots \\ D_4 &= 0{,}081\,936\,583\,493\,756\,546\,785 \ldots \\ D_5 &= 0{,}036\,897\,341\,344\,693\,456\,035 \ldots \\ D_6 &= 0{,}017\,340\,512\,441\,431\,496\,134 \ldots \\ D_7 &= 0{,}008\,349\,054\,950\,157\,442\,411 \ldots \\ D_8 &= 0{,}004\,077\,336\,255\,262\,596\,260 \ldots \\ D_9 &= 0{,}002\,008\,391\,002\,408\,654\,508 \ldots \\ D_{10} &= 0{,}000\,994\,574\,958\,549\,472\,793 \ldots \end{aligned}$$

$D_{11} = 0{,}000\ 494\ 188\ 588\ 225\ 514\ 254 \ldots$
$D_{12} = 0{,}000\ 246\ 086\ 551\ 801\ 829\ 508 \ldots$
$D_{13} = 0{,}000\ 122\ 713\ 347\ 428\ 012\ 326 \ldots$
$D_{14} = 0{,}000\ 061\ 248\ 135\ 043\ 936\ 850 \ldots$
$D_{15} = 0{,}000\ 030\ 588\ 236\ 305\ 501\ 270 \ldots$
$D_{16} = 0{,}000\ 015\ 282\ 259\ 408\ 491\ 632 \ldots$
$D_{17} = 0{,}000\ 007\ 637\ 197\ 637\ 882\ 025 \ldots$
$D_{18} = 0{,}000\ 003\ 817\ 293\ 264\ 997\ 752 \ldots$

Vom 19ten Gliede an fallen diese Vorzahlen mit den in (§. 23.) für $\Sigma_2^\infty \frac{1}{x^p}$ angegebenen Werthen zusammen, wenn nicht mehr als 17 Stellen in Betracht kommen. Die mit den Gliedern D_2, D_3, D_4 .... verbundenen Divisoren 2, 3, 4, 5 .... können auch entfernt werden. Dies giebt

11. $E_2 = 0{,}269\ 883\ 865\ 583\ 270\ 345\ 175 \ldots$
$E_3 = 0{,}065\ 510\ 661\ 891\ 397\ 750\ 556 \ldots$
$E_4 = 0{,}020\ 484\ 145\ 873\ 439\ 136\ 696 \ldots$
$E_5 = 0{,}007\ 379\ 468\ 268\ 938\ 691\ 207 \ldots$
$E_6 = 0{,}002\ 890\ 085\ 406\ 905\ 249\ 355 \ldots$
$E_7 = 0{,}001\ 192\ 722\ 135\ 736\ 777\ 487 \ldots$
$E_8 = 0{,}000\ 509\ 667\ 031\ 907\ 824\ 532 \ldots$
$E_9 = 0{,}000\ 223\ 154\ 555\ 823\ 183\ 834 \ldots$
$E_{10} = 0{,}000\ 099\ 457\ 495\ 854\ 947\ 279 \ldots$
$E_{11} = 0{,}000\ 044\ 926\ 235\ 293\ 228\ 568 \ldots$
$E_{12} = 0{,}000\ 020\ 507\ 212\ 650\ 152\ 459 \ldots$
$E_{13} = 0{,}000\ 009\ 439\ 488\ 263\ 693\ 255 \ldots$
$E_{14} = 0{,}000\ 004\ 374\ 486\ 678\ 852\ 632 \ldots$
$E_{15} = 0{,}000\ 002\ 039\ 215\ 753\ 700\ 084 \ldots$
$E_{16} = 0{,}000\ 000\ 955\ 141\ 213\ 030\ 727 \ldots$
$E_{17} = 0{,}000\ 000\ 449\ 246\ 919\ 875\ 413 \ldots$
$E_{18} = 0{,}000\ 000\ 212\ 071\ 848\ 055\ 430 \ldots$

Die spätern, hieher gehörigen Werthe fallen ebenfalls mit denen in (§. 23.) zusammen. Der Werth des in (9.) vorkommenden Logarithmen ist

$$\lg(2.3.4\ldots.9) = \lg 362\ 880 = 12{,}801\ 827\ 480\ 081\ 469\ 611\ 207 \ldots$$

Demnach geht der Ausdruck (9.) in folgenden über:

$$12.\quad -\lg\frac{(10m+n)^{9|m}}{m^9} = -\lg\left(1+\frac{n}{m}\right) - \lg(2.3.4\ldots9) - E_1\frac{n}{m^2} + E_2\frac{n^2}{m^3} - E_3\frac{n^3}{m^4} + \ldots$$

Werden die gefundenen Werthe in (15. §. 22.) eingeführt und die Vorzahlen der Glieder der dortigen Reihe durch $A_0, A_1, A_2, A_3 \ldots$ bezeichnet, so erhält man

$$13.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = -\lg(1+\tfrac{n}{m}) + \frac{10m+n}{m}\lg(\frac{10m+n}{m}) - \tfrac{1}{2}\lg\frac{10m+n}{m} + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi - \lg 362880$$
$$-\frac{10m+n}{m} + A_0 - A_1\frac{n}{m} + A_2\frac{n^2}{m^2} - A_3\frac{n^3}{m^3} + A_4\frac{n^4}{m^4} - \ldots$$
$$-E_1\frac{n}{m} + E_2\frac{n^2}{m^2} - E_3\frac{n^3}{m^3} + E_4\frac{n^4}{m^4} - \ldots$$

Dieser Ausdruck, oder der (9.), ist gut benutzbar, wenn m eine etwas grössere Zahl im Verhältniss zu n ist, weil dann die Glieder der begleitenden Reihe schnell convergiren; oder wenn man die nöthigen Logarithmentafeln nicht zur Hand hat; oder auch, wenn die Logarithmen selbst nicht weiter darin angegeben sind. Sollte der Werth von $\lg(1+\frac{n}{m})$ ebenfalls durch eine Reihe dargestellt werden, so geschieht dies leicht, wenn die Vorzahlen in (10.) um die Einheit, oder in (11.) um $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ erhöht werden. Endlich kann man auch die Ausdrücke $(10+\frac{n}{m})\lg(10+\frac{n}{m}) - \frac{1}{2}\lg(10+\frac{n}{m})$ in (13.) auf die nämliche Weise wie in (3.) behandeln. Dies giebt

$$(10+\tfrac{n}{m})\lg(10+\tfrac{n}{m}) - \tfrac{1}{2}\lg(10+\tfrac{n}{m}) = 10\lg 10 + \frac{n}{m}\lg 10 - \tfrac{1}{2}\lg 10$$
$$+\frac{n}{m} - \frac{n^2}{2.10m^2} + \frac{n^3}{3.10^2m^3} - \frac{n^4}{4.10^3m^4} + \frac{n^5}{5.10^4m^5} - \ldots$$
$$+\frac{n^2}{10m^2} - \frac{n^3}{2.10^2m^2} + \frac{n^4}{3.10^3m^4} - \frac{n^5}{4.10^4m^5} + \ldots$$
$$-\frac{1}{2.10m} + \frac{n^2}{2.2.10^2m^2} - \frac{n^3}{2.3.10^3m^3} + \frac{n^4}{2.4.10^4m^4} - \frac{n^5}{2.5.10^5m^5} - \ldots$$

Wird dieser Ausdruck nach den Potenzen von $\frac{n}{m}$ geordnet und werden die nöthigen Reductionen gemacht, so ergiebt sich

$$14.\quad (10+\tfrac{n}{m})\lg(10+\tfrac{n}{m}) - \lg(10+\tfrac{n}{m}) = 10\lg 10 - \tfrac{1}{2}\lg 10$$
$$+(1 - \frac{1}{2.10} + \lg 10)\frac{n}{m}$$
$$+(\frac{1}{2.10} + \frac{1}{2.2.10^2})\frac{n^2}{m^2}$$
$$-(\frac{1}{2.3.10^2} + \frac{1}{2.3.10^3})\frac{n^3}{m^3}$$
$$+(\frac{1}{3.4.10^3} + \frac{1}{2.4.10^4})\frac{n^4}{m^4}$$
$$-(\frac{1}{4.5.10^4} + \frac{1}{2.5.10^5})\frac{n^5}{m^5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die in Klammern eingeschlossenen Grössen können nun auch in Decimalbrüchen dargestellt werden. Nennt man sie der Reihe nach F_1, F_2, F_3, ..., so ist

$$15.\quad \begin{aligned} F_1 &= 3{,}252\,585\,092\,994\,045\,684\,107\ \ldots\\ F_2 &= 0{,}052\,5\ \ldots\\ F_3 &= 0{,}001\,833\,3\ \ldots\\ F_4 &= 0{,}000\,095\,833\,3\ \ldots\\ F_5 &= 0{,}000\,006\ \ldots\\ F_6 &= 0{,}000\,000\,416\,66\ \ldots\\ F_7 &= 0{,}000\,000\,030\,952\,380\,952\,3\ \ldots\\ F_8 &= 0{,}000\,000\,002\,410\,714\,285\,714\,285\ \ldots \end{aligned}$$

Der Werth der hierher gehörigen Logarithmen ist

$$10\lg 10 - \tfrac{1}{2}\lg 10 = 21{,}874\,558\,383\,443\,433\,998\,17\ \ldots$$

Man sieht, dass auch die Glieder der Reihe (14.) schnell convergiren, und dass daher der Werth von (14.) leicht dargestellt werden kann. Nach Bedürfniss kann man sich daher der einen oder der andern, oder auch aller bisher aufgestellten Reihen gleichzeitig zur Berechnung des Logarithmen einer Facultät mit gebrochenem Exponenten bedienen. Immer wird man diese Logarithmen auf wenigstens sechzehn Decimalstellen mit Sicherheit anzugeben im Stande sein. Verbindet man sämmtliche bisher betrachteten Reihen mit einander, so ergiebt sich

$$16.\quad \begin{aligned} \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = &-\lg\left(1+\frac{n}{m}\right) - \lg 362\,880 + \tfrac{19}{2}\lg 10 + \tfrac{1}{2}\lg 2\pi - 10\\ &+ A_0 - (A_1 + 1 + E_1 - F_1)\frac{n}{m}\\ &+ (A_2 + E_2 + F_2)\frac{n^2}{m^2}\\ &- (A_3 + E_3 + F_3)\frac{n^3}{m^3}\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Zählt man endlich die Werthe $-\lg 362\,880 - 10 + \frac{19}{2}\lg 10 + \frac{1}{2}\lg 2\pi + A_0$ zusammen, so geht ihre Summe in 0 über und man hat

$$17.\quad \begin{aligned} \lg 1^{\frac{n}{m}|1} = &-\lg\left(1+\frac{n}{m}\right) - (A_1 + 1 + E_1 - F_1)\frac{n}{m}\\ &+ (A_2 + E_2 + F_3)\frac{n^2}{m^2}\\ &- (A_3 + E_3 + F_3)\frac{n^3}{m^3}\\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Vorzahlen der Potenzen von $\frac{n}{m}$ in dieser Reihe fallen mit den in (12. §. 23.) angegebenen Werthen von $\Sigma_2^{\infty}\frac{1}{x}$, $\frac{1}{2}\Sigma_2^{\infty}\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{3}\Sigma_2^{\infty}\frac{1}{x^3}$, ... zusammen; wie es auch sein muss. Hieraus ergiebt sich zugleich die Bestätigung der Richtigkeit der in (§. 22., 23.) und in diesem Paragraph aufgestellten Gleichungen; so wie derjenigen, welche aus jenen abgeleitet wurden.

Es lassen sich diese Bemerkungen auch auf die Gleichung (5. §. 28.) anwenden, und der Ausdruck $\lg\frac{(m-n)^{9|m}}{(m+n)^{9|m}}$ lässt sich auf die nämliche Art wie in (6.) entwickeln. Dies giebt

$$18.\quad \lg(2m-n)=\lg 2m-\frac{n}{2m}-\frac{n^2}{2.2^2m^2}-\frac{n^3}{3.2^3m^3}-\frac{n^4}{4.2^4m^4}-\dots$$
$$\lg(3m-n)=\lg 3m-\frac{n}{3m}-\frac{n^2}{2.3^2m^2}-\frac{n^3}{3.3^3m^3}-\frac{n^4}{4.3^4m^4}-\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lg(9m-n)=\lg 9m-\frac{n}{9m}-\frac{n^2}{2.9^2m^2}-\frac{n^3}{3.9^3m^3}-\frac{n^4}{4.9^4m^4}-\dots$$

$$19.\quad \lg(2m+n)=\lg 2m+\frac{n}{2m}-\frac{n^2}{2.2^2m^2}+\frac{n^3}{3.2^3m^3}-\frac{n^4}{4.2^4m^4}+\dots$$
$$\lg(3m+n)=\lg 3m+\frac{n}{3m}-\frac{n^2}{2.3^2m^2}+\frac{n^3}{3.3^3m^3}-\frac{n^4}{4.3^4m^4}+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lg(9m+n)=\lg 9m+\frac{n}{9m}-\frac{n^2}{2.9^2m^2}+\frac{n^3}{3.9^3m^3}-\frac{n^4}{4.9^4m^4}+\dots$$

Wird (19.) von (18.) abgezogen, so erhält man

$$20.\quad \lg.\frac{(2m-n)^{8|m}}{(2m+n)^{8|m}}=-\frac{n}{m}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots\frac{1}{9}\right)$$
$$-\frac{n^3}{3m^3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots\frac{1}{9^3}\right)$$
$$-\frac{n^5}{5m^5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\dots\frac{1}{9^5}\right)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Durch Benutzung dieser Formeln ergiebt sich aus (5. §. 28.):

$$21.\quad \lg 1^{\frac{n}{m}|1}=\tfrac{1}{2}\lg\frac{n\pi}{m\sin\frac{n}{m}\pi}+\tfrac{1}{2}\lg\frac{m-n}{m+n}+\frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m}-\frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m}$$
$$+\tfrac{1}{4}\lg\frac{10m-n}{10m+n}-(1+A_1)\frac{n}{m}-A_3\frac{n^3}{m^3}-A_5\frac{n^5}{m^5}-\dots$$
$$-E_1\frac{n}{m}-E_3\frac{n^3}{m^3}-E_5\frac{n^5}{m^5}-\dots$$

Die Benutzung der zweiten Reihe in (21.) zur Darstellung von $\frac{(2m-n)^{8|m}}{(2m+n)^{8|m}}$ wird sich in bestimmten Fällen mit Vortheil anwenden lassen. Die angegebene Methode kann endlich, wie leicht zu sehen, auch auf die Ausdrücke $\frac{10m+n}{2m}\lg\frac{10m+n}{m} - \frac{10m-n}{2m}\lg\frac{10m-n}{m} + \frac{1}{4}\lg\frac{10m-n}{10m+n}$ ausgedehnt werden. Die Summe dieser Ausdrücke (S) ist dann folgender Reihe gleich:

$$22. \quad S = + F_1\frac{n}{m} - F_3\frac{n^3}{m^3} - F_5\frac{n^5}{m^5} - F_7\frac{n^7}{m^7} - \ldots.$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass aus den hier gegebenen Entwicklungen eine Methode folgt, die Summe der reciproken Potenzen-Reihen in Decimalbrüchen auszudrücken. Man hat zu dem Ende die Vorzahlen von (17.) zusammenzuzählen.

§. 32.

Die bekannte Gleichung

$$1. \quad (a+b)^{n|d} = a^{n|d} + n.a^{n-1|d}b^{1|d} + (n)_2 a^{n-2|d}b^{2|d} + (n)_3 a^{n-3|d}b^{3|d} + \ldots.$$

welche zeigt, wie eine Facultät, deren Basis als zweitheilig betrachtet werden soll, in eine Reihe umgewandelt wird, deren Glieder nach den Facultäten der beiden Theile der Basis geordnet sind, ist zu mehreren nicht unwichtigen Anwendungen geeignet. Wird nämlich die Facultät $a^{n-x|d}$ in jedem Gliede rechts in

$$a^{n-x|d} = a^{n|d}(a+nd)^{-x|d} = \frac{a^{n|d}}{(a+(n-x)d)^{x|d}}$$

zerlegt, so geht die Gleichung (1.) in folgende über:

$$2. \quad \frac{(a+b)^{n|d}}{a^{n|d}} = 1 + n\frac{b}{a+(n-1)d} + (n)_2\frac{b^{2|d}}{(a+(n-2)d)^{2|d}} + (n)_3\frac{b^{3|d}}{(a+(n-3)d)^{3|d}} + \ldots.$$

oder in

$$3. \quad \frac{(a+b)^{n|d}}{a^{n|d}} = 1 + n\frac{b}{a+(n-1)d} + (n)_2\frac{b^{2|d}}{(a+(n-1)d)^{2|-d}} + (n)_3\frac{b^{3|d}}{(a+(n-1)d)^{3|-d}} + \ldots.$$

Setzt man nun $a-(n-1)d$ statt a in (3.), so geht die vorstehende Gleichung, in Rücksicht auf (50. §. 11.), über in:

$$4. \quad \frac{(a+b)^{n|-d}}{a^{n|d}} = 1 + n\frac{b}{a} + (n)_3\frac{b^{2|d}}{a^{2|-d}} + (n)_3\frac{b^{3|d}}{a^{3|-d}} + \ldots.$$

Wird $-b$ statt b in (3. u. 4.) gesetzt, so ergiebt sich nach (28. §. 11.) aus diesen beiden Gleichungen

$$5. \quad \frac{(a-b)^{n|d}}{a^{n|d}} = 1 - n\frac{b}{a+(n-1)d} + (n)_2\frac{b^{2|-d}}{(a+(n-1)d)^{2|-d}} - (n)_3\frac{b^{3|-d}}{(a+(n-1)d)^{3|-d}} + \ldots.$$

$$6. \quad \frac{(a-b)^{n|-d}}{a^{n|-d}} = 1 - n\frac{b}{a} + (n)_1\frac{b^{2|-d}}{a^{2|-d}} - (n)_3\frac{b^{3|-d}}{a^{3|-d}} + \ldots.$$

Wird $-d$ statt d in (3., 4., 5. u. 6.) gesetzt, so ergiebt sich

$$7.\quad \frac{(a+b)^{n|-d}}{a^{n|d}} = 1 + n\frac{b}{a-(n-1)d} + (n)^2\frac{b^{2|-d}}{(a+(n-1)d)^{2|-d}} + (n)_3\frac{b^{3|-d}}{(a-(n-1)d)^{3|d}} + \dots$$

$$8.\quad \frac{(a+b)^{n|d}}{a^{n|d}} = 1 + n\frac{b}{a} + (n)_2\frac{b^{2|-d}}{a^{2|-d}} + (n)_3\frac{b^{3|-d}}{a^{3|d}} + \dots$$

$$9.\quad \frac{(a-b)^{n|-d}}{a^{n|-d}} = 1 - n\frac{b}{a-(n-1)d} + (n)_2\frac{b^{2|d}}{(a-(n-1)d)^{2|d}} - (n)_3\frac{b^{3|d}}{(a-(n-1)d)^{3|d}} + \dots$$

$$10.\quad \frac{(a-b)^{n|d}}{a^{n|d}} = 1 - n\frac{b}{a} + (n)_2\frac{b^{2d}}{a^{2|d}} - (n)_3\frac{b^{3|d}}{a^{3|d}} + \dots$$

Wird in diese Ausdrücke $-n$ statt n gesetzt, so erhält man

$$11.\quad \frac{(a-d)^{n|-d}}{(a+b-d)^{n|-d}} = \frac{(a-nd)^{n|d}}{(a+b-nd)^{n|d}}$$
$$= 1 - n\frac{b}{a-(n+1)d} + [n]_2\frac{b^{2|d}}{(a-(n-1)d)^{2|-d}} - [n]_3\frac{b^{3|d}}{(a-(n+1)d)^{3|-d}} + \dots$$

$$12.\quad \frac{(a+d)^{n|d}}{(a+b+d)^{n|d}} = \frac{(a+nd)^{n|-d}}{(a+b+nd)^{n|-d}}$$
$$= 1 - n\frac{b}{a} + [n]_2\frac{b^{2|d}}{a^{2|-d}} - [n]_3\frac{b^{3|d}}{a^{3|-d}} + \dots$$

$$13.\quad \frac{(a-d)^{n|-d}}{(a-b-d)^{n|-d}} = \frac{(a-nd)^{n|d}}{(a-b-nd)^{n|d}}$$
$$= 1 + n\frac{b}{a-(n+1)d} + [n]_2\frac{b^{2|-d}}{(a-(n+1)d)^{2|-d}} + [n]_3\frac{b^{3|-d}}{(a-(n+1)d)^{3|-d}} + \dots$$

$$14.\quad \frac{(a+d)^{n|d}}{(a-b+d)^{n|d}} = \frac{(a+nd)^{n|-d}}{(a-b+nd)^{n|-d}}$$
$$= 1 + n\frac{b}{a} + [n]_2\frac{b^{2|-d}}{a^{2|-d}} + [n]_3\frac{b^{3-d}}{a^{3|-d}} + \dots$$

$$15.\quad \frac{(a+d)^{n|-d}}{(a+b+d)^{n|-d}} = \frac{(a+nd)^{n|d}}{(a+b+nd)^{n|d}}$$
$$= 1 - n\frac{b}{a+(n+1)d} + [n]_2\frac{b^{2|-d}}{(a+(n+1)d)^{2|+d}} - [n]_3\frac{b^{3|-d}}{(a+(n+1)d)^{3|d}} + \dots$$

$$16.\quad \frac{(a-d)^{n|-d}}{(a+b-d)^{n|-d}} = \frac{(a-nd)^{n|d}}{(a+b-nd)^{n|d}}$$
$$= 1 - n\frac{b}{a} + [n]_2\frac{b^{2|-d}}{a^{2|d}} - [n]_3\frac{b^{3|-d}}{a^{3|d}} + \dots$$

$$17.\quad \frac{(a+d)^{n|d}}{(a-b+d)^{n|d}} = \frac{(a+nd)^{n|-d}}{(a-b+nd)^{n|-d}}$$
$$= 1 - n\frac{b}{(a+(n-1)d)} + [n]_2\frac{b^{2|d}}{(a+(n+1)d)^{2|d}} - [n]_3\frac{b^{3|d}}{(a+(n+1)d)^{3|d}} + \dots$$

$$18.\quad \frac{(a-d)^{n|-d}}{(a-b-d)^{n|-d}} = \frac{(a-nd)^{n|d}}{(a-b-nd)^{n|d}}$$
$$= 1 - n\frac{b}{a} + [n]_2\frac{b^{2|d}}{a^{2|d}} - [n]_3\frac{b^{3|d}}{a^{3|d}} + \dots$$

Aus diesen Formeln lassen sich eine Menge anderer ableiten. Die Gleichungen (4., 6., 10., 12., 14., 16., 18.) hat schon *Kramp* gegeben. Sie bilden die Grundlage der hypergeometrischen Reihe, welche daraus, wie leicht zu sehen, abgeleitet ist; mit dem Unterschiede, dass in jener noch eine weitere veränderliche Grösse (x) enthalten ist. Setzt man in (6.) $a = b - d$, so wird

$$19.\quad (-1)^n \frac{d^{n|d}}{(b-d)^{n|-d}} = 1 - n\frac{b}{b-d} + (n)_2 \frac{b^{2|-d}}{(b-d)^{2|-d}} - (n)_3 \frac{b^{3|-d}}{(b-d)^{3|-d}} + \ldots.$$

oder

$$20.\quad (-1)^n \frac{d^{n|d}}{b^{n+1|-d}} = \frac{1}{b} - n.\frac{1}{b-d} + (n)_2 \frac{1}{b-2d} - (n)_3 \frac{1}{b-3d} + (n)_4 \frac{1}{b-4d} - \ldots.$$

Wird hierin $-d$ statt d, oder, was dasselbe ist, $a = b + d$ in (10.) gesetzt, so erhält man

$$21.\quad \frac{d^{n|d}}{b^{n+1|d}} = \frac{1}{b} - \frac{n}{b+d} + \frac{n(n-1)}{1.2.(b+2d)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.(b+3d)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.(b+4d)} - \ldots$$

Setzt man $b - rd$ statt a in (5.), so ergiebt sich

$$22.\quad \frac{(-rd)^{n|-d}}{(b-rd)^{n|-d}} = 1 - n\frac{b}{b-rd} + (n)_2 \frac{b(b-d)}{(b-rd)(b-(r+1)d)}$$
$$- (n)_3 \frac{b(b-d)(b-2d)}{(b-rd)(b-(r+1)d)(b-(r+2)d)} + \ldots.$$

Wird auf beiden Seiten durch $b^{r|-d} = b(b-d)(b-2d) \ldots. (b-(r-1)d)$ dividirt, so erhält man

$$23.\quad \frac{(-rd)^{n|-d}}{b^{r+n|-d}} = \frac{1}{b^{r|-d}} - \frac{n}{(b-d)^{r|-d}} + \frac{n(n-1)}{1.2.(b-2d)^{r|-d}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.(b-2d)^{r|-d}} + \ldots.$$

Wird hierin $-d$ statt d gesetzt, so findet sich

$$24.\quad \frac{d^n 1^{n|1}}{b^{n+r|d}} = \frac{1}{b^{r|d}} - n\frac{1}{(b+d)^{r|d}} + (n)_2 \frac{1}{(b+2d)^{r|d}} - (n)_3 \frac{1}{(b+3d)^{r|d}} + (n)_4 \frac{1}{(b+4d)^{r|d}} + \ldots.$$

Die Gleichungen (20. u. 21.) sind besondere Fälle der Gleichungen (23. u. 24.). Die Gleichung (24.) lässt sich jedoch noch umformen. Wird nämlich die Facultät $b^{n+r|d}$ nach (13. §. 11.) behandelt, so ergiebt sich

$$25.\quad \frac{d^n . r^{n|1}}{b^{n+r|d}} = \frac{1^{\frac{b}{d}-1|1} . r^{n|1}}{d^r . 1^{\frac{b}{d}+n+r-1|1}} = \frac{1^{\frac{b}{d}-1|1} . 1^{r+n-1|1}}{d^r . 1^{r-1|1}\, 1^{\frac{b}{d}+n+r-1|1}} = \frac{1^{\frac{b}{d}-1|1}}{d^r . 1^{r-1|1} (r+n)^{\frac{b}{d}|1}}$$
$$= \frac{1^{\frac{b}{d}|1}}{d^{r-1} . 1^{r-1|1} . b(r+n)^{\frac{b}{d}|1}}.$$

Hiernach lässt sich der Ausdruck (24.) mit Facultäten vergleichen, welche gebrochene Exponenten haben, und man erhält aus (24. u. 25.)

$$26. \quad \frac{1^{\frac{b}{d}|1}}{d^{r-1}.1^{r-1|1}.b(r+n)^{\frac{b}{d}|1}} = \frac{1}{b^{r|d}} - n\frac{1}{(b+d)^{r|d}} + (n)_2\frac{1}{(b+2d)^{r|d}} - (n)_3\frac{1}{(b+3d)^{r|d}} + \dots$$

und hieraus

$$27. \quad \frac{1^{\frac{b}{d}|1}}{d^{r-1}1^{r-1|1}b} = (r+n)^{\frac{b}{d}|1}\left(\frac{1}{b^{r|d}} - n\frac{1}{(b+d)^{r|d}} + (n)_2\frac{1}{(b+2d)^{r|d}} - (n)_3\frac{1}{(b+3d)^{r|d}} + \dots\right)$$

$$28. \quad \frac{1^{\frac{b}{b}|1}}{(-1)^{r-1}d^{r-1}.1^{r-1|1}.b} = (r+n)^{\frac{b}{d}|1}\left(\frac{1}{b^{r|-d}} - n\frac{1}{(b-d)^{r|-d}} + (n)_2\frac{1}{(b-2d)^{r|-d}}\right.$$
$$\left. - (n)_3\frac{1}{(b-3d)^{r|-d}} + \dots\right)$$

Die beiden Reihen (27. u. 28.) haben die merkwürdige Eigenschaft, dass der Werth rechts vom Gleichheitszeichen sich nicht ändert, wie sich auch n ändern möge. Die Reihe rechts behält daher für alle Werthe von n einen und denselben Werth. Setzt man nun n unendlich gross, so gehen die Facultäten von n in *Potenzen* über. Dieser Uebergang soll durch $n = \alpha$ angedeutet werden. Demnach ist aus (27.)

$$29. \quad \frac{1^{\frac{b}{d}|1}}{d^{r-1}b.1^{r-1|1}} = \alpha^{\frac{b}{d}}\left(\frac{1}{b^{r|d}} - \frac{\alpha}{(b+d)^{r|d}} + \frac{\alpha^2}{1^{2|1}(b+2d)^{r|d}} - \frac{\alpha^3}{1^{3|1}(b+3d)^{r|d}} + \dots\right)$$

Wird unter dieser Bedingung α durch x^d dargestellt, so hat man aus (27. u. 28.)

$$30. \quad \frac{1^{\frac{b}{d}|1}}{d^{r-1}.b.1^{r-1|1}} = \frac{x^b}{b^{r|d}} - \frac{x^{b+d}}{(b+d)^{r|d}} + \frac{x^{b+2d}}{1^{2|1}(b+2d)^{2|d}} - \frac{x^{b+3d}}{1^{3|1}(b+3d)^{3|d}} + \dots$$

$$31. \quad \frac{1^{\frac{b}{-d}|1}}{(-1)^{r-1}d^{r-1}b.1^{r-1|1}} = \frac{x^b}{b^{r|-d}} - \frac{x^{b-d}}{(b-d)^{r|-d}} + \frac{x^{b-2d}}{1^{2|1}(b-2d)^{r|-d}} - \frac{x^{b-3d}}{1^{3|1}(b-3d)^{r|-d}} + \dots$$

Die Gleichungen (30. u. 31.) dienen dazu, den Werth der vorstehenden Reihen für den Fall, wo x unendlich gross wird, durch endliche Grössen auszudrücken. Die frühern Reihen gelten alle von endlichen Werthen. Diese Gleichungen lassen viele Anwendungen zu. Wird in (24.) n negativ gesetzt, so wird die Zahl der Glieder unendlich gross, und man erhält

$$32. \quad \frac{1^{-n|1}}{d^n b^{r-n|d}} = \frac{1}{b^{r|d}} + \frac{n}{(b+d)^{r|d}} + \frac{n(n+1)}{1.2.(b+2d)^{r|d}} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.(b+3d)^{r|d}} + \dots$$

Diese Gleichung giebt immer reelle Werthe, so lange $r > n$ ist. Es ist

$$33. \quad 1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots$$
$$\frac{1}{2.1.2} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \dots$$
$$\frac{1}{3.1.2.3} = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \dots$$

u. s. w. Setzt man in (24.) $r = 1$ und nimmt (25.) zu Hülfe, so findet sich

$$\frac{d^n . 1^{n|1}}{b^{n+1|d}} = \frac{1}{b} - \frac{n}{b+d} + (n)_2 \frac{1}{b+2d} - (n)_3 \frac{1}{b+3d} + \dots$$
$$= \frac{1^{\frac{b}{d}|1}}{b(1+n)^{\frac{b}{d}|1}} = \frac{1^{\frac{b}{d}|1} . 1^{n|1}}{b . 1^{n+\frac{b}{d}|1}}.$$

Setzt man hierin ferner $\frac{n}{m}$ statt n, so wird

$$34.\quad \frac{1^{\frac{b}{d}|1} . 1^{\frac{n}{m}|1}}{b . 1^{\frac{b}{d}+\frac{n}{m}|1}} = \frac{1}{b} - \frac{n}{m(b+d)} + \frac{n^{2|-m}}{1.2.(b+2d)m^2} - \frac{n^{3|-m}}{1.2.3.(b+3d)m^3} + \dots.$$

Werden in dieser Formel die Werthe $\frac{n}{m}$ und $\frac{b}{d}$ vertauscht, also b statt n, d statt m und umgekehrt gesetzt, so geht (34.) über in

$$35.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}|1} . 1^{\frac{b}{d}|1}}{n . 1^{\frac{n}{m}+\frac{b}{d}|1}} = \frac{1}{n} - \frac{b}{d(n+m)} + \frac{b(b-d)}{1.2.(n+2m)d^2} - \frac{b(b-d)(b-2d)}{1.2.3.(n+3m)d^3} + \dots.$$

Aus (37. u. 38.) erhält man folgende merkwürdige Beziehung:

$$36.\quad b\left[\frac{1}{b} - \frac{n}{m(b+d)} + \frac{n(n-m)}{1.2.m^2(b+d)} - \frac{n(n-m)(n-3m)}{1.2.3.m^3(b+3d)} + \dots\right]$$
$$= n\left[\frac{1}{n} - \frac{d}{d(n+m)} + \frac{b(b-d)}{1.2.d^2(n+2m)} - \frac{b(b-d)(b-2d)}{1.2.3.d^3(n+3m)} + \dots\right]$$

Man sieht, dass sich in diesen Reihen die Grössen $\frac{b}{d}$ und $\frac{n}{m}$ vertauschen lassen, und dass bei diesem Tausche die erhaltenen Werthe sich gleich bleiben.

(Die Fortsetzung folgt.)

12.

Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités.

(Extrait d'un memoire russe sur l'analyse élémentaire de la théorie des probabilités.)

(Par Mr. *P. Tchebichef* à Moscou.)

---

§. 1. La proposition, dont la demonstration sera l'objet de cette note, est la suivante:

„On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne „une probabilité, aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, et que „le rapport du nombre de répétitions de l'événement E à celui des épreuves „ne s'ecartera pas de la moyenne des chances de E au delà des limites don-„nées, quelques resserées que soient ces limites."

Cette proposition fondamentale de la théorie des probabilités, contenant comme cas particulier la loi de *Jacques Bernoulli*, est déduite par Mr. *Poisson* d'une formule, qu'il obtient en calculant approximativement la valeur d'une intégrale definie, assez compliquée. (V. Recherches sur les probabilités des jugements, chap. IV.) Toute ingénieuse que soit la méthode employée par le celèbre Géometre, il reste à être impossible de montrer la limite de l'erreur que peut admettre son analyse approximative, et par cette incertitude de la valeur de l'erreur, sa demonstration n'est pas rigoureuse. Je vais montrer ici, comment on peut démontrer rigoureusement cette proposition par des considérations tout à fait élémentaires.

§. 2. Supposons que $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$ soient les chances de l'événement E dans μ épreuves consécutives, P_m la probabilité que E arrivera au moins m fois dans ces μ épreuves. On parviendra, comme on sait, a l'expression de P_m en dévéloppant le produit

$$(p_1 t+1-p_1)(p_2 t+1-p_2)(p_3 t+1-p_3)\ldots(p_\mu t+1-p_\mu)$$

suivant les puissances de t et prenant la somme des coefficients de t^m, t^{m+1}, ... t^μ. De là résultent évidemment ces deux propriétés de P_m: 1) Cette quantité ne contient point de degré de $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$ plus haut que l'unité; 2) Elle est une fonction symétrique par rapport à $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$. En vertu de

la première propriété P_m pourra être mise sous la forme $U + Vp_1 + V_1 p_2 + Wp_1 p_2$, où U, V, V_1, W sont independantes de p_1 et p_2; en vertu de la seconde, V et V_1 sont égales. Donc la forme de l'expression P_m est $U+V(p_1+p_2) + Wp_1 p_2$; où U, V, W ne contiennent ni p_1 ni p_2. D'après cela il est facile de prouver sur l'expression P_m le théorême suivant:

Théorème. „Si p_1, p_2 ne sont pas égaux, on peut, sans changer les „valeurs de $p_1 + p_2, p_3, \ldots p_\mu$, augmenter celle de P_m en prenant $p_1 = p_2$; „ou on peut parvenir à une des équations suivantes: $p_1 = 0$, $p_1 = 1$, sans di„minuer la valeur de P_m."

Demonstration. Nous avons vu que l'expression de P_m peut être mise sous la forme $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1 p_2$; ou U, V, W sont independantes de p_1 et p_2. Or la formule $U + V(p_1 + p_2) + Wp_1 p_2$ présente toujours un des trois cas: $W > 0$, $W = 0$, $W < 0$.

Dans le premier cas la somme $p_1 + p_2$ reste la même, et la valeur de P_m augmente de $\frac{1}{4}W(p_1 - p_2)^2$, quand on change p_1, p_2 en $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$; car la difference

$$U + V[\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)+\tfrac{1}{2}(p_1+p_2)] + W\tfrac{1}{2}(p_1+p_2).\tfrac{1}{2}(p_1+p_2) - \{U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2\}$$

se reduit à $\frac{1}{4}W(p_1 - p_2)^2$.

Dans les deux derniers cas on ne changera pas la valeur de la somme $p_1 + p_2$ et on ne diminuera pas celle de $U + V(p_1+p_2) + Wp_1p_2$, en changeant p_1, p_2 en $0, p_1 + p_2$ ou en $1, p_1 + p_2 - 1$; car

$$U + V[0+p_1+p_2] + W.0.(p_1+p_2) - \{U + V(p_1+p_2) + Wp_1p_2\} = -Wp_1p_2;$$

$$U + W[1+p_1+p_2-1] + W.1.(p_1+p_2-1) - \{U+V(p_1+p_2)+Wp_1p_2\} = -W(1-p_1)(1-p_2).$$

Mais les premières de ces valeurs de p_1, p_2 pourront être admises toutes les fois que $p_1 + p_2$ ne surpasse pas 1; car elles sont alors positives et ne surpassent point l'unité; dans le cas contraire où $p_1 + p_2 > 1$, on pourra changer p_1 en 1, p_2 en $p_1 + p_2 - 1$, ce qui prouve le théorème énoncé. Le théorème nous conduit encore au suivant.

Théorème. „La plus grande valeur que P_m peut avoir dans le cas „où $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_\mu = S$, corespond aux valeurs $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$ don„nées par les équations

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ \ldots\ p_\varrho = 0,\ p_{\varrho+1} = 1,\ p_{\varrho+2} = 1,\ \ldots\ p_{\varrho+\sigma} = 1;$$

$$p_{\varrho+\sigma+1} = \frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma};\ p_{\varrho+\sigma+2} = \frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma};\ \ldots\ p_\mu = \frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma},$$

„où ϱ, σ designent certains nombres."

Démonstration. Supposons que $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots. \pi_\mu$ soit le système de valeurs de $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$ qui, verifiant l'équation $p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu=S$ donnent la plus grande valeur à P_m et renferment en même temps le plus grand nombre possible de valeurs égales à 1 et 0 sous ces conditions. Soyent d'ailleurs $\pi_1, \pi_2, \ldots. \pi_\varrho$ celles parmi les quantités $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots. \pi_\mu$ qui sont égales à 0; $\pi_{\varrho+1}, \pi_{\varrho+2}, \ldots. \pi_{\varrho+\sigma}$ celles qui sont égales à l'unité; toutes les autres $\pi_{\varrho+\sigma+1}, \pi_{\varrho+\sigma+2}, \ldots. \pi_\mu$, étant suivant la supposition différentes de 0 et 1, doivent être égales entre elles; comme nous allons le prouver toute à l'heure.

En effet, si $\pi_{\varrho+\sigma+1}$ n'est pas égal à $\pi_{\varrho+\sigma+2}$, il est possible, d'après le théorème précédant, ou de rendre P_m plus grand, sans changer la somme $\pi_1+\pi_2+\ldots.+\pi_{\varrho+\sigma+1}+\pi_{\varrho+\sigma+2}+\ldots.+\pi_\mu$, en prenant $\pi_{\varrho+\sigma+1}=\pi_{\varrho+\sigma+2}$, ou de faire $\pi_{\varrho+\sigma+1}$ égal à 1 ou 0, sans diminuer la valeur de P_m. Mais le premier est contraire à la supposition que le système $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots. \pi_\mu$ donne la plus grande valeur à P_m sous la condition $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\ldots.+\pi_\mu=S$; le second est contraire à la supposition que de tous les systèmes qui ont cette propriété, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots. \pi_\mu$ est celui qui renferme le plus grand nombre de valeurs égales à 1 et 0. Donc il faut necessairement que

$$\pi_{\varrho+\sigma+1}=\pi_{\varrho+\sigma+2}=\ldots.=\pi_\mu.$$

Mais outres ces équations nous avons

$$\pi_1=0, \pi_2=0, \ldots \pi_\varrho=0, \pi_{\varrho+1}=1; \pi_{\varrho+2}=1, \ldots. \pi_{\varrho+\sigma}=1; \pi_1+\pi_2+\pi_3+\ldots.+\pi_\mu=S,$$

d'où resultent les équations du théorème proposé.

§. 3. Passont maintenant à la recherche des valeurs de l'expression de P_m, correspondantes à $p_1=0, p_2=0, \ldots. p_\varrho=1, p_{\varrho+1}=1, p_{\varrho+2}=1, \ldots. p_{\varrho+\sigma}=1, p_{\varrho+\sigma+1} = \frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, p_{\varrho+\sigma+2}=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, \ldots. p_\mu=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}$. De la remarque que nous avons faite par rapport à l'expression P_m, il suit que la valeur de P_m corespondante à $p_1=0, p_2=0, \ldots. p_\varrho=0, p_{\varrho+1}=1, p_{\varrho+2}=1, \ldots. p_{\varrho+\sigma}=1, p_{\varrho+\sigma+1} = \frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, p_{\varrho+\sigma+2}=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}, \ldots. p_\mu=\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}$ est la somme des coefficients de $t^m, t^{m-1}, \ldots. t^\mu$ dans le développement du produit $t^\sigma\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}t+\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-\varrho-\sigma}$, et parconsequent elle est égale à

$$\frac{1.2....\mu-\varrho-\sigma}{1.2....m-\sigma.1.2....m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho}\Big\{1+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}$$
$$+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho+1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\sigma}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho+1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\ldots.\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\Big\}.$$

Voilà l'expression qui, en consequence du thèorème précédent, pour certains nombres entiers positifs ϱ et σ, sera la limite supérieure de toutes les valeurs de P_m, dans le cas, où $p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu=S$.

En remarquant que la valeur de l'expression

$$1+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\sigma}+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho-1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}+\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma+1}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\,\frac{\mu-m-\varrho-1}{m-\sigma+2}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\ldots.\frac{1}{\mu-S-\varrho}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}$$

est plus petite que celle de

$$1+\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}+\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^2+\ldots.+\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}$$

qui est le devéloppement de

$$\frac{1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}}{1-\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}} \text{ ou de } \frac{(m-\sigma)(\mu-S-\varrho)}{(m-S)(\mu-\varrho-\sigma)}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}\right]$$

nous parvenons à ce théorème:

Théorème. „Pour certains nombres entiers et positifs ϱ et σ, la valeur „de l'expression $\frac{1.2....\mu-\varrho-\sigma}{1.2....m-\sigma.1.2....\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}$ „$.\frac{m-\sigma}{m-S}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}\right]$ surpasse la valeur P_m de la probabilité „que l'évenement E dans μ épreuves, ayant les chances $p_1, p_2, p_3\ldots. p_\mu$, ar-„rivera au moins m fois, où S est la somme $p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu$."

§. 4. Arrêtons nous au cas, où m surpasse $S+1$. Suivant le dernier théorème nous avons

$$P_m<\frac{1.2....\mu-\varrho-\sigma}{1.2....m-\sigma.1.2....\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}$$
$$.\frac{m-\sigma}{m-S}\left[1-\left(\frac{\mu-m-\varrho}{m-\sigma}\,\frac{S-\sigma}{\mu-S-\varrho}\right)^{\mu-m-\varrho}\right]$$

et à plus forte raison

$$1. \qquad P_m < \frac{1.2\ldots\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots m-\sigma . 1.2\ldots\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}\cdot\frac{m-\sigma}{m-S}.$$

Mais m étant plus grand que $S+1$, la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots m-\sigma.1.2\ldots\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}\cdot\frac{m-\sigma}{m-S}$ augmentera par la diminuation des nombres entiers positifs ϱ et σ. En effet, si nous divisons par cette expression la valeur qu'elle prend après le changement de σ en $\sigma-1$, nous trouvons pour leur rapport

$$\frac{\mu-\varrho-\sigma+1}{m-\sigma}\,\frac{(S-\sigma+1)^{m-\sigma+1}}{(S-\sigma)^{m-\sigma}}\,\frac{(\mu-\varrho-\sigma)^{\mu-\varrho-\sigma+1}}{(\mu-\varrho-\sigma+1)^{\mu-\varrho-\sigma}}, \text{ ou bien}$$

$$\frac{S-\sigma+1}{m-\sigma}\left(\frac{S-\sigma+1}{S-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-\varrho-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma+1}\right)^{\mu-\varrho-\sigma+1}$$

qui étant mis sous là forme $\frac{1}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}e^{-(m-\varrho)\lg(1-\frac{1}{S-\sigma+1})+(\mu-\tau-\sigma+1)\lg(1-\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma+1})}$ se reduit à

$$\frac{1}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}e^{\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}+\frac{1}{2}\left\{\frac{m-\sigma}{(S-\varrho+1)^2}-\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma+1}\right\}+\frac{1}{3}\left\{\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3}-\frac{1}{(\mu-\varrho-\sigma+1)^2}\right\}+\ldots}$$

Or cette valeur est évidemment plus grande que 1; car $\frac{1}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}e^{\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}$ est égal à $\frac{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}\right)^3+\ldots}{1+\frac{m-S+1}{S-\sigma+1}}$, et ceci surpasse l'unité, parceque, m étant plus grand que $S+1$ par supposition, $m-S-1$ est une valeur positive. Quant aux valeurs de $\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^2}-\frac{1}{\mu-\varrho-\sigma+1}$, $\frac{m-\sigma}{(S-\sigma+1)^3}-\frac{1}{(\mu-\varrho-\sigma+1)^2}$, ..., elles toutes sont positives; car par supposition, $m-\sigma$ surpassera $S-\sigma+1$, et $S-\sigma+1$ ne peut surpasser $\mu-\varrho-\sigma+1$; car sans cela $\frac{S-\sigma}{m-\varrho-\sigma}$, qui est la valeur de la probabilité (voyez §. 2.), serait plus grand que l'unité. Donc nous nous convaincrons qu'avec la diminuation de σ la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots\mu-\varrho-\sigma}{1.2\ldots m-\sigma.1.2\ldots\mu-m-\varrho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{\mu-S-\varrho}{\mu-\varrho-\sigma}\right)^{\mu-m-\varrho+1}$. $\frac{m-\sigma}{m-S}$ augmente. Le même a lieu par rapport à ϱ. Delà nous concluons pour $m > S+1$ que la valeur de l'expression

$$\frac{1.2\ldots\mu-\rho-\sigma}{1.2\ldots m-\sigma.1.2\ldots\mu-m-\rho}\left(\frac{S-\sigma}{\mu-\rho-\sigma}\right)^{m-\sigma}\left(\frac{m-S-\rho}{\mu-\rho-\sigma}\right)^{\mu-m-\rho+1}\cdot\frac{m-\sigma}{m-S},$$

dans l'inégalité (1), ne peut surpasser sa valeur corespondante à $\rho=0$, $\sigma=0$, qui est égale à $\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots\mu-m}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\cdot\frac{m}{m-S}$.

Nous pourrons donc par l'inégalité (1) conclure celle ci:

$$P_m<\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots\mu-m}\left(\frac{S}{\mu}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{m}\right)^{\mu-m}\cdot\frac{m}{m-S},$$

où m est supposé plus grand que $S+1$.

§. 5. Mais on sait, que la valeur du produit $1.2\ldots x-1.x$ est plus petite que $2{,}53\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}$ et plus grande que $2{,}50\,x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}$ *). Suivant

---

*) Voici comment on parvient très simplement à ce résultat.

En divisant respectivement les valeurs des expressions $\frac{1.2\ldots x-x.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}}$, $\frac{1.2\ldots(x-1)x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}$, correspondantes à $x=n+1$, par leurs valeurs, correspondantes à $x=n$, on trouve pour leur rapports $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.e^{-1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}$, $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.e^{-1}$, ce qui se reduit à $e^{(n+\frac{1}{2})\lg\frac{n}{n+1}-1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)}$, $e^{(n+\frac{1}{2})\lg\frac{n}{n+1}-1}$ et enfin à

$$e^{\left(\frac{1}{12}-\frac{3}{2.4.5}\right)\frac{1}{(n+1)^4}+\left(\frac{1}{12}-\frac{4}{2.5.6}\right)\frac{1}{(n+1)^5}+\ldots},\quad e^{-\frac{1}{12}\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{12}\frac{1}{(n+1)^3}-\ldots}$$

La première quantité étant plus grande que l'unité, la seconde plus petite, il est clair qu'en augmentant x, la valeur de $\frac{1.2\ldots x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}}$ augmentera aussi, et celle de $\frac{1.2\ldots x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}$ diminuera.

Donc pour toutes les valeurs de x, moindres que s, on aura

$$\frac{1.2\ldots x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}}<\frac{1.2\ldots s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s+\frac{1}{12s}}},\quad \frac{1.2\ldots x-1.x}{x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}}>\frac{1.2\ldots s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}$$

et par consequent

$$(A)\qquad 1.2\ldots x-1.x<Te^{-\frac{1}{12s}}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}},\qquad 1.2\ldots x-1.x>Tx^{x+\frac{1}{2}}e^{-x},$$

où T designe la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}$.

Mettons $s=\infty$ et nommons T_0 la valeur de $\frac{1.2\ldots s-1.s}{s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}}$ pour $s=\infty$, il suit de (A) que pour toutes les valeurs finies de x on aura

$$1.2\ldots x-1.x<T_0x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}},\qquad 1.2\ldots x-1.x>T_0x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x},$$

où T_0 est une constante.

En faisant dans ces inégalités $x=10$, on trouvera que S_0 est plus grand que 2,20 et plus petit que 2,53; par consequent les inégalités précédentes donnent

$$1.2\ldots x-1.x<2{,}53x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}},\qquad 1.2\ldots x-1.x>2{,}50x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}.$$

ceci la valeur de l'expression $\frac{1.2\ldots.\mu}{1.2\ldots.m.1.2\ldots.\mu-m}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m}\frac{m}{m-S}$ est plus petite que $\frac{2,53e^{\frac{1}{12\mu}}}{2,50^2}\cdot\frac{\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m}\cdot\frac{m}{m-S}$ et à plus forte raison plus petite que $\frac{\frac{1}{2}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{S-\mu}{\mu}\right)^{\mu-m}\cdot\frac{m}{m-S}$; car pour la plus grande valeur de $e^{\frac{1}{12\mu}}$, qui est $e^{\frac{1}{12}}$, le produit $\frac{2,50}{2,53^2}e^{\frac{1}{12\mu}}$ est encore plus petit que $\frac{1}{2}$. Donc on a suivant (2):

$$P_m < \frac{\frac{1}{2}\mu^{\mu+\frac{1}{2}}}{m^{m+\frac{1}{2}}(\mu-m)^{\mu-m+\frac{1}{2}}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu}\right)^{\mu-m+1}\cdot\frac{m}{m-S},$$

où, ce qui est le même:

$$P_m < \frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}.$$

Cette inégalité offre le théorème suivant:

Théorème. „Si les chances de l'événement E dans μ épreuves consé„cutives sont $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$, et que leur somme est S, la valeur de l'expres„sion $\frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{S}{\mu}\right)^m\left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}$ pour un m plus grand que $S+1$, „surpasse toujours la probabilité que E arrivera au moins m fois dans ces „μ épreuves."

En changeant $m, p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu, S$ en $\mu-n, 1-p_1, 1-p_2, 1-p_3, \ldots. 1-p_\mu, \mu-S$, il suit de ce théorème que si la somme $1-p_1+1-p_2+1-p_3+\ldots.+1-p_\mu$ est égale à $\mu-S$, la valeur de l'expression $\frac{1}{2(S-n)}\sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$ pour $\mu-n>\mu-S+1$ surpasse celle de la probabilité que l'événement contraire à E arrivera au moins $\mu-n$ fois dans μ épreuves, où $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$ sont les chances de E. En observant que les conditions

$$1-p_1+1-p_2+1-p_3+\ldots.+1-p_\mu=S-\mu;\quad \mu-n>\mu-S+1$$

se reduisent à

$$p_1+p_2+p_3+\ldots.+p_\mu=S,\quad n<S-1,$$

et que l'événement contraire à E n'arrive pas moins que $\mu-n$ fois dans μ épreuves, si E ne se présente dans ces épreuves plus de n fois, nous arrivons au théorème suivant:

Théorème. „Si les chances de l'événement E dans μ épreuves consé„cutives sont $p_1, p_2, p_3, \ldots. p_\mu$, et que leur somme est S_1, la valeur de l'ex-

„pression $\frac{1}{2(S-n)}\sqrt{\frac{n(\mu-n)}{m}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}$, pour un n plus petit que $S-1$, sur-
„passera toujours celle de la probabilité que E n'arrivera dans ces épreuves
„plus de n fois.

§. 6. Mais la répétition de l'événement E ne peut présenter qu'un de ces trois cas: ou l'événement reviendra au moins m fois, ou pas plus de n fois, ou enfin plus que n fois et moins que m fois. Donc la probabilité du dernier cas sera déterminée par la différence de l'unité et des probabilités de deux premiers. Donc, en consequence des deux derniers théorèmes, résulte le suivant:

Théorème. „Si les chances de l'événement E dans μ épreuves consé-
„cutives sont $p_1, p_2, p_3, \ldots p_\mu$, et que leur somme est S, la probabilité que
„le nombre de répétitions de l'événement E dans ces μ épreuves sera moins
„que m et plus grand que n, surpassera, pour un m plus grand que $S+1$ et pour un n plus petit que $S-1$, la valeur de l'expression

$$1-\frac{1}{2(m-S)}\sqrt{\frac{m(\mu-m)}{\mu}}\left(\frac{S}{m}\right)^{m}\left(\frac{\mu-S}{\mu-m}\right)^{\mu-m+1}-\frac{1}{2(S-n)}\sqrt{\frac{n(\mu-n)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-n}\right)^{\mu-n}\left(\frac{S}{n}\right)^{n+1}.$$

Pour déduire de ce théorème la proposition énoncée au commencement de la note, nous remarquons que le rapport du nombre des répétitions de l'événement E dans μ épreuves au nombre μ, n'atteint pas les limites $\frac{S}{\mu}+z$ et $\frac{S}{\mu}-z$, si E dans ces épreuves arrive moins que $S+\mu z$ fois et plus que $S-\mu z$ fois. Mais la probabilité que ceci a lieu, surpassera (d'après le dernier théorème) pour $z>\frac{1}{\mu}$, la valeur de l'expression

$$1-\frac{1}{2\mu z}\sqrt{\frac{(S+\mu z)(\mu-S-\mu z)}{\mu}}\left(\frac{S}{S+\mu z}\right)^{S+\mu z}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S-\mu z}\right)^{\mu-S-\mu z+1}$$
$$-\frac{1}{2\mu z}\sqrt{\frac{(S-\mu z)(\mu-S+\mu z)}{\mu}}\left(\frac{\mu-S}{\mu-S+\mu z}\right)^{\mu-S+\mu z}\left(\frac{S}{S-\mu z}\right)^{S-\mu z+1},$$

qui peut être mise sous la forme

$$2.\quad 1-\frac{1-p}{2z\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{p+z}{1-p-z}}\,H^{\mu}-\frac{p}{2z\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{1-p+z}{p-z}}\,H_1^{\mu}.$$

Fésant pour abréger $\frac{S}{\mu}=p$ et

$$3.\quad \left(\frac{p}{p+z}\right)^{p+z}\left(\frac{1-p}{1-p-z}\right)^{1-p-z}=H;\quad \left(\frac{1-p}{1-p-z}\right)^{1-p+z}\left(\frac{p}{p-z}\right)^{p-z}=H_1,$$

les équations (3.) nous donneront pour les logarithmes naturels de H, H_1 les series suivantes:

$$-\frac{z^2}{2p}\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{z}{p}\right)-\frac{z^4}{12p^3}\left(1-\tfrac{3}{5}\frac{z^4}{p}\right)-\ldots-\frac{z^2}{2(1-p)}-\frac{z^3}{6(1-p)^2}-\ldots \text{ et}$$

$$-\frac{z^2}{2p}-\frac{z^3}{6p^2}-\ldots-\frac{z^2}{2(1-p)}\left(1-\tfrac{1}{3}\frac{z}{1-p}\right)-\frac{z^4}{12(1-p)^2}\left(1-\tfrac{3}{5}\frac{z}{1-p}\right),$$

d'où il est clair que H, H_1 sont des valeurs plus petites que 1. Il suit delà que l'expression (2) s'approche indéfiniment de 1 par l'accroissement de μ, de manière qu'on rendra sa difference de 1 bien plus petite que Q, en prenant pour μ un nombre quelconque plus grand que

$$\frac{\lg\left[Q.\frac{z}{1-p}\sqrt{\frac{1-p-z}{p+z}}\right]}{\lg H} \quad \text{et} \quad \frac{\lg\left[Q.\frac{z}{p}\sqrt{\frac{p-z}{1-p+z}}\right]}{\lg H}.$$

Nous sommes dont parvenus à la demonstration rigoureuse de la proposition qui est l'objet de cette note.

13.

Note sur la variation des constantes arbitraires d'une intégrale définie.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

Si une intégrale définie, dont la valeur est connue, renferme, outre la variable de l'intégration, une ou plusieurs constantes arbitraires, chaque différentiation, faite suivante une quelconque de ces constantes, donnera la valeur d'une nouvelle intégrale, qu'on ne trouverait peut-être autrement que par des procédés assez compliqués. Soit pour fixer les idées:

$$\int_\alpha^\beta f(x, \theta)\,\partial\theta = u,$$

où θ est la variable de l'intégration et x une constante arbitraire. Alors la valeur u de l'intégrale, ne dépendra que des quantités α, β, x, et les différentiations consécutives par rapport à x, donneront

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial^n f(x, \theta)}{\partial x^n}\,\partial\theta = \frac{\partial^n u}{\partial x^n},$$

ou bien aussi, suivant une autre notation:

$$\int_\alpha^\beta D_x^n[f(x, \theta)]\,\partial\theta = D_x^n u.$$

Cette méthode offre un moyen très expéditif pour trouver des nouvelles intégrales, mais on ne connoit que très peu d'exemples de son application, parcequ'il est ordinairement difficile à effectuer les différentiations indiquées, aussitôt que les fonctions $f(x, \theta)$ et u ne sont pas bien simples. Or la difficulté de la différentiation se trouvera diminuée par les règles générales pour les dévéloppement des dérivées successives de plusieurs fonctions très générales que nous avons proposées dans le Cah. 1 tome 32 de ce journal. Donc, pour faire voir que ces règles peuvent être appliquées avec facilité à la théorie des intégrales définies, nous présenteront ici quelques exemples de la variation des constantes arbitraires, en fésant usage principalement des formules:

1. $$D^n f(x^2) = (2x)^n f^{(n)}(x^2) + 2.n_1(2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) + 3.4.n_4(2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) \\ + 4.5.6.n_6(2x)^{n-6} f^{(n-3)}(x^2) + \dots\dots$$

et

$$2.\quad D^n f(\sqrt{x})$$
$$=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{f^{(n)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^n}-\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{f^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\cdot\frac{f^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+2}}-\dots\right\}$$

qui aussi peuvent être vérifiées par l'induction de *Bernoulli*.

I.

1) A l'aide de la formule connue

$$\int\frac{\partial\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\text{ Arc tang}\left[\frac{(a-b)\tang\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\right]+\text{Const.},\quad a>b,$$

on obtient sans difficulté

$$3.\quad \int_0^\pi\frac{\partial\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}.$$

De là on tire, en différentiant n fois successivement suivant la constante a:

$$4.\quad (-1)^n 1.2\dots n\int_0^\pi\frac{\partial\theta}{(a+b\cos\theta)^{n+1}}=\pi D_a^n(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

La dérivée à droite se trouvera à l'aide de la formule (1) en y posant

$$f(z)=(z-b^2)^{-\frac{1}{2}},$$

ce qui donne

$$f^{(p)}(z)=\frac{(-1)^p.1.3.5\dots(2p-1)}{2^p}(z-b^2)^{-\frac{1}{2}-p}$$

et

$$f^{(p)}(x^2)=\frac{(-1)^p.1.3.5\dots(2p-1)}{2^p\sqrt{(x^2-b^2)}}\cdot\frac{1}{(x^2-b^2)^p}$$

et par conséquent, reduction faite:

$$D^n(x^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{(-1)^n.1.3.5\dots(2n-1)}{\sqrt{(x^2-b^2)}}\left\{\frac{x^n}{(x^2-b^2)^n}-\frac{2.n_2}{2(2n-1)}\cdot\frac{x^{n-2}}{(x^2-b^2)^{n-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{3.4.n_4}{2^2(2n-1)(2n+3)}\cdot\frac{x^{n-4}}{(x^2-b^2)^{n-2}}+\dots\right\}$$

En substituant ce résultat dans l'équation (4), et en posant a à la place de x, on obtient

$$\int_0^\pi\frac{\partial\theta}{(a+b\cos\theta)^{n+1}}=\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{1.2.2\dots n}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\left\{\frac{a^n}{(a^2-b^2)^n}-\frac{2.n_2}{2(2n-1)}\cdot\frac{a^{n-2}}{(a^2-b^2)^{n-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{3.4.n_4}{2^2(2n+1)(2n-3)}\cdot\frac{a^{n-4}}{(a^2-b^2)^{n-2}}-\dots\right\}.$$

Cette formule prend une forme élegante en fésant $a=1$, $b=\sin\lambda$, et pour abrèger

$$\frac{(q+1)(q+2)\dots(2q).n_{2q}}{2^q(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2q+1)}=A_{2q}.$$

Cela donne

$$5.\quad \int^{\pi}\frac{\partial\theta}{(1+\sin\lambda\cos\theta)^{n+1}}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2.3\ldots.n}\pi\{\sec^{2n+1}\lambda-A_2\sec^{2n-1}\lambda+A_4\sec^{2n-3}\lambda-\ldots.\}.$$

Une seconde formule peut être trouvée par un procédé analogue, en calculant la différentielle de l'équation (3) par rapport à b. On obtient d'abord

$$6.\quad (-1)^n.1.2\ldots.n\int_0^{\pi}\frac{\cos^n\theta\partial\theta}{(a+b\cos\theta)^{n+1}}=\pi D_b^n(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Puis à l'aide de la formule (1), et en supposant

$$f(z)=(a^2-z)^{-\frac{1}{2}},$$

on trouve

$$D^n(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots.(2n+1)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\left\{\frac{x^n}{(a^2-x^2)^n}+A_2\frac{x^{n-2}}{(a^2-x^2)^{n-1}}+A_4\frac{x^{n-4}}{(a^2-x^2)^{n-2}}+\ldots.\right\},$$

où l'on donnera aux lettres A_2, A_4, A_6 etc. les mêmes valeurs que dans la formule (5). Mettons encore b à la place de x, nous aurons suivant (No. 6)

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^n\theta\partial\theta}{(a+b\cos\theta)^{n+1}}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2.3\ldots.n}\cdot\frac{(-1)^n\pi}{(\sqrt{a^2-b^2})}\left\{\frac{b^n}{(a^2-b^2)^n}-A_2\frac{b^{n-2}}{(a^2-b^2)^{n-1}}+A_4\frac{b^{n-4}}{(a^2-b^2)^{n-2}}+\ldots\right\}$$

et en prenant $a=1$, $b=\sin\lambda$, on parviendra au résultat suivant:

$$7.\quad \int_0^{\pi}\frac{\cos^n\theta\partial\theta}{(1+\sin\lambda\cos\theta)^{n+1}}$$

$$=\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{1.2.3\ldots.n}\cdot\frac{(-1)^n\pi}{\sin^{n+1}\lambda}\{\text{tang}^{2n+1}\lambda+A_2\,\text{tang}^{2n-1}\lambda+A_4\,\text{tang}^{2n-3}\lambda+\ldots.\}.$$

2) Pour faire une autre application de la formule (1) nous partirons de la formule connue

$$\int_0^{\infty}e^{-\theta^2}\cos 2x\theta\partial\theta=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}.$$

En observant qu'on a toujours $\frac{\partial^n\cos u}{\partial u^n}=\cos(\frac{1}{2}n\pi+u)$ on obtient par la différentiation relative à x:

$$8.\quad 2^n\int_0^{\infty}\theta^n\cos(\tfrac{1}{2}n\pi+2x\theta)e^{-\theta^2}\partial\theta=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}D^ne^{-x^2}.$$

La dérivée à droite peut être tirée immediatement de la formule (1) en fésant

$$f(z)=e^{-z},$$

ce qui donne

$$f^{(p)}(z)=(-1)^pe^{-z},\qquad f^{(p)}(x^2)=(-1)^pe^{-x^2}$$

et par conséquent

$$D^n e^{-x^2} = (-1)^n \{(2x)^n - 2.n_2(2x)^{n-2} + 3.4.n_4(2x)^{n-4} - \dots\} e^{-x^2}$$

L'équation (8) se change maintenant par là en:

$$9. \quad \int_0^\infty \theta^n \cos(\tfrac{1}{2}n\pi + 2x\theta) e^{-\theta^2} \partial\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}((-1)^n \sqrt{\pi}) \left\{x^n - \frac{2.n_2}{2^2} x^{n-2} + \frac{3.4.n_4}{2^4} x^{n-4} - \dots\right\} e^{-x^2},$$

dont les cas speciaux ($n = 1, 2, \dots$) jouent un rôle dans la théorie des probabilités.

II.

1) Il existe beaucoup d'intégrales de la forme

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{\theta}{r^2+\theta^2} f(\theta) \partial\theta = \varphi(r),$$

où $\varphi(r)$ désigne une fonction qui ne contient r qu'à la première puissance. A l'aide de la formule (2) on trouvera aisément la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{(r^2+\theta^2)^{n+1}} f(\theta) \partial\theta$$

par le procédé suivant.

Mettons d'abord dans (10) $\sqrt{x}$ au lieu de r, nous aurons

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{x+\theta^2} f(\theta) \partial\theta = \varphi(\sqrt{x}),$$

et en différentiant n fois de suite par rapport à x,

$$(-1)^n.1.2.3 \dots n \int_0^\infty \frac{\theta}{(x+\theta^2)^{n+1}} f(\theta) \partial\theta = D^n \varphi(\sqrt{x}).$$

En dévéloppant la dérivée à droite suivant la formule (2), on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\theta}{(x+\theta^2)^{n+1}} f(\theta) \partial\theta = \frac{(-1)^n}{2^n.1.2 \dots n} \left\{ \frac{\varphi^{(n)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^n} - \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{\varphi^{(n+1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}} \right.$$
$$\left. + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4} \cdot \frac{\varphi^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+2}} - \dots \right\}$$

et en remettant $\sqrt{x} = r$,

$$11. \quad \int_0^\infty \frac{\theta}{(r^2+\theta^2)^{n+1}} f(\theta) \partial\theta =$$

$$\frac{(-1)^n}{1.2 \dots n(2r)^n} \left\{ \varphi^{(n)}(r) - \tfrac{1}{2}n(n-1) \cdot \frac{\varphi^{(n-1)}(r)}{r} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4} \cdot \frac{\varphi^{(n-2)}(r)}{r^2} - \dots \right\}.$$

Le cas le plus simple est $f(\theta) = \sin\theta$, ce qui donne $\varphi(r) = \tfrac{1}{2}\pi e^{-r}$, et par conséquent

$$12. \quad \int_0^\infty \frac{\theta \sin\theta\, \partial\theta}{(r^2+\theta^2)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{1.2\ldots.n(2r)^n}\left\{1 + \frac{n(n-1)}{2.r} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.r^2} + \ldots.\right\}e^{-r}.$$

2) La méthode que nous venons d'exposer peut être appliquée également à l'équation

$$13. \quad \int_0^\infty \frac{r}{r^2-\theta^2} f(\theta)\,\partial\theta = \varphi(r)$$

comprise dans la forme générale d'un grand nombre d'intégrales. En posant $r = \sqrt{x}$, elle se présente sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+\theta^2} f(\theta)\,\partial\theta = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Or en posant

$$\int \varphi(r)\,\partial r = \psi(r),$$

on en tire

$$\varphi(r) = \frac{\partial\psi(r)}{\partial r}, \qquad \varphi(\sqrt{x}) = \frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\partial x},$$

et par conséquent

$$\frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2\frac{\partial\psi(\sqrt{x})}{\partial x} = 2D\psi(\sqrt{x}).$$

On aura donc

$$\int_0^\infty \frac{1}{x+\theta^2} f(\theta)\,\partial\theta = 2D\psi(x)$$

et en fésant varier la constante x:

$$(-1)^n.1.2.3\ \ldots.\ n\int_0^\infty \frac{1}{(x+\theta^2)^{n+1}} f(\theta)\,\partial\theta = 2D^{n+1}\psi(\sqrt{x}).$$

En recourrant maintenant à la formule (2), on parviendra aisément à l'équation

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x+\theta^2)^{n-1}} f(\theta)\,\partial\theta = \frac{(-1)^n}{2^n.1.2\ldots.n}\left\{\frac{\psi^{(n+1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+1}} - \tfrac{1}{2}(n+1)n.\frac{\psi^{(n)}(\sqrt{x})}{\sqrt{x})^{n+2}}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}.\frac{\psi^{(n-1)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^{n+3}} - \ldots.\right\},$$

où bien à

$$\int_0^\infty \frac{1}{(r^2+\theta^2)^{n+1}} f(\theta)\,\partial\theta$$

$$\frac{(-1)^n}{2^n.1.2\ldots.n}\left\{\frac{\psi^{(n+1)}(r)}{r^{n+1}} - \tfrac{1}{2}(n+1)n.\frac{\psi^{(n)}(r)}{r^{n+2}} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}.\frac{\psi^{(n-1)}(r)}{r^{n+3}} - \ldots.\right\},$$

et en vertu des équations

$$\psi'(r) = \varphi(r),\ \psi''(r) = \varphi'(r),\ \ldots.\ \psi^{(n+1)}(r) = \varphi^{(n)}(r),$$

on aura enfin

$$14. \quad \int_0^\infty \frac{1}{(r^2+\theta^2)^{n+1}} f(\theta)\partial\theta =$$
$$\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n(2r)^n r}\left\{\varphi^{(n)}(r)-\tfrac{1}{2}n+1)n.\frac{\varphi^{(n-1)}(r)}{r}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4}.\frac{\varphi^{(n-2)}(r)}{r^2}-\ldots\right\}.$$

Cette formule donne, par exemple pour $f(\theta)=\cos\theta^2$ et $\varphi(r)=\frac{1}{2}\pi e^{-r}$:

$$15. \quad \int_0^\infty \frac{\cos\theta\,\partial\theta}{(r^2+\theta^2)^{n+1}}$$
$$=\frac{\pi}{1.2\ldots n(2r)^{n+1}}\left\{1+\frac{(n+1)n}{2.r}+\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4.r^2}+\ldots\right\}e^{-r}.$$

Les formules (12) et (15) coïncident avec celles que *Laplace* a obtenues en différentiant immédiatement les équations

$$\int_0^\infty \frac{\theta\sin\theta\,\partial\theta}{r^2+\theta^2}=\tfrac{1}{2}\pi e^{-r} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\cos\theta\,\partial\theta}{r^2+\theta^2}=\frac{\pi}{2r}e^{-r},$$

par rapport à r; ce qui est moins commode.

3) Etant proposé l'équation

$$16. \quad \int_0^\infty \frac{r^2}{r^2+\theta^2}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta=\varphi(r),$$

on en tire aisément une formule de réduction qui lie entre elles les intégrales

$$\int_0^\infty \frac{1}{(r^2+\theta^2)^{n+1}}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{1}{(r^2+\theta)^n}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta.$$

Car l'équation (16), en fésant $\sqrt{r}=x$, donne

$$x\int_0^\infty \frac{1}{x+\theta^2}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta=\varphi(\sqrt{x}),$$

et en y appliquant la formule connue

$$D^n(uv)=uD^nv+\frac{n}{1}Du.D^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{1.2}D^2u.D^{n-2}v+\ldots,$$

on trouve

$$xD_x^n\int_0^\infty \frac{1}{x+\theta^2}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta+nDx.D_x^{n-1}\int_0^\infty \frac{1}{x+\theta^2}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta=D^n\varphi(\sqrt{x}),$$

c'est à dire

$$x(-1)^n.1.2\ldots n\int_0^\infty \frac{1}{(x+\theta^2)^{n+1}}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta+n(-1)^{n-1}.1.2\ldots(n-1)\int_0^\infty \frac{1}{(x+\theta^2)^n}\cdot\frac{f(\theta)}{\theta}\partial\theta$$
$$=\frac{1}{(2\sqrt{x})^n}\varphi^{(n)}(\sqrt{x})-\tfrac{1}{2}n(n-1).\frac{\varphi^{(n-1)}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}.\frac{\varphi^{(n-2)}(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2}-\ldots\}.$$

En remettant la valeur de $\sqrt{x}$, on obtiendra la formule suivante de réduction:

$$17. \quad \int_0^\infty \frac{f(\theta)}{(r^2+\theta^2)^{n+1}}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}=\frac{1}{r^2}\int_0^\infty \frac{f(\theta)}{(r^2+\theta^2)^n}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}$$
$$+\frac{(-1)^n}{1.2\ldots n(2r)^n r^2}\left\{\varphi^{(n)}(r)-\tfrac{1}{2}n(n-1).\frac{\varphi^{(n-1)}(r)}{r}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}.\frac{\varphi^{(n-2)}(r)}{r^2}-\ldots\right\}.$$

Pour donner quelques exemples, soit d'abord $f(\theta)=\sin\theta$. Cela donne $\varphi(r)=\frac{1}{2}\pi(1-e^{-r})$, et en vertu de la formule générale:

$$18.\quad \int_0^\infty \frac{\sin\theta}{(r^2+\theta^2)^{n+1}}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}=\frac{1}{r^2}\int^\infty \frac{\sin\theta}{(r^2+\theta^2)^n}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}$$
$$+\frac{\pi}{1.2\ldots n(2r)^n 2r^2}\left\{1+\frac{n(n-1)}{2.r}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.r^2}+\ldots\right\}e^{-r}.$$

En fésant $f(\theta)=\text{Arc tang}\,\theta$, on a $\varphi(r)=\frac{1}{2}\pi l(1+r)$. Car soit

$$u=\int_0^\infty \frac{\text{Arc tang}\,r\omega}{1+\omega^2}\cdot\frac{\partial\omega}{\omega},$$

on aura

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\int_0^\infty \frac{\partial\omega}{(1+r^2\omega^2)(1-\omega^2)}=\frac{\frac{1}{2}\pi}{1+r},$$

et par conséquent

$$u=\int_0^\infty \frac{\text{Arc tang}\,r\omega}{1+\omega^2}\cdot\frac{\partial\omega}{\omega}=\tfrac{1}{2}\pi l(1+r),$$

où il n'y a pas à ajouter une constante, parceque les deux membres de l'équation évanouissent en même temps pour $r=0$. En posant $\omega=\frac{\theta}{r}$, on aura

$$r^2\int_0^\infty \frac{\text{Arc tang}\,\theta}{r^2+\theta^2}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}=\tfrac{1}{2}\pi l(1+r);$$

comme ci-dessus.

Maintenant on obtient après quelques réductions faciles:

$$19.\quad \int_0^\infty \frac{\text{Arc tang}\,\theta}{(r^2+\theta^2)^{n+1}}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}=\frac{1}{r^2}\int_0^\infty \frac{\text{Arc tang}\,\theta}{(r^2+\theta^2)^n}\cdot\frac{\partial\theta}{\theta}$$
$$-\frac{1}{nr^2(2r)^n(1+r)^n}\left\{1+\tfrac{1}{2}n\left(\frac{1+r}{r}\right)+\frac{n(n+1)}{2.4}\left(\frac{1+r}{r}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2.4.6\ldots(2n)}\left(\frac{1+r}{r}\right)^{n-1}\right\}.$$

4) Nous donnerons encore une autre application de la formule (2), très générale et fondée sur le théorème:

$$\int_0^\infty f\left(c\theta+\frac{a}{\theta}\right)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty f(2ac+\theta)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}},$$

qu'on obtient par la considération suivante.

Supposons d'abord qu'on ait à transformer l'intégrale définie

$$\int_0^\infty F\left[\left(cu-\frac{a}{u}\right)^2\right]\partial u,$$

où a et c sont des quantités positives et différentes de zéro. Comme on a identiquement

$$1=\frac{1}{2c}\left\{1+\frac{cu-\frac{a}{u}}{\sqrt{(4ac+(cu-\frac{a}{u})^2)}}\right\}(c+\frac{a}{u^2}),$$

l'intégrale proposée peut aussi être présentée sous la forme

$$\frac{1}{2c}\int_0^\infty F[(cu-\frac{a}{u})^2]\left\{1+\frac{cu-\frac{a}{u}}{\sqrt{(4ac+(cu-\frac{a}{u})^2)}}\right\}(c+\frac{a}{u^2})\partial u.$$

En fésant $cu-\frac{a}{u}=t$, on a $(c+\frac{u}{u^2})\partial u=\partial t$, et les limites de l'intégrale par rapport à t sont $t=\infty$ et $t=-\infty$, qui correspondent aux valeurs $u=\infty$ et $u=0$. En vertu de ces substitutions, l'intégrale se change en

$$\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^\infty F(t^2)\left\{1+\frac{t}{\sqrt{(4ac+t^2)}}\right\}\partial t$$
$$=\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^\infty F(t^2)\partial t+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^\infty F(t^2)\frac{t}{\sqrt{(4ac+t^2)}}\partial t.$$

Comme la fonction $F(t^2)$ reste la même pour des valeurs négatives ou positives, on obtient

$$\int_{-\infty}^\infty F(t^2)\partial t=\int_0^\infty F(t^2)\partial t,$$
$$\int_{-\infty}^0 F(t^2)\frac{t}{\sqrt{(4ac+t^2)}}\partial t=-\int_0^\infty F(t^2)\frac{t}{\sqrt{(4ac+t^2)}}\partial t,$$

et par conséquent

$$\int_{-\infty}^\infty F(t^2)\partial t=2\int_0^\infty F(t^2)\partial t,\quad \int_{-\infty}^\infty F(t^2)\frac{t}{\sqrt{(4ac+t^2)}}\partial t=0,$$

L'intégrale proposée se réduit donc a celle ci:

$$\frac{1}{c}\int_0^\infty F(t^2)\partial t=\int_0^\infty F(\theta)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}},$$

où l'on a supposé $t^2=0$. En comparant maintenant entre elles la première et la dernière forme de l'intégrale, on parvient à la relation

$$\int_0^\infty F[(cu-\frac{a}{u})^2]\partial u=\frac{1}{2c}\int_0^\infty F(\theta)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}}.$$

En substituant $F(\theta)=f(2ac+\theta)$, on obtient

$$F[cu-\frac{a}{u})^2]=f(2ac+(cu-\frac{a}{u})^2)=f(c^2u^2+\frac{a^2}{u^2})$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty f(c^2u^2 + \frac{a^2}{u^2})\partial u = \frac{1}{2\sqrt{c}}\int_0^\infty f(2ac + \theta)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}}.$$

En remplaçant a et c par $\sqrt{a}$ et $\sqrt{c}$ et fésant enfin $u^2 = \theta$, on parvient au théorème énoncé ci dessus:

$$20. \quad \int_0^\infty f(c\theta + \frac{a}{\theta})\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty f(2\sqrt{(ac)} + \theta)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}}; \quad a > 0,\ c > 0.$$

Comme ici l'expression à droite est moins compliquée que celle à gauche, l'équation trouvée peut servir de formule de réduction, et cette application de la formule devient encore plus féconde, en généralisant l'équation même par la variation des constantes.

En effet, la différentiation n fois répétée suivant la constante a, donne l'équation

$$21. \quad \int_0^\infty \frac{1}{\theta^n} f^{(n)}(c\theta + \frac{a}{\theta})\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_0^\infty D_a^n f(2\sqrt{(ac)} + \theta)\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}}.$$

De l'autre côté, en remplaçant $f(z)$ par $f(2\sqrt{c}\sqrt{z} + \theta)$, on trouve à l'aide de la formule (2):

$$D_x^n f(2\sqrt{c}\sqrt{x} + \theta) = \left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{1}{2}n}\Big\{f^{(n)}(2\sqrt{c}\sqrt{x} + \theta) - \tfrac{1}{2}n(n-1).\frac{f^{(n-1)}(2\sqrt{c}\sqrt{x} + \theta)}{2\sqrt{c}\sqrt{x}}$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}.\frac{f^{(n-2)}(2\sqrt{c}\sqrt{x} + \theta)}{(2\sqrt{c}\sqrt{x})^2} - \dots\Big\}.$$

Maintenant, en posant pour abrèger,

$$22. \quad \frac{(n+p-1)(n+p-2)\dots(n+1)n(n-1)\dots(n-p)}{2.4.6\dots(2p)} = Mp,$$

et mettant la valeur de $D_x^n f(2\sqrt{(xc)} + \theta)$ pour $x = a$ dans léquation (21), on obtient

$$\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+\frac{1}{2}}} f^{(n)}(c\theta + \frac{a}{\theta})\partial\theta$$
$$\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty \Big\{f^{(n)}(2\sqrt{(ac)} + \theta) - \frac{M_1}{2\sqrt{(ac)}}f^{(n-1)}(2\sqrt{(ac)} + \theta) + \dots\Big\}\frac{\partial\theta}{\sqrt{\theta}}.$$

L'intégration de chaque terme de la serie à droite, peut être effectuée en posant la valeur de l'intégrale

$$23. \quad \int_0^\infty \theta^{-\frac{1}{2}} f^{(n-q)}(2\sqrt{(ac)} + \theta)\partial\theta = I_{n-q}.$$

On obtient le résultat suivant assez remarquable:

$$24. \quad \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+\frac{1}{2}}} f^{(n)}(c\theta + \frac{a}{\theta})\partial\theta \qquad a > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}n} I_n - \frac{M_1}{2\sqrt{(ac)}} I_{n-1} + \frac{M^2}{(2\sqrt{(ac)})^2} I_{n-2} - \dots\Big\}. \qquad c > 0.$$

L'équation (20) pourroit être differentiée également suivant la constante c, mais on parvient plus facilement au résultat au moyen de l'équation que nous venons de trouver, en y remplaçant θ par $\frac{1}{\theta}$ et en échangeant les lettres a et c; ce qui ne change pas les valeurs des intégrales désignées par I. On obtient

$$24.\quad \int_0^\infty \theta^{n-\frac{1}{2}} f^{(n)}(c\theta+\frac{a}{\theta})\partial\theta$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}\{I_n-\frac{M_1}{2\sqrt{(ac)}}I_{n-1}+\frac{M_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}I_{n-2}-\ldots\},$$

et si on met $n+1$ à la place de n, et qu'on fasse pour abrèger

$$25.\quad \frac{(n+p)(n+p-1)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2.4.6\ldots(2p)}=N_p,$$

l'équation précédente prend la forme

$$\int_0^\infty \theta^{n-\frac{1}{2}} f^{(n+1)}(c\theta+\frac{a}{\theta})\partial\theta$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}(n+1)}\{I_{n+1}-\frac{N_1}{2\sqrt{(ac)}}I_n+\frac{N_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}I_{n-2}-\ldots\}.$$

Posant ici $f(z)=\int\varphi(z)\partial z$, on obtient $f^{(n+1)}(c\theta+\frac{a}{\theta})$ $=\varphi^{(n)}(c\theta+\frac{a}{\theta})$ et

$$I_{n+1-q}=\int\theta^{-\frac{1}{2}}\varphi^{(n-q)}(2\sqrt{(ac)}+\theta)\partial\theta$$

et écrivant f à la place de φ:

$$26.\quad \int_0^\infty \theta^{n-\frac{1}{2}} f^{(n)}(c\theta+\frac{a}{\theta})\partial\theta \qquad a>0$$
$$=\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}\{I_n-\frac{N_1}{2\sqrt{(ac)}}I_{n-1}+\frac{N_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}I_{n-2}-\ldots\}. \qquad c>0$$

Les formules (24 et 26) se prètent sans difficultés aux applications, toutes les fois qu'on puisse prendre la fonction $f(z)$ telle qu'il soit possible de trouver la valeur de I_{n-q} par les méthodes ordinaires. En voici quelques exemples.

Le cas le plus simple est

$$f(z)=e^{-z}.$$

Cela donne

$$f^{(n)}(c\theta+\frac{a}{\theta})=(-1)^n e^{-(c\theta+\frac{a}{\theta})}$$
$$I_{n-q}=(-1)^{n-q}\int_0^\infty\theta^{-\frac{1}{2}}e^{-(2\sqrt{(ac)}+\theta)}\partial\theta=(-1)^{n-q}\sqrt{\pi}\,e^{-2\sqrt{(ac)}},$$

et par conséquent, à l'aide de la formule (24.):

$$27. \quad \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{n+\frac{1}{2}}} e^{-(c\theta+\frac{a}{\theta})}\partial\theta$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}n}\left\{1+\frac{M_1}{2\sqrt{(ac)}}+\frac{M_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}+\dots\right\}e^{-2\sqrt{(ac)}}.$$

La formule (26) fournit l'équation analogue

$$28. \quad \int_0^\infty \theta^{n-\frac{1}{2}} e^{-(c\theta+\frac{a}{\theta})}\partial\theta$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{c}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}\left\{1+\frac{N_1}{2\sqrt{(ac)}}+\frac{N_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}+\dots\right\}e^{-2\sqrt{(ac)}}.$$

Le cas particulier $c=a$ est celui que Mr. *Cauchy* a traité par un procédé tout différent.

En supposant

$$f(z)=\frac{1}{(b+z)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

il s'offre un second exemple rémarquable. On obtient

$$f^{(n)}(c\theta+\frac{a}{\theta}=(-1)^n(\mu+\tfrac{1}{2})(\mu+\tfrac{3}{2})\dots(\mu+\tfrac{1}{2}(2n-1))\,\frac{1}{[b+(c\theta+\frac{a}{\theta})]^{\mu+\frac{1}{2}+n}}.$$

et en vertu de la formule connue relative aux intégrales Euleriennes:

$$29. \quad \frac{\Gamma(\lambda+m)}{\Gamma(\lambda)}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+m-1),$$

qui ici est applicable pour $\lambda=\mu+\frac{1}{2}$ et $m=n$. Cela donne

$$30. \quad f^{(n)}(c\theta+\frac{a}{\theta})=(-1)^n.\frac{\Gamma(\mu+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\cdot\frac{\theta^{\mu+n+\frac{1}{2}}}{(a+b+c\theta^2)^{\mu+n+\frac{1}{2}}},$$

Puis on obtient par la formule (23.):

$$I_{n-q}=(-1)^{n-q}(\mu+\tfrac{1}{2})(\mu+\tfrac{3}{2})\dots(\mu+\tfrac{1}{2}(2n-2q-1))\int_0^\infty\frac{\theta^{-\frac{1}{2}}\partial\theta}{(b+2\sqrt{(ac)}+\theta)^{\mu+\frac{1}{2}+n-q}}.$$

En se servant de la formule (29) pour $\lambda=\mu+\frac{1}{2}$, $m=n-q$, et en substituant $(b+2\sqrt{(ac)})\omega$ à la place de θ, cette expression se réduit à

$$I_{n-q}=(-1)^{n-q}.\frac{\Gamma(\mu+n-q+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{(b+2\sqrt{(ac)})^{(m+n-q)}}\int_0^\infty\frac{\omega^{\frac{1}{2}-1}\partial\omega}{(1+\omega)^{\mu+n-q+\frac{1}{2}}},$$

où l'intégration indiquée peut être effectuée au moyen de la formule connue

$$31. \quad \int_0^\infty\frac{\omega^{s-1}\partial\omega}{(1+\omega)^{r+s}}=\frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)},$$

en prenant $s=\frac{1}{2}$; $r=\mu+n-q$. On obtient alors

$$32. \quad I_{n-q}=\frac{\sqrt{\mu}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\cdot\frac{(-1)^{n-q}\Gamma(\mu+n-q)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n-q}}.$$

Maintenant en substituant dans les formules (24 et 26) tout ce que nous avons trouvé dans (30 et 31), on obtient les équations suivantes:

$$\Gamma(\mu+n+\tfrac{1}{2})\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty\frac{\theta^\mu\partial\theta}{(a+b\theta+c\theta^2)^{\mu+n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+n)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n}}+\frac{M_1}{2\sqrt{(ac)}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n-1}}+\frac{M_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n-2}}+\dots$$

et

$$\Gamma(\mu+n+\tfrac{1}{2})\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty\frac{\theta^{\mu+2n}\partial\theta}{(a+b\theta+c\theta^2)^{\mu+n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu+n)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n}}+\frac{N_1}{2\sqrt{(ac)}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n-1)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n-1}}+\frac{N_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu+n-2}}+\dots$$

Mettons encore $\mu-n$ à la place de μ, nous aurons

$$33.\quad \Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty\frac{\theta^{\mu-n}\partial\theta}{(a+b\theta+c\theta^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu}}+\frac{M_1}{2\sqrt{(ac)}}\cdot\frac{\Gamma(\mu-1)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\;-1}}+\frac{M_2}{(2\sqrt{(ac)})^2}\cdot\frac{\Gamma(\mu-2)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu-2}}+\dots$$

et

$$34.\quad \Gamma(\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{2}n}\int_0^\infty\frac{\theta^{\;+n}\partial\theta}{(a+b\theta+c\theta^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{\Gamma(\mu)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu}}+\frac{N_1}{2\sqrt{(ac)}}\cdot\frac{\Gamma(\mu-1)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu-1}}+\frac{N_2}{(2\sqrt{(ac)})^1}\cdot\frac{\Gamma(\mu-2)}{(b+2\sqrt{(ac)})^{\mu-2}}+\dots$$

Il ne faut pas oublier que ces théorêmes, remarquables par leur généralité, n'ont lieu que pour des valeurs positives de a et c et différentes de zéro. Il y a un cas particulier dans lequel la valeur de l'intégrale à gauche peut être trouvée à l'aide de la formule (31), et indépendamment de la série à droite, savoir le cas, où $a=c=1$, $b=0$. Ces valeurs de ac et b réduisent l'intégrale de la formule (33) à

$$\int_0^\infty\frac{\theta^{\mu-n}\partial\theta}{(1+\theta^2)^{\mu+\frac{1}{2}}},$$

et par la substitution $\theta^2=\omega$, à

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\omega^{\frac{1}{2}(\mu-n-1}\partial\theta}{(2+\omega)^{\mu+\frac{1}{2}}};$$

dont la valeur en vertu de la formule (31) est

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\mu+n+1))\,\Gamma(\frac{1}{2}(\mu+n))}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}.$$

Vient maintenant

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}(\mu-n+1))\Gamma(\tfrac{1}{2}(\mu+n))=\frac{1}{2^\mu}\{\Gamma(\mu)+M_1\Gamma(\mu-1)+\ldots\},$$

et en se rappelant des valeurs de M_1, M_2 etc., on obtient

$$35.\quad \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\tfrac{1}{2}(\mu-n+1))\Gamma(\tfrac{1}{2}(\mu+n))$$
$$=\Gamma(\mu)+\tfrac{1}{2}(n(n-1))\Gamma(\mu-1)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\Gamma(\mu-2)+\ldots,$$

ce qui exprime une rélation remarquable entre les fonctions Eulériennes de la seconde espèce.

Crelle, Journal d. Math. Bd. XXXIII. Heft 3.

Fac-simile einer Handschrift von Oriani.

Excellence

Milan ce 30. Août 1788

La mesure de notre premiere Base n'a étée achevée, que dans ce mois
Le ciel a été couvert p... ... , ... aux observations à cause du
cette année a étée très peu favorable
mauvais temps; nous esperons d'être plus heureux dans l'automne....
. . . . J'ai l'honneur d'être avec la plus gran
de estime et le plus profond respect

De Votre Excellence

Le très-humble et très-obéissant
Serviteur Oriani



14.

De curvis catenariis sphaericis dissertatio analytico-geometrica.

(Cons. dissert. 10. tom. 33. libr. 3.)

(Auct. Dr. *Christoph. Gudermann*, Math. Prof. ord. Monast. Guestph.)

17.

De nexu inter abscissas et areas curvarum homologe coniugatarum catenariarum.

Si formulas (2) et (3) articuli praecedentis aut additione aut subtractione coniungimus eas, in quibus integralia continent parametros, quorum alter est alterius eomplementum, et si insuper arcus *AM* et *CN* homologe coniugatos esse censes, quo $v_1 = v$ fit, oriuntur

$$\tfrac{1}{2}(x-x_1)+\tfrac{1}{2}(f+f_1)=\frac{h(a+c)v}{l(1+c)(1-a)}+{}'S(v,q)+{}'S(v,L-q),$$

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\frac{h(a+c)v}{l(1-c)(1+a)}+{}'S(v,r)+{}'S(v,L'-r),$$

quae praeceptis theoriae functionum modularium adhibitis contrahuntur ad

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f+f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)\right)=\frac{h(a+c)}{l(1+c)(1-a)}\cdot\frac{tn\,v}{dn\,v}=\frac{h}{(1+c)(1-a)}\cdot\operatorname{tang} s,$$

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f+f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)\right)=\frac{h(a+c)}{l(1-c)(1+a)}\cdot\frac{tn\,v}{dn\,v}=\frac{h}{(1-c)(1+a)}\cdot\operatorname{tang} s,$$

sive adhibitio $h=\sqrt{((1-a)(1-b)(1+c)(1+d))}=\sqrt{((1+a)(1+b)(1-c)(1-d))}$, ad

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f+f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)\right)=\sqrt{\frac{(1-b)(1+d)}{(1-a)(1+c)}}\cdot\operatorname{tang} s,$$

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f+f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)\right)=\sqrt{\frac{(1+b)(1-d)}{(1+a)(1-c)}}\cdot\operatorname{tang} s.$$

Si utimur iisdem formulis, quibus in artic. 10, et insuper triangulum characteristicum 2Δ adhibemus, determinatum formula $\operatorname{tang}\Delta=\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang} s$ articuli 2, formulae illae abeunt in

$$1.\quad\begin{cases}\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f+f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)\right)=\dfrac{\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang} s}{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi-g)}=\dfrac{\operatorname{tang}\Delta}{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi-g)},\\[2ex] \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f+f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)\right)=\dfrac{\operatorname{tang}\alpha.\operatorname{tang} s}{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi+g)}=\dfrac{\operatorname{tang}\Delta}{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi+g)}.\end{cases}$$

Quare si duo triangula sphaerica rectangula construuntur, quorum unum cathetos habeat $f+f_1+(x-x_1)$ et $\frac{1}{2}\pi-2g$, alterum vero cathetos $f+f_1-(x-x'_1)$ et $\frac{1}{2}(\pi+2g)$, duo triangula cum triangulo characteristico 2Δ ad arcum parabolicae catenariae $s=\frac{1}{2}(AM+CN)$, cuius parameter $\alpha=\frac{1}{2}(A+C)$, pertinente eiusdem erunt magnitudinis arealis.

E formulis illis derivantur facillime formulae novae

$$2.\quad \begin{cases} \tang(f+f_1)=\dfrac{\sin 2\alpha.\sin 2s}{\cos 2g(\cos 2\alpha+\cos 2s)}=\dfrac{\tang 2\Delta}{\cos 2g}, \\ \tang(x-x')=\dfrac{\tang 2g.\sin 2\alpha\sin 2s}{1+\cos 2\alpha\cos 2s}=\tang.2g.\sin 2\Delta. \end{cases}$$

E formulis his perspicis, semisummam arearum $\frac{1}{2}(f+f_1)$, quae ad arcus homologe coniugatos AM et CN pertinent, maiorem esse area parabolicae catenariae, cuius arcui s semisumma arcuum AM et CN aequalis est, et abscissam curvae ellipticae arcui AM subtensam longiorem esse abscissa, quae arcui hyperbolico CN subtenditur coniugato, dummodo puncta arcuum extrema M et N non sunt vertices, qui vertices A et C proxime sequantur. Etenim si puncta M et N coïncidunt cum verticibus B et D, vel quod idem est, si sumitur arcus parabolicus $s=\frac{1}{4}\pi$, est $\frac{1}{2}(f+f_1)=\Delta=\frac{1}{4}\pi$, et abscissae x et x_1 eo extensae, ut ad arcus AB et CD pertineant, aequales sunt.

Formulae (2) etiam edocent, nexum inter quatuor quantitatis $2g$, 2Δ, $x-x_1$ et $f+f_1$ exhiberi geometrice adiumento trianguli rectanguli sphaerici; quod si ita construatur, ut cathetus 2Δ cum hypotenusa $f+f_1$ faciat angulum constantem $2g$, cathetus alter angulo $2g$ oppositus erit abscissarum differentia $x-x_1$. Quo in triangulo si catheto 2Δ oppositus angulus 2η appellatur, formulis (2) addendae sunt sequentes octo:

$$3.\quad \begin{cases} \cos(f+f_1)=\cos 2\Delta.\cos(x-x_1), & \tang(x-x')=\tang(f-f_1).\cos 2\eta, \\ \sin(x-x_1)=\sin(f+f_1).\sin 2g, & \tang 2\Delta=\tang 2\eta.\sin(x-x_1), \\ \cos(f+f_1)=\cot 2g.\cot 2\eta, & \cos 2g=\cos(x-x_1).\sin 2\eta, \\ \sin 2\Delta=\sin(f+f_1).\sin 2\eta, & \cos 2\eta=\cos 2\Delta.\sin 2g, \end{cases}$$

ita ut formulae decem nexum inter quantitates quinque $2g$, 2Δ, $x-x_1$, $f-f_1$, 2η omnimode exprimant.

18.

De chorda MN *punctorum homologe coniugatorum, et de quadrigono* AMNB.

E formulis (2) articuli praecedentis facillime derivantur quatuor hae:

$$1. \quad \begin{cases} \sin(f+f_1)=\frac{\sin 2\alpha \sin 2s}{2\cos^2\mu \sin 2\eta}; & \cos(f+f_1)=\frac{\cos 2g(\cos 2\alpha+\cos 2s)}{2\cos^2\mu \sin 2\eta}, \\ \sin(x-x_1)=\frac{\sin 2g \sin 2\alpha \sin 2s}{2\cos^2\mu \sin 2\eta}; & \cos(x-x_1)=\frac{\cos 2g}{\sin 2\eta} \text{ (ut antea)}, \end{cases}$$

dummodo non negligis, esse

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sin^2 2\alpha \sin^2 2s + \cos^2 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)^2)} \\ = & \sqrt{(\sin^2 2g \sin^2 2\alpha \sin^2 2s + \cos^2 2g(1 + \cos 2\alpha \cos 2s)^2)} \\ = & \sqrt{((1 + \cos 2\alpha \cos 2s)^2 - \sin^2 2g(\cos 2\alpha + \cos 2s)^2)} \\ = & (1 + \cos 2\alpha \cos 2s)\sqrt{(1 - \sin^2 2g.\cos^2 2\Delta)} \\ = & (1 + \cos 2\mu).\sin 2\eta = 2\cos^2\mu.\sin 2\eta, \end{aligned}$$

si 2μ est hypotenusa trianguli characteristici supra recepti 2Δ, et cuius catheti sunt 2α et $2s$.

Iisdem signis utendo formulas (7, 8, 9) transformamus, ut migrent in

$$2. \quad \cos y.\cos y_1 = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2 g}.\sin 2\eta;$$

$$3. \quad 1-\sin y.y_1 = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2 g}; \quad \sin y - \sin y_1 = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2 g}\cos 2\eta;$$

$$4. \quad \cos\tfrac{1}{2}(y+y_1) = \frac{\cos\mu}{\cos g}.\sin(\tfrac{1}{4}\pi+\eta);$$

$$5. \quad \sin\tfrac{1}{2}(y-y_1) = \frac{\cos\mu}{\cos g}.\sin(\tfrac{1}{4}\pi-\eta).$$

E formulis (3) divisione oritur

$$\frac{\sin y - \sin y_1}{1-\sin y \sin y_1} = \cos 2\eta = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - 2\eta),$$

sive $\frac{\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}y - \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}y_1}{1-\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}y.\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}y_1} = \mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}y - \mathfrak{L}y_1) = \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - 2\eta)$, ideoque est

$$6. \quad \mathfrak{L}y - \mathfrak{L}y_1 = \mathfrak{L}(\tfrac{1}{2}\pi - 2\eta).$$

Si arcubus circulorum maximorum coniungimus tum vertices A et C, tum puncta homologe coniugata M et N, oritur quadrigonum $ACNM$, cuius latus $AC=A+C=2\alpha$, cuius latera AM et CN sunt arcus coniugati duarum curvarum, quorum semisumma $=s$ et cuius latus quartum MN est chorda inter puncta homologe coniugata, cuius longitudinem nunc eruamus. Est vero MN latus trigoni MON, cuius duo reliqua latera sunt $OM=\frac{1}{2}\pi-y$ et $ON=\frac{1}{2}\pi+y_1$, et angulum $MON=x-x_1$ faciunt. Quia vero $\cos MN = \cos OM \cos ON + \sin OM \sin ON \cos MON$, sive

$$\cos MN = -\sin y \sin y_1 + \cos y \cos y_1 \cos(x-x_1),$$

primo componimus $\cos y \cos y_1 . \cos(x - x_1) = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2 g}\cos 2g$, quare $\cos MN$ $= \frac{\cos^2\mu}{\cos^2 g} + \frac{\cos^2\mu}{\cos^2 g}\cos 2g - 1 = 2\cos^2\mu - 1 = \cos 2\mu$, ideoque

$$MN = 2\mu.$$

Chorda igitur MN *iungens puncta homologe coniugata* M *et* N, *aequalis est hypotenusae trianguli characteristici* 2Δ *pertinentis ad arcum parabolicum* s.

Chorda, cuius longitudinem modo determinavimus, cum applicatis punctorum M et N homologe coniugatorum angulos facit acutos M et N, et trigonum MON, cuius latus $MN = 2\mu$ esse invenimus, continet angulum N ipsum, loco anguli M vero ipsius supplementum. Quare formulae trigonometriae sphaericae praebent relationes

$$\sin \tfrac{1}{2}(M-N) \cos \mu = \sin \tfrac{1}{2}(y-y_1) . \sin \tfrac{1}{2}(x-x_1),$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(M-N) \cos \mu = \cos \tfrac{1}{2}(y-y_1) . \cos \tfrac{1}{2}(x-x_1),$$

quae formulis (4) et (5) mutantur in

$$\sin \tfrac{1}{2}(M-N) . \cos g = \sin (\tfrac{1}{4}\pi - \eta) . \sin \tfrac{1}{2}(x-x_1),$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(M-N) . \cos g = \cos (\tfrac{1}{4}\pi - \eta) . \cos \tfrac{1}{2}(x-x_1).$$

Si vero easdem trigonometriae sphaericae formulas applicas ad triangulum rectangulum in fine articuli praecedentis inventum, invenis

$$\sin (\tfrac{1}{4}\pi - \eta) . \sin \tfrac{1}{2}(x-x_1) = \sin (\tfrac{1}{2}(f+f_1) - \Delta) . \cos g,$$
$$\cos (\tfrac{1}{4}\pi - \eta) . \cos \tfrac{1}{2}(x-x_1) = \cos (\tfrac{1}{2}(f+f_1) - \Delta) . \cos g;$$

quare prodeunt formulae

$$\cos \tfrac{1}{2}(M-N) = \cos (\tfrac{1}{2}(f+f_1) - \Delta), \text{ et } \sin \tfrac{1}{2}(M-N) = \sin (\tfrac{1}{2}(f+f_1) - \Delta),$$

quae sine ullo dubio monstrant, esse

$$M - N = f + f_1 - 2\Delta.$$

Chorda MN lineam abscissarum secans in V, duo facit triangula rectangula VPM et VQN, si memineris esse y applicatam PM et y_1 applicatam QN, in quibus, si angulus $PVM = QVN = V$ est,

$$\text{area } \mathfrak{M} \text{ trianguli } VPM = V + M - \tfrac{1}{2}\pi, \text{ et}$$
$$\text{area } \mathfrak{N} \text{ trianguli } VQN = V + N - \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\text{ideoque } \mathfrak{M} - \mathfrak{N} = M - N = f + f_1 - 2\Delta.$$

Quia vero ex intuitu ipso patet, esse aream quadrigoni $AMNC = f + f_1 - \mathfrak{M} + \mathfrak{N}$, *invenitur area quadrigoni* AMNC $= 2\Delta$, *sive duplo areae parabolicae, dummodo arcus parabolicus* s *est semisumma arcuum* AM *et* CN, *et curvae parabolicae parameter* α *est semisumma applicatarum* A *et* C, *quae ad vertices* A *et* C *pertinent.*

Si praeter quadrigonum $AMNC$ construitur quadrigonum $amnc$, cuius latera $ac = AC$ et $mn = MN$ sint arcus circulorum maximorum, cuius vero latera am et cn sint arcus aequales parabolici et insuper symmetrice aequales, nec non convexi versus quadrigoni aream, quadrigonum $AMNC$ aequalis erit quadrigono $amnc$, dummodo $am = cn = \frac{1}{2}(AM + CN)$ et anguli a et c sunt recti. Si angulus $m = n = \theta$ esse ponitur, angulus $NMA = \Theta$ et angulus $MNC = \Theta_1$, est angulus $\lambda = \Theta + M$ et angulus $\lambda_1 = \Theta_1 - N$, quare $\lambda + \lambda_1 = \Theta + \Theta_1 + M - N$, ideoque $\lambda + \lambda_1 = \Theta + \Theta_1 + f + f_1 - 2\Delta$, et quia $\Delta = \theta + \sigma - \frac{1}{2}\pi$, sive $2\Delta = 2\theta + 2\sigma - \pi$, formula $f + f_1 = 2\sigma + \lambda + \lambda_1 - \pi$ in artic. 15. inventa migrat in simpliciorem hanc:

$$\theta = \tfrac{1}{2}(\Theta + \Theta_1).$$

Sed paullo post etiam demonstrabitur, esse $\theta = \Theta = \Theta_1$, ideoque quadrigonis duobus $AMNC$ aequalem esse nonnisi perimetrum et aream, sed aequales etiam esse angulos tunc patefiet, quae mira sane est curvarum catenariarum sphaericarum proprietas, et mirum in modum obstrusa.

19.

De nexu inter abscissas et areas curvarum reciprocarum.

Pro abscissarum x' et x'_1, initio punctum sumimus, quod abscissarum x et x_1 initio est e diametro oppositum, quum linea normalis, quae per vertices A et C transit, etiam vertices A' et C' transit, et lineam abscissarum in novo abscissarum initio secat. Quare est

$$x' = \int_{a'} \frac{-(h+ez')\partial z'}{(1-z'^2)\sqrt{Z'}} \quad \text{et} \quad f' = \int_{a'} \frac{-(h+ez')z'\partial z'}{(1-z'^2)\sqrt{Z'}},$$

ideoque

$$x' + f' = \int_{a'} \frac{-(h+ez')\partial z'}{(1-z')\sqrt{Z'}} = -\frac{2ev}{l} + \frac{2(h+e)}{l} \cdot \int_0 \frac{\partial v}{1-z'},$$

$$x' - f' = \int_{a'} \frac{-(h+ez')\partial z'}{(1+z')\sqrt{Z'}} = \frac{2ev}{l} + \frac{2(h-e)}{l} \cdot \int_0 \frac{\partial v}{1+z'},$$

quibus in formulis argumentum v determinatur iis (6) artic. 11. Si substituimus

$$z' = \frac{(b'+c')a' - (a'-b')c' \operatorname{sn}^2 v}{b'+c'+(a'-b')\operatorname{sn}^2 v},$$

invenimus formulas

$$1. \quad \begin{cases} x' + f' = \dfrac{2(h+ea').v}{l(1-a')} - 2.S(v, q') = \text{sectori } A'O'M', \\[2ex] x' - f' = \dfrac{-(h+ea').v}{l(1+a)} + 2.S(v, r') = \text{sectori } A'OM', \end{cases}$$

si parametri q' et r' determinantur formulis

$$
2.\quad \begin{cases}
sn'q' = \sqrt{\dfrac{(1+c')(a'+d')}{(1+d')(a'+c')}}, \\
cn'q' = \sqrt{\dfrac{(1-a')(c'-d')}{(1+d')(a'+c')}}, \\
dn'q' = \sqrt{\dfrac{(1-b')(c'-d')}{(1+d')(b'+c')}}, \\
snc'q' = \sqrt{\dfrac{(1-a')(b'+c')}{(1-b')(a'+c')}}, \\
cnc'q' = \sqrt{\dfrac{(1+c')(a'-b')}{(1-b')(a'+c')}}, \\
dnc'q' = \sqrt{\dfrac{(1+d')(a'-b')}{(1-b')(a'+d')}},
\end{cases}
\quad \text{et} \quad
\begin{aligned}
sn'r' &= \sqrt{\dfrac{(1-c')(a'+d')}{(1-d')(a'+c')}}, \\
cn'r' &= \sqrt{\dfrac{(1+a')(c'+d')}{(1-d')(a'+c')}}, \\
dn'r' &= \sqrt{\dfrac{(1+b')(c'-d')}{(1-d')(b'+c')}}, \\
snc'r' &= \sqrt{\dfrac{(1+a')(b'+c')}{(1+b')(a'+c')}}, \\
cnc'r' &= \sqrt{\dfrac{(1-c')(a'-b')}{(1+b')(a'+c')}}, \\
dnc'r' &= \sqrt{\dfrac{(1-d')(a'-b')}{(1+b')(a'+d')}}.
\end{aligned}
$$

E formulis antecedentibus, quae spectant ad curvam reciprocitatis lege coniunctam cum catenaria elliptica illico fiunt eae, quae spectant ad abscissam x'_1 et aream f'_1 curvae cum catenaria hyperbolica reciprocitatis lege coniunctae; dummodo permutamus x' et x'_1, f' et f'_1, a' et c', b' et d', v' et v_1, e et $-e$, quo, quia q' in $L'-r'$ et r' in $L'-q'$ abit, adipiscimur formulas

$$
3.\quad \begin{cases}
x'_1 + f'_1 = \dfrac{2(h-e.c')}{l(1-c')} - 2.S(v_1, L'-r') = \text{sectori } C'ON', \\
x'_1 - f'_1 = \dfrac{2(h-e.c')}{l(1+c')} + 2.S(v_1, L'-q') = \text{sectori } C'O'N',
\end{cases}
$$

in quibus argumentum v_1 ex applicata $y'_1 = \text{arc}\sin(z'_1)$ computandum est per formulas (3. artic. 12).

Facillime hinc derivabis formulas, quibus exprimuntur areae sectorum $B'OM'$, $B'O'M'$, $C'ON'$, $C'O'N$; quas vero brevitatis causa omittimus.

20.

De nexu inter areas et abscissas, quae ad arcus homologe coniugatos A'M' *et* C'N' *reciprocos pertinent.*

Ponamus iterum, puncta M et N duarum curvarum AM et CN esse homologe coniugata; erunt etiam puncta nunc M' et N' homologe coniugata, ideoque et arcus $A'M'$ et $C'N'$ ipsi, i. e. erit argumentum $v_1 = v$. Quare e formulis artic. praeced. nunc aut addendo aut subtrahendo componimus:

$$
\tfrac{1}{2}(f'+f'_1) - \tfrac{1}{2}(x'_1 - x') = \frac{(h-e)(a'+c').v}{l(1-a')(1+c')} - S(v, q') - S(v, L'-q'),
$$

$$
\tfrac{1}{2}(f'+f'_1) + \tfrac{1}{2}(x'_1 - x') = \frac{(h-e)(a'+c')v}{l(1+a')(1-c')} - S(v, r') - S(v, L-r'),
$$

quas facillime reduces ad simpliciores

$$1.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f'+f'_1)-\tfrac{1}{2}(x'_1-x')\right)=\dfrac{\operatorname{tang}\sigma}{\operatorname{tang}(\alpha+g)}, \\ \operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{2}(f'+f'_1)+\tfrac{1}{2}(x'_1-x')\right)=\dfrac{\operatorname{tang}\sigma}{\operatorname{tang}(\alpha-g)} \end{cases}$$

unde perspicis, si arcus reciproci $A'M'$ et $C'N'$ non extendantur usque ad vertices proxime sequentes B' et D', fore abscissam $x'_1 > x'$, i. e. eam, quae ad ellipticam curvam reciprocam pertinet, superari ab ea, quae ad hyperbolicam reciprocam; et insuper esse $\tfrac{1}{2}(f'+f'_1) < \tfrac{1}{2}\pi$. Si vero puncta M' et N' collocamus in B' et D', vel quod idem, si $\sigma = \tfrac{1}{2}\pi$, est $x'_1 = x'$ et simul $f'+f'_1 = \pi$. E formulis modo erutis componimus duas:

$$2.\quad \begin{cases} \operatorname{tang}(f'+f'_1)=\dfrac{\sin 2\alpha\sin 2\sigma}{\cos 2g\cos 2\sigma-\cos 2\alpha}, \\ \operatorname{tang}(x'_1-x')=\dfrac{\sin 2g.\sin 2\sigma}{\cos 2g-\cos 2\alpha\cos 2\sigma}, \end{cases}$$

e quibus reductionibus facillimis invenies

$$3.\quad \begin{cases} \cos(x'_1-x')=\dfrac{\cos 2g-\cos 2\alpha\cos 2\sigma}{\sqrt{((1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma)(1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma))}}, \\ \sin(x'_1-x')=\dfrac{\sin 2g\sin 2\sigma}{\sqrt{((1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma)(1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma))}}, \\ \cos(f'+f'_1)=\dfrac{\cos 2g\cos 2\sigma-\cos 2\alpha}{\sqrt{((1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma)(1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma))}}, \\ \sin(f'+f'_1)=\dfrac{\sin 2\alpha.\sin 2\sigma}{\sqrt{((1-\cos(2\alpha+2g)\cos 2\sigma)(1-\cos(2\alpha-2g)\cos 2\sigma))}}; \end{cases}$$

quae formulae relationes complures suppeditant, quarum praecipuae sic exhibentur:

$$4.\quad \begin{cases} \sin 2g.\sin(f'+f'_1)=\sin 2\alpha.\sin(x'_1-x'), \\ \cos(f'+f')=\cos 2\sigma\cos(x'_1-x')-\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 2g}\sin 2\sigma\sin(x'_1-x'), \\ \cos(x'_1-x')=\cos 2\sigma\cos(f'_1+f')+\dfrac{\cos 2g}{\sin 2\alpha}\sin 2\sigma\sin(f'_1+f'), \\ \sin 2\alpha\sin 2\sigma\cos(x'_1-x')=(\cos 2g-\cos 2\alpha\cos 2\sigma)\sin(f'_1+f'), \\ \sin 2g\sin 2\sigma\cos(f'_1+f')=(\cos 2g\cos 2\sigma-\cos 2\alpha)\sin(x'_1-x'), \\ (\cos 2g-\cos 2\alpha\cos 2\sigma)\cos(f'_1+f')=\cos 2g\cos 2\sigma-\cos 2\alpha)\cos(x'_1-x'). \end{cases}$$

Si construitur trigonum, cuius latera 2σ, x'_1-x' et f'_1+f' variabilia esse scimus, anguli duo constantes inerunt, scilicet angulus lateri x'_1-x' oppositus erit $=\operatorname{arc}\cos\left(\dfrac{\cos 2g}{\cos 2\alpha}\right)$, et angulus lateri f'_1+f' oppositus

$= \pi - \text{arc}\cos\left(\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2g}\right)$. Angulus vero variabilis tertius, lateri 2σ oppositus, erit $= \text{arc}\cos\left(\frac{\sin 2\alpha \sin 2g \cos 2\sigma - \cos 2\alpha \cos 2g}{\sin^2 2g - \cos^2 2\alpha}\right)$.

21.

Interpretatio geometrica rationis, quae intercedit inter arcum catenariae ellipticae AM *et arcum homologe coniugatum* CN *catenariae hyperbolicae.*

Coniungat chorda $M'N'$ puncta coniugata duorum arcuum $A'M'$ et $C'N'$, quo oritur triangulum $M'ON'$, cuius latus $OM' = \frac{1}{2}\pi - y$, latus $ON' = \frac{1}{2}\pi + y'$ et angulus $M'ON' = x'_1 - x'$; quare est

$$\cos M'N' = -\sin y' \sin y'_1 + \cos y' \cos y'_1 \cos(x'_1 - x');$$

at formula (4 artic. 15) adhibita praebet

$$\cos y'.\cos y'_1.\cos(x'_1 - x') = \frac{\cos 2g - \cos 2\alpha \cos 2\sigma}{1 + \cos 2g}, \quad \text{et quia}$$

$$\sin y'.\sin y'_1 = \frac{\cos 2g(1 + \cos 2\alpha \cos 2\sigma)}{1 + \cos 2g},$$

illico prodit $\cos M'N' = -\cos 2\alpha.\cos 2\sigma = \cos 2\alpha'.\cos 2s$, dummodo $\alpha' = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ ponimus. Quia vero ad arcum parabolicum s, cuius parameter α, pertinet arcus reciprocus itidem parabolicus σ, cuius parameter est α': vides $\cos 2\alpha'.\cos 2\sigma$ esse cosinum trianguli characteristici $2\Delta'$, cuius catheti sunt 2α et 2σ, quod pertineat ad arcum parabolicum reciprocum σ; unde perspicis, *chordam* M'N', *aequalem esse hypontenusae huius trianguli* $2\Delta'$, *sive aequalem esse duplici applicatae, quae ad punctum extremum arcus* σ *reciproci parabolici pertineat.*

Quia M est centrum sphaericum circuli maximi tangentis curvam catenariam ellipticam in M, et quia pariter N' est centrum circuli maximi curvam catenariam hyperbolicam in N tangentis, vice versa intersectio horum circulorum tangentium, quae sit T, erit centrum cordae $M'N'$ sphaericum, et angulus MTN, quem duo circuli tangentes secum faciunt, erit supplementum chordae $M'N'$ ipsius. Si angulus iste $= 2\nu$ ponitur, est $M'N' + 2\nu = \pi$, ideoque $\cos 2\nu = -\cos M'N'$, sive

$$\cos 2\nu = -\cos 2\alpha.\cos 2\sigma,$$

quae formula similitudinem quandam habet cum formula $\cos 2\mu = \cos 2\alpha.\cos 2s$, Quia vero inter arcus rericoprocos σ et s parabolicos intercedit relatio

$$(1+\cos 2\alpha \cos 2\sigma)(1-\cos 2\alpha \cos 2s) = \sin^2 2\alpha, \quad \text{est}$$
$$(1+\cos 2\nu)(1-\cos 2\mu) = 4\sin^2\alpha \cos^2\alpha, \quad \text{sive}$$
$$\cos\nu.\sin\mu = \sin\alpha\cos\alpha.$$

Triangulum MTN praeter angulum 2ν continet angulos Θ et Θ_1 (artic. 18), et cum e formulis trigonometriae sphaericae nota est relatio

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\Theta+\Theta_1)}{\cos\nu} = \frac{\cos\frac{1}{2}(MT-NT)}{\cos\mu}, \quad \text{quia} \quad \sin\tfrac{1}{2}(\Theta+\Theta_1) = \sin\theta = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\mu},$$
$$\text{invenitur} \quad \cos\tfrac{1}{2}(MT-NT) = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\mu}\cdot\frac{\cos\mu}{\cos\nu} = 1, \quad \text{sive}$$
$$MT = NT; \quad \text{ideoque} \quad \Theta = \Theta_1 = \theta.$$

Chorda igitur MN *iungens duo puncta homologe coniugata* M *et* N *in catenaria elliptica et hyperbolica est ea, quae cum duabus curvis angulos internos Θ et Θ_1 faciat aequales*; quae est interpretatio geometrica rationis, quae locum habet inter puncta homologe coniugata et arcus homologe coniugatos.

Nunc primum patet, quadrigonis $amnc$ et $AMNC$ (art. 18.) aequales esse angulos $a = A = \frac{1}{2}\pi$, $c = C = \frac{1}{2}\pi$, $m = M$ (sive $\theta = \Theta$) et $n = N$ (sive $\theta = \Theta_1$), quorum vero latera sunt ea, ut sit $ac = AC = 2\alpha$, $mn = MN = 2\mu$ et $am = cn = \frac{1}{2}(AM+CN)$.

Nunc etiam perspicies, in quadrigono $AMNC$, cuius latera $A'M'$ et $C'N'$ reciprocitatis lege coniuncta sunt cum arcubus AM et CN duarum catenariarum homologe coniugatis, pariter esse angulum $A' = C' = \frac{1}{2}\pi$ et angulum $M' = N' = \theta' = \pi - MT$.

Aream huius quadrigoni e theoremate de quadraturis sphaericis generalissime facile est computare. Si omnia ipsius latera essent arcus circulorum maximorum, area foret $2.\frac{1}{2}\pi + 2\theta' - 2\pi = 2\theta' - \pi$; quia vero latera $A'M'$ et $C'N'$ sunt arcus curvarum versus quadrigoni aream convexi, addendi sunt arcus reciproci AM et CN; quare ipsius area est $2\theta' - \pi + AM + CN = 2\theta' + 2s - \pi$. Quia vero area catenariae parabolicae reciprocae, quae ad ipsius arcum σ pertinet, est $= \Delta' = \theta' + s - \frac{1}{2}\pi$, ideoque $2\Delta' = 2\theta' + 2s - \pi$, *aream quadrigoni* $A'M'N'C' = 2\Delta'$ esse, *vel areae trianguli characteristici, ad catenariam parabolicam reciprocam pertinenti aequalem esse patet.*

Quia anguli M' et N' in quadrigono $A'M'N'C'$ sunt iidem, quos circuli maximi, qui arcus $A'M'$ et $C'N'$ tangunt in punctis M' et N', faciunt cum chorda $M'N'$ punctorum coniugatorum, circuli hi in puncto quodam T, quod

est centrum chordae MN, ite se intersecabunt, ut fiat triangulum isoscele $M'T'N'$, sive $M'T' = N'T' = \pi - \theta$ sit.

Si per puncta M et N homologe coniugata, ducimus curvarum AM et CN lineas normales, etiam hae ob aequales tangentes $MT = NT$ in puncto qnodam U ita se intersecabunt, ut sit $UM = UN$, et ut circulus maximus per punta T et U ductus, normaliter in partes aequales dividat chordam punctorum M et N coniugatorum. Quare U est radius circuli minoris, qui curvas catenarias AMB et CND simul tangit in punctis coniugatis M et N. Si r est radius huius circuli minoris, facillime invenies:

$$\operatorname{tang} r = \frac{1 - \cos 2\alpha \cos 2s}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha \cos 2\sigma} = \frac{\sin^2 \mu}{\sin\alpha \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 \nu};$$

quae formula edocet radium hunc r aequalem esse radio curvaturae sive lineae normali, pertinenti ad punctum arcus curvae parabolicae extremum, cuius longitudo $= s$, et parameter $= \alpha$ (confer. artic. 3, ubi $y = \mu$). Idem radius aequalis est normali, quae ad curvam parabolicam pertinet.

Quare si circulus minor, cuius radius aequalis est radio osculi sive lineae normali, quae ad arcum parabolicum s quendam pertinet, ita applicatur inter duas curvas catenarias AMB et CND, ut has curvas simul tangat, puncta contactus M et N erunt homologe coniugata et simul ita posita, ut sit $\frac{1}{2}(AM + CN) = s$. Methodus haec, inveniendi puncta coniugata inter eas, sane referenda est problematum solutiones, quae dicuntur mechanicae, quae vero adhibendae sunt, si alias et quidem geometricas frustra quaerimus. Notio saltem huius circuli est adhibenda, qui simul has curvas tangat, quia ratio quae intercedit inter puncta homologe coniugata, clarissime explicatur, si dicimus, *puncta homologe coniugata esse puncta contactus duarum curvarum cum eodem circulo minore.*

Datis duobus punctis homologe coniugatis M et N, facillime ducuntur lineae, quae curvas catenarias in his punctis tangant. Si linea tangens est ducenda per punctum M, ex altero puncto N describatur circulus, cuius radius est 2α, a puncto M ad circulum duci possunt duae lineae tangentes sphaerico-rectae, quorum una (quam facillime distingues ab altera inutili) quae circulum tangat in R, etiam curvam AM in M tanget. Pari modo invenitur circulus maximus, qui alteram curvam CN tangat in N. Si enim ducimus radium NR, oritur trigonum rectangulum NRM, cuius cathetus $NR = 2\alpha$, et hypotenusa 2μ est, quare triangulum hoc erit characteristicum 2Δ, cathetus alter $MR = 2s = AM + CN$, area aequalis erit areae quadrigoni

AMNC, et angulus $NMR = \theta = \Theta$, ideoque *MR* curvam *AM* in *M* tangit. Inventis duabus lineis tangentibus *MT* et *NT*, addo, angulum *RNT* esse complementum arcus 2σ parabolici reciproci. Quia enim $2\Delta = 2\theta + 2\sigma - \pi$ et triangulum characteristicum $2\Delta = \frac{1}{2}\pi + NMR + MNR - \pi = NMR + MNT - RNT - \frac{1}{2}\pi = 2\theta - RNT - \frac{1}{2}\pi$, est $2\theta + 2\sigma - \pi = 2\theta - RNT - \frac{1}{2}\pi$, sive

$$\text{angulus } RNT = \tfrac{1}{2}\pi - 2\sigma.$$

Vides ergo, angulum $RNT = 0$ esse, si $\sigma = \frac{1}{4}\pi$, eumque negativum fieri, si $\sigma > \frac{1}{4}\pi$ sumatur. Pari modo duci circulos maximos, qui curvas reciprocas *A'M'* et *C'N'* in *M'* et *N'* tangant, vix monendum est.

23.

Reductiones formularum, quibus abscissae punctorum homologe coniugatorum exprimuntur.

Ad absolvendas reductiones propositas, omnes quantitates constantes, praesertim eae, quae ad octo vertices quatuor curvarum pertinent, exprimendae sunt ita, ut nonnisi a duabus quantitatibus pro arbitrio sumendis pendeant. Quantitates binae constantes sunt α et $\operatorname{tang} g$. Ponamus brevitatis causa

$$\varrho = \operatorname{tang} g = \sqrt{(1 - \sin 2\beta \sin 2\gamma)}.$$

Quia

$$1.\quad \begin{cases} \cos(\gamma+\beta) = \varrho\cos\alpha, & \text{sit } \varepsilon = \sin(\gamma+\beta) = \sqrt{(1-\varrho^2\cos^2\alpha)}, \quad \text{et quia} \\ \sin(\gamma-\beta) = \varrho\sin\alpha, & \text{sit } \varepsilon' = \cos(\gamma-\beta) = \sqrt{(1-\varrho^2\sin^2\alpha)}, \end{cases}$$

erunt

$$2.\quad e = \varrho\cos 2\alpha, \qquad h = (1-\varrho^2)\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \operatorname{tang} 2g = \frac{e}{h}\operatorname{tang} 2\alpha;$$

$$3.\quad \begin{cases} a = \sin A = +\cos(\beta+\gamma-\alpha) = +\varrho\cos^2\alpha + \varepsilon\sin\alpha, \\ b = \sin B = +\cos(\alpha+\gamma-\beta) = -\varrho\sin^2\alpha + \varepsilon'\cos\alpha, \\ c = \sin C = -\cos(\alpha+\beta+\gamma) = -\varrho\cos^2\alpha + \varepsilon\sin\alpha, \\ d = \sin D = +\cos(\alpha+\beta-\gamma) = +\varrho\sin^2\alpha + \varepsilon'\cos\alpha, \\ \qquad\qquad\text{et} \\ a' = \cos A = \sin(\beta+\gamma-\alpha) = -\varrho\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon\cos\alpha, \\ b' = \cos B = \sin(\alpha+\gamma-\beta) = +\varrho\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon'\sin\alpha, \\ c' = \cos C = \sin(\alpha+\beta+\gamma) = +\varrho\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon\cos\alpha, \\ d' = \cos D = \sin(\alpha+\beta-\gamma) = -\varrho\sin\alpha\cos\alpha + \varepsilon'\sin\alpha. \end{cases}$$

E formulis his invenis, componendo, sequentes:

$$4.\quad \begin{cases} ac = \sin^2\alpha - \varrho^2\cos^2\alpha, & bd = \cos^2\alpha - \varrho^2\sin^2\alpha, \\ a+c = 2\varepsilon\sin\alpha, & b+d = 2\varepsilon'\cos\alpha; \end{cases}$$

$$5.\quad\begin{cases}\sqrt{((1+a)(1+c))}=\varepsilon+\sin\alpha; & \sqrt{((1+a)(1-c))}=(1+\varrho)\cos\alpha;\\ \sqrt{((1+b)(1+d))}=\varepsilon'+\cos\alpha; & \sqrt{((1-b)(1+d))}=(1+\varrho)\sin\alpha;\\ \sqrt{((1-a)(1-c))}=\varepsilon-\sin\alpha; & \sqrt{((1-a)(1+c))}=(1-\varrho)\cos\alpha;\\ \sqrt{((1-b)(1-d))}=\varepsilon'-\cos\alpha; & \sqrt{((1+b)(1-d))}=(1-\varrho)\sin\alpha;\end{cases}$$

$$6.\quad\begin{cases}a'c'=\cos^2\alpha-\varrho^2\cos^2\alpha, & b'd'=\sin^2\alpha-\varrho^2\sin^2\alpha,\\ a'+c'=2\varepsilon\cos\alpha, & b'+d'=2\varepsilon'\sin\alpha;\end{cases}$$

$$7.\quad\begin{cases}\sqrt{((1-a')(1-c'))}=\varepsilon-\cos\alpha; & \sqrt{((1-a')(1+c'))}=\sin\alpha+\varrho\cos\alpha;\\ \sqrt{((1-b')(1-d'))}=\varepsilon'-\sin\alpha; & \sqrt{((1+b')(1-d'))}=\cos\alpha+\varrho\sin\alpha;\\ \sqrt{((1+a')(1+c'))}=\varepsilon+\cos\alpha; & \sqrt{((1+a')(1-c'))}=\sin\alpha-\varrho\cos\alpha;\\ \sqrt{((1+b')(1+d'))}=\varepsilon'+\sin\alpha; & \sqrt{((1-b')(1+d'))}=\cos\alpha-\varrho\sin\alpha;\end{cases}$$

$$8.\quad\begin{cases}l=\sqrt{((a+d)(b+c))}=\sqrt{((a'+d')(b'+c'))}=\sqrt{((\varepsilon'\cos\alpha+\varepsilon\sin\alpha)^2-\varrho^2)}\\ \qquad=\sqrt{(1-\varrho^2-2\varrho^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\varepsilon\varepsilon'\sin 2\alpha)},\\ \sqrt{(l^2-l'^2)}=\sqrt{((a+c)(b+d))}=\sqrt{((a'+c')(b'+d'))}=\sqrt{(2\varepsilon\varepsilon\sin\alpha)},\\ l'=\sqrt{((b-a)(d-c))}=\sqrt{((a'-b')(c'-d'))}=\sqrt{((\varepsilon'\cos\alpha-\varepsilon\sin\alpha)^2-\varrho^2)}\\ \qquad=\sqrt{(1-\varrho^2-2\varrho^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\varepsilon\varepsilon'\sin 2\alpha)},\end{cases}$$

quibus quantitatibus exprimuntur moduli

$$\lambda=\frac{l'}{l}\quad\text{et}\quad\lambda'=\frac{\sqrt{(l^2-l'^2)}}{l}.$$

Formulae nunc reducendae sunt in (artic. 16.) inventa (2 et 3), e quibus ita exhibitis:

$$x+f=\frac{2hv}{l(1+d)}+2.'D(v,q);\qquad x_1+f_1=\frac{2hv}{l(1+b)}+2.'D(v,L'-r);$$

$$x-f=\frac{2hv}{l(1-d)}-2.'D(v,r);\qquad x_1-f_1=\frac{2hv}{l(1-b)}-2.'D(v,L-q),$$

componimus primo has:

$$\tfrac{1}{2}(x+x_1)+\tfrac{1}{2}(f+f_1)=\frac{hv}{l(1+d)}+\frac{hv}{l(1+b)}+'D(v,q)+'D(v,L'-r),$$

$$\tfrac{1}{2}(x+x_1)-\tfrac{1}{2}(f+f_1)=\frac{hv}{l(1-d)}+\frac{hv}{l(1-b)}-'D(v,r)-'D(v,L'-q),$$

sive, paullum mutatas:

$$\tfrac{1}{2}(x+x_1)+\tfrac{1}{2}(f+f_1)=\frac{hv}{l}+\frac{h(1-bd)v}{l(1+b)(1+d)}+'D(v,q)+'D(v,L'-r),$$

$$\tfrac{1}{2}(x+x_1)-\tfrac{1}{2}(f+f_1)=\frac{hv}{l}+\frac{h(1-bd)v}{l(1-b)(1-d)}-'D(v,r)-'D(v,L'-q).$$

Adhibenda nunc est formula generalis

$$'D(v,a)+'D(v,b)='D(v,a+b)-(\lambda^2\,tn'a\,tn'b\,tn'(a+b)).v$$
$$+\operatorname{arctang}\left(\frac{\lambda'^2\,sn'a\,sn'b\,sn'(a+b)\,tn\,v\,dn\,v}{dn^2v-\lambda'^2\,cn'a\,cn'b\,cn'(a+b)\,sn^2v}\right),$$

et in additione hac parametrorum non negligendum est, e formulis (art. **16.**)

$$tn'q = \sqrt{\frac{(1-b)(a+d)}{(1+d)(b-a)}} \quad \text{et} \quad tn'r = \sqrt{\frac{(1+b)(a+d)}{(1-d)(b-a)}}$$

patere, esse parametrum $q < r$. Hinc sequitur, summam $m = q + (L' - r) = L' - (r - q)$ esse quadrante L' minorem; e contra, summa $r + (L' - q) = L' + r - q = 2L' - m$ quadrante L' maior est. Ponamus re vera $m = L' - (r - q)$, et formula prima migrabit in

$$\tfrac{1}{2}(x + x_1) + \tfrac{1}{2}(f + f_1) = \frac{hv}{l} + \left(\frac{h(1-bd)}{l(1+b)(1+d)} - \lambda^2 tn'q\, tnc'r\, tn'm\right)v + {'D}(v, m) + \varphi,$$

si φ computatur e formula

$$\tang \varphi = \frac{\lambda'^2 sn'q\, sn'r . sn'm}{1 - cn'q\, cnc'r\, cn'm . cnc^2 v} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}.$$

Ante omnia reliqua eruendae nunc sunt valores functionum modularium novi parametri $m = q + L' - r$. Adhibita formula notissima

$$cn'm = \frac{cn'q\, cnc'r - sn'q\, snc'r\, dn'q\, dnc'r}{1 - \lambda'^2 sn'^2 q\, sn'^2 r}$$

e formulis (1. art. **16**) hoc loco substitutis, oritur primo:

$$cn'm = l'. \frac{\sqrt{[(1+b)(1+d)(1-a)(1-c)]} - \sqrt{[(1-b)(1-d)(1+a)(1+c)]}}{(1-a)(1-c)(b+d) - (1-b)(1-d)(a+c)},$$

quae formulis (**3** et **5**) mutatur in

$$cn'm = \tfrac{1}{2} l'. \frac{(\varepsilon' + \cos\alpha)(\varepsilon - \sin\alpha) - (\varepsilon' - \cos\alpha)(\varepsilon + \sin\alpha)}{\varepsilon' \cos\alpha(\varepsilon - \sin\alpha)^2 - \varepsilon \sin\alpha(\varepsilon' - \cos\alpha)^2}.$$

Quia vero numerator reducitur ad $2(\varepsilon \cos\alpha - \varepsilon' \sin\alpha)$, et denominator ad $(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)(\varepsilon\cos\alpha - \varepsilon'\sin\alpha)$, prodit valor ipsius $cn'm$ satis simplex; e quo facillimo negotio derivantur valores functionum reliquarum, scilicet:

$$9. \begin{cases} sn'm = \dfrac{(1+\varrho^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 g(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)}; & snc'm = \dfrac{l}{\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha}, \\ cn'm = \dfrac{l'}{\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha}, & cnc'm = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2 g(\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha)}, \\ tn'm = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{l'\cos^2 g}, & tnc'm = \dfrac{l\cos^2 g}{\sin\alpha\cos\alpha}, \\ dn'm = \dfrac{l'(\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha)}{l(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)}, & dnc'm = \dfrac{\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha}{\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha}. \end{cases}$$

Si de reductione formulae alterius agitur, quia $tn'(2L' - m) = -tn'm$, $cn'(2L' - m) = -cn'm$, $sn'(2L' - m) = sn'm$, ${'D}(v, 2L' - m) = -{'D}(v, m)$ est, pervenies ad

$$\tfrac{1}{2}(x + x_1) - \tfrac{1}{2}(f + f_1) = \frac{hv}{l} + \left(\frac{h(1-bd)}{l(1-b)(1-d)} - \lambda^2 tnc'q\, tn'r\, tn'm\right).v' + {'D}(v, m) - \varphi_1,$$

si angulum φ' computas e formula

$$\tang \varphi_1 = \frac{\lambda'^2 snc' q\, sn' r\, sn' m}{1+cnc' q\, cn' r\, cn' m . cnc^2 v} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}.$$

Quia vero facillime invenies, esse

$$\frac{h(1-bd)}{l(1+b)(1+d)} - \lambda^2 tn' q\, tnc' r\, tn' m = \frac{h(1-bd)}{l(1-b)(1-d)} - \lambda^2 tnc' q\, tn' r\, tn' m = 0,$$

formulae reductae sunt

$$10. \quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(x+x_1) + \tfrac{1}{2}(f+f_1) = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) + \varphi, \\ \tfrac{1}{2}(x+x_1) - \tfrac{1}{2}(f+f_1) = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) - \varphi_1. \end{cases}$$

Subtrahendo invenis relationem simplicem·

$$11. \quad f+f_1 = \varphi + \varphi',$$

addendo vero hanc:

$$12. \quad \tfrac{1}{2}(x+x_1) = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) + \tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi_1).$$

E formulis his derivantur aliae, quarum ope singulas abscissas etiam non habita ad punctum coniugatum ratione computare possumus. Quia enim

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1) + \tfrac{1}{2}(x-x_1) = \text{arc tang}\left(\frac{\tang \alpha . \tang s}{\tang(\frac{1}{4}\pi-g)}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1) - \tfrac{1}{2}(x-x_1) = \text{arc tang}\left(\frac{\tang \alpha \tang s}{\tang(\frac{1}{4}\pi+g)}\right),$$

formulae hae coniunctae cum formulis (10), aut addendo, aut subtrahendo, praebent:

$$13. \quad \begin{cases} x = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) + \varphi - \text{arc tang}\left(\frac{\tang \alpha \tang s}{\tang(\frac{1}{4}\pi+g)}\right), \\ x_1 = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) + \varphi - \text{arc tang}\left(\frac{\tang \alpha \tang s}{\tang(\frac{1}{4}\pi+g)}\right), \end{cases}$$

vel si mavis, has:

$$14. \quad \begin{cases} x = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) + \text{arc tang}\left(\frac{\tang \alpha \tang s}{\tang(\frac{1}{4}\pi-g)}\right) - \varphi_1, \\ x_1 = \frac{hv}{l} + {}'D(v, m) + \text{arc tang}\left(\frac{\tang \alpha \tang s}{\tang(\frac{1}{4}\pi+g)}\right) - \varphi_1. \end{cases}$$

Si re vera non habita ratione ad punctum homologe coniugatum computare vis abscissam x, substitues in his formulis valorem $\tang s = \sqrt{\frac{(z-a)(c+z)}{(b-z)(d+z)}}$; si vero abscissam x_1, substitues valorem $\tang s = \sqrt{\frac{(z_1-c)(a+z_1)}{(d-z_1)(b+z_1)}}$.

Quia componitur

$$\lambda'^2 snc' q\, sn' r . sn' m = \frac{\varepsilon \sin\alpha \sin 2\alpha(\varepsilon' + \cos\alpha)}{l\cos^2 g(\varepsilon + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)},$$

$$cnc' q\, cn' r\, cn' m = \frac{l'^2(\varepsilon' - \cos\alpha)}{2\varepsilon' \cos\alpha(\varepsilon + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)} \quad \text{est}$$

$$15. \quad \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon' \sin^2 2\alpha}{l\cos^2 g} \cdot \frac{\varepsilon' + \cos\alpha}{2\varepsilon' \cos\alpha(\varepsilon + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha) + l'^2(\varepsilon' - \cos\alpha) cnc^2 v} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}.$$

Et quia

$$\lambda'^2 sn' q\, snc' r . sn' m = \frac{\varepsilon \sin\alpha \sin 2\alpha(\varepsilon' - \cos\alpha)}{l\cos^2 g(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)},$$

$$cn' q\, cnc' r\, cn' m = \frac{l'^2(\varepsilon' + \cos\alpha)}{2\varepsilon' \cos\alpha(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)}, \quad \text{est}$$

$$16. \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\varepsilon\varepsilon' \sin^2 2\alpha}{l\cos^2 g} \cdot \frac{\varepsilon' - \cos\alpha}{2\varepsilon' \cos\alpha(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha) - l'^2(\varepsilon' + \cos\alpha) cnc^2 v} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}.$$

Quia generaliter $\frac{\lambda'^2 sn' a\, sn' b\, sn'(a+b) . tn\, v\, dn\, v}{dn^2 v - \lambda'^2 cn' a\, cn' b\, cn'(a+b) sn^2 v} = \frac{\lambda'^2 sn' a\, sn' b\, sn'(a+b) tn\, v\, dn\, v}{1 - dn' a\, dn' b\, dn'(a+b) sn^2 v}$ est, et producta

$$dnc' q\, dn' r\, dn' m = \frac{l'^2}{l^2} \cdot \frac{(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha)}{(\varepsilon + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)},$$

$$dn' q\, dnc' r . dn' m = \frac{l'^2}{l^2} \cdot \frac{(\varepsilon + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha)}{(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha)},$$

priores formulae etiam sic exhibentur:

$$17. \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{l\varepsilon \sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos^2 g} \cdot \frac{(\varepsilon' + \cos\alpha) tn\, v\, dn\, v}{l^2(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha) - l'^2(\varepsilon - \sin\alpha)\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha) . sn^2 v}, \\ \operatorname{tang} \varphi = \frac{l\varepsilon \sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos^2 g} \cdot \frac{(\varepsilon' - \cos\alpha) tn\, v\, dn\, v}{l^2(\varepsilon - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha) - l'^2(\varepsilon + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha sn^2 v}. \end{cases}$$

Si in formulis (10, 11, 12) sumitur $s = \frac{1}{2}\pi$, quo $v = L$ fit et $\varphi = \varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$, abscissae eo extensae aequales sunt, et arcubus AB et CD subtensae sunt. Abscissa haec est

$$\frac{h . L}{l} + {}'D(L, m).$$

24.

Reductiones formularum, quibus abscissae punctorum coniugatorum in curvis reciprocis exprimuntur.

Reducendae nunc sunt formulae in (artic. 19.) inventae:

$$x' + f' = \frac{2(h + ea')}{l(1 - a')} . v - 2 . S(v, q'); \qquad x' - f' = \frac{2(h + ea')}{l(1 + a')} + 2 . S(v, r'),$$

$$x'_1 + f_1' = \frac{2(h - ec')}{l(1 - c')} . v - 2 . S(v, L' - r'); \quad x'_1 - f_1' = \frac{2(h - ec')}{l(1 + c')} + 2 . S(v, L' - q'),$$

e quibus componimus primo

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'_1)+\tfrac{1}{2}(f'+f_1')=\left(\frac{h+ea'}{l(1-a')}+\frac{h-ec'}{l(1-c')}\right)v-S(v,q')-S(v,L'-r'),$$

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'_1)-\tfrac{1}{2}(f'+f_1')=\left(\frac{h+ea'}{l(1+a')}+\frac{h-ec'}{l(1+c')}\right)v+S(v,r')+S(v,L'-q'),$$

vel, si mavis,

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'_1)+\tfrac{1}{2}(f'+f_1')=\frac{hv}{l}+\left(\frac{h(1-a'c')+e(a'-c')}{l(1-a')(1-c')}\right)v-S(v,q')-S(v,L'-r'),$$

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'_1)+\tfrac{1}{2}(f'+f_1')=\frac{hv}{l}+\left(\frac{h(1-a'c')+e(a'-c')}{l(1+a')(1-c')}\right)v+S(v,r')+S(v,L'-q').$$

E formulis (2 artic. 19) patet esse parametrum $q'>r'$, quare parametrorum summa $q'+L'-r'=L'+(q'-r')$ quadrante L' maior, altera vero summa $r'+L'-q'=L'-(q'-r')$ quadrante L' minor. Si igitur ponimus iterum

$$m=r'+L'-q'=L'-(q'-r'),$$

altera summa $q'+L'-r=2L'-m$ quadrante maior erit. Adhibita formula

$$cn'm=\frac{cn'r'\,cnc'q'-sn'r'\,snc'q'\,dn'r'\,dnc'q'}{1-\lambda'^2 sn'^2 r\,snc'^2 q'},$$

componimus vero e substitutis formulis (2 artic. 19):

$$cn'm=\frac{\sqrt{[(1+a')(1+c')(1-b')(1-d')]}-\sqrt{[(1-a')(1-c')(1+b')(1+d')]}}{(1-b')(1-d')(a'+c')-(1-a')(1-c')(b'+d')}.l',$$

quae adhibitis (3 — 7 artic. praec.) reducitur ad $cn'm=\frac{l'}{\varepsilon\varepsilon'-\sin\alpha\cos\alpha}$, unde persqicis parametrum m esse eundem ac in articulo praeced., ideoque esse $L'-(r-q)=L'-(q'-r')$, sive

$$1.\quad r-q=q'-r'.$$

Quo invento, hac occasione videamus, summae $r+q$ et $q'+r'$ aequales sint, nec ne. Formularum pro $cn'm$ loco nunc habemus formulas

$$2.\quad cn'(L'-q-r)$$

$$=l'.\frac{\sqrt{[(1+b)(1+d)(1-a)(1-c)]}+\sqrt{[(1-b)(1-d)(1+a)(1+c)]}}{(1-a)(1-c)(b+d)-(1-b)(1-d)(a+c)}=\frac{l'}{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha},$$

$$3.\quad cn'(L'-q'-r')$$

$$=l'.\frac{\sqrt{[(1+a')(1+c')(1-b')(1-d')]}+\sqrt{[(1-a')(1-c')(1+b')(1+d')]}}{(1-b')(1-d')(a'+c')-(1-a')(1-c')(b+d')}=\frac{l'}{\varepsilon'\cos\alpha-\varepsilon\sin\alpha},$$

unde perspicis, summas $q-r$ et $q'-r'$ esse diversas.

Quia $S(v,r')+S(v,L'-q')=S(v,m)-(\lambda^2\,tn'r'\,tnc'q'\,tn'm)v$ $+\text{arc tang}\,\frac{\lambda^2 sn'r'\,snc'q'\,sn'm\,snv\,cnv\,dnv}{cn'r'\,cnc'q'\,cn'm\,dn^2v+\lambda^2 sn^2v}\Big)$ qua in formula $\frac{\lambda^2 sn'r\,snc'q'\,sn'm\,snv\,cnv\,dnv}{cn'r\,cnc'q\,cn'm\,dn^2v+\lambda^2 sn^2v}$ $=\frac{\lambda^2\lambda'^2 sn'r\,snc'q'\,sn'm\,snv.sncv}{dn'r\,dnc'q'\,dn'm-\lambda^2 snc^2v}=\psi$, nanciscimur

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'_1) - \tfrac{1}{2}(f'+f_1')$$
$$= \frac{hv}{l} + [(\frac{h(1-a'c')+e'(a'-c')}{l(1+a')(1+c')} - \lambda^2 tn'r' tnc'q' tn'm)]\varrho + S(\varrho, m) + \psi,$$

et pariter

$$\tfrac{1}{2}(x'+x'_1) + \tfrac{1}{2}(f'+f_1')$$
$$= \frac{hv}{l} + [(\frac{h(1-a'c')+e'(a'-c')}{l(1-a')(1-c')} - \lambda^2 tnc'r\, tn'q\, tn'm)]\varrho + S(\varrho, m) + \pi - \psi_1.$$

Et quia

$$\text{tum } \frac{h(1-a'c')}{l(1+a')(1+c')} + \frac{e(a'-c')}{l(1+a')(1+c')} - \lambda^2 tn'r' tnc'q' tn'm = 0,$$
$$\text{tum } \frac{h(1-a'c')}{l(1-a')(1-c')} + \frac{e(a'-c')}{l(1-a')(1-c')} - \lambda^2 tnc'r' tn'q' tn'm = 0$$

invenies, formulae reductae sunt

$$4. \quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(x'+x'_1) - \tfrac{1}{2}(f'+f_1') = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \psi, \\ \tfrac{1}{2}(x'+x'_1) + \tfrac{1}{2}(f'+f_1') = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \pi - \psi_1, \end{cases}$$

unde concludis, addendo,

$$5. \quad \tfrac{1}{2}(x'+x'_1) = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi),$$

et subtrahendo,

$$6. \quad f' + f_1') = \pi - \psi - \psi_1.$$

Quia insuper est

$$\tfrac{1}{2}(x' - x'_1) - \tfrac{1}{2}(f'+f_1') = -\text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha+\gamma)}\right), \quad \text{et}$$
$$\tfrac{1}{2}(x' - x'_1) + \tfrac{1}{2}(f'+f_1') = +\text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha-\gamma)}\right),$$

e formulis (4) obtines

$$7. \quad \begin{cases} x' = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \psi + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha-\gamma)}\right), \\ x'_1 = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \psi + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha+\gamma)}\right), \end{cases}$$

nec non has:

$$8. \quad \begin{cases} x' = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \pi - \psi_1 - \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha+\gamma)}\right), \\ x'_1 = \frac{hv}{l} + S(\varrho, m) + \pi - \psi_1 - \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha-\gamma)}\right). \end{cases}$$

Ope harum formularum singulas abscissas, quae ad puncta curvarum reciprocarum pertinent, etiam non habita ratione puncti coniugati computare potes,

dummodo in computanda abscissa x' adhibes valorem $\tang \sigma = \sqrt{\frac{(a'-z')(c'+z')}{(z'-b')(d'+z')}}$, in computanda vero abscissa x' valorem $\tang \sigma = \sqrt{\frac{(c'-z'_1)(a'+z'_1)}{(z'_1-d')(b'+z'_1)}}$.

Ad computandum denique angulum ψ, compones formulam

$$9.\quad \tang \psi = \frac{\varepsilon \sin\alpha \sin 2\alpha}{l.\cos^2 g} \cdot \frac{(\varepsilon - \cos\alpha)\, sn v\, snc v}{(\varepsilon' + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' + \sin\alpha\cos\alpha) - (\varepsilon' - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha).snc^2 v},$$

et pariter angulus ψ_1 determinatur formula

$$10.\quad \tang \psi_1 = \frac{\varepsilon \sin\alpha \sin 2\alpha}{l.\cos^2 g} \cdot \frac{(\varepsilon + \cos\alpha)\, sn v\, snc v}{(\varepsilon' - \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' + \sin\varphi\cos\alpha) - (\varepsilon' + \sin\alpha)(\varepsilon\varepsilon' - \sin\alpha\cos\alpha).snc^2 v}.$$

Simul perspicis abscissas quatuor arcubus AB, CD, $A'B'$ et $C'D'$ subtensas aequales esse omnes, et valorem hunc communem esse

$$\frac{hL}{l} + S(L, m) + \tfrac{1}{2}\pi = \frac{hL}{l} + {}'D(L, m).$$

E praeceptis geometriae sphaericae nota est curvarum spharicarum proprietas generalis ea, *ut subtangentes lineae, quae ad puncta reciproca pertinent, aequales sint*, et *insuper noscitur, differentiam abscissarum arcubus reciprocis subtensarum esse complementum lineae illae subtangentis.* Quum vero ex aequatione differentiali catenariae ellipticae facillime invenitur, esse lineam subtangentem, quae ad punctum M pertineat, aequalem

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{hz}{\sqrt{Z}}\right),$$

et pariter subtangentem, quae ad punctum curvae hyperbolicae N pertineat, esse

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{hz_1}{\sqrt{Z_1}}\right),$$

pervenimus ad relationes:

$$x' - x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{hz}{\sqrt{Z}}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{Z}}{hz}\right), \text{ et}$$

$$x'_1 - x' = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{hz_1}{\sqrt{Z_1}}\right) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{Z_1}}{hz_1}\right),$$

e quibus, substituendo valores quantitatum x, x_1, x'_1 et x' in articulis praecedentibus inventos, oriuntur relationes inter angulos φ, φ_1, ψ et ψ_1, quas etiam ulterius reduces, si memineris, esse $\tang \sigma = \frac{\tang s}{\tang \alpha}$, et e theoria integralium, quae a functionibus modularibus pendent, notam esse formulam generalem

$$'D(v, m) - S(v, m) = \operatorname{arctang}\left(\frac{sn' m}{snc' m} \cdot \frac{sn v}{snc v}\right).$$

25.

Reductiones formularum, quibus areae coniugatae linearum catenarium et arcus reciproci exprimuntur.

Eruamus primo semidifferentiam arcuum homologe coniugatorum $A'M'$ et $C'N'$, quia est nexus e praeceptis geometriae sphaericae notus, hanc differentiam inter et differentiam arearum, quae ad curvarum catenariarum ipsarum arcus homologe coniugatos AM et CN pertinent. Reducenda igitur est formula ex iis (artic. 11.) composita:

$$\tfrac{1}{2}(A'M'-C'N') = \frac{(a'-c')v}{l} - S(v, p') + S(v, L'-p').$$

E formulis

$$tn'p' = \sqrt{\frac{a'+d'}{c'-d'}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha-2\varrho\sin\alpha\cos\alpha}{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha+2\varrho\sin\alpha\cos\alpha}}, \quad \text{et}$$

$$tnc'p' = \sqrt{\frac{b'+c'}{a'-b'}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha+2\varrho\sin\alpha\cos\alpha}{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha-2\varrho\sin\alpha\cos\alpha}},$$

patet primum, esse parametrum $L'-p' > p'$, sive $p' < \tfrac{1}{2}L$, quare integralium differentia reducetur ad unicum, cuius parameter est $L'-2p' = n$, et eruendae ante omnia sunt formulae, quibus exprimantur valores functionum modularium huius argumenti n. Est primo $tnc'n = tn'(2p') = \frac{2tn'p.dn'p}{1-tn'^2p'dn'^2p'}$ $= \frac{2l}{b'+c'-a'-d'} = \frac{l}{\varrho\sin 2\alpha}$ et ideo $tn'n = \frac{\varrho\sin 2\alpha}{l'}$. Quare habemus formulas

$$1.\quad \left\{\begin{array}{ll} sn'n = \frac{\operatorname{tang} g \sin 2\alpha}{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha}, & snc'n = \frac{l}{\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha}, \\ cn'n = \frac{l}{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha}, & cnc'n = \frac{\operatorname{tang} g \sin 2\alpha}{\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha}, \\ tn'n = \frac{\operatorname{tang} g \sin\alpha}{l'}, \quad \text{et} & tnc'n = \frac{l}{\operatorname{tang} g \sin 2\alpha}, \\ dn'n = \frac{l'(\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha)}{l(\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha)}, & dnc'n = \frac{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha}{\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha}, \end{array}\right.$$

Quia in articulo praeced. invenimus $cn'(L'-q-r) = \frac{l'}{\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha} = cn'n$ patet, novum parametrum esse $n = \pm(L'-q-r) = L'-2p'$, ideoque esse

$$2.\quad \text{aut } p' = \tfrac{1}{2}(q+r) \text{ aut } L'-p' = {}^{2}(q+r).$$

Valere formulam secundam, ideoque primam esse falsam, in art. seq. monstrabitur.

Quia $S(v, L'-p') - S(v, p') = S(v, n) + v(\lambda^2\, inc'p'\, tn'p\, tn'n)$ $-\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\lambda^2\lambda'^2 snc'p' sn'p' sn'n\, sn v\, snc v}{dnc'p' dn'p' dn'n - \lambda^2 snc^2 v}\right)$, est $\tfrac{1}{2}(A'M'-C'N') = (\frac{a'-c'}{l}$ $+\lambda^2 tnc'p'\, tn'p\, tn'n)v + S(v, n) - \chi$, ponendo

$$\tan g\,\chi = \frac{\lambda^2 \lambda'^2\, snc'p'\, sn'p'\, sn'n\, snc\, snc\, v}{dnc'p\, dn'p'\, dn'n - \lambda^2\, snc^2 v}.$$

Quia vero $tn'p\; tnc'p = \frac{1}{\lambda}$, est $\lambda^2 tnc'p'\; tn'p'\; tn'n = \lambda\, tn'n = \frac{\tan g\, g \sin 2\alpha}{l}$, et quum $\frac{a'-c'}{l} = -\frac{\tan g\, g \sin 2\alpha}{l}$, invenimus

$$\tfrac{1}{2}(A'M' - C'N') = S(\varrho, n) - \text{arc tang}\left(\frac{2\varepsilon' \sin\alpha}{l} \cdot \frac{\tan g\, g \sin 2\alpha\, sn\, v\, snc\, v}{\varepsilon\cos\alpha + \varepsilon'\sin\alpha - (\varepsilon\cos\alpha - \varepsilon'\sin\alpha)\, snc^2 v}\right).$$

Quia insuper $\frac{1}{2}(A'M' + C'N') = \sigma$, arcus reciproci ipsi exprimuntur formulis

$$3.\quad \begin{cases} A'M' = \sigma + S(\varrho, n) \\ \quad - \text{arc tang}\left(\frac{2\varepsilon \sin\alpha}{l} \cdot \frac{\tan g\, g \sin 2\alpha .\, sn\, v\, snc\, v}{\varepsilon\cos\alpha + \varepsilon'\sin\alpha - (\varepsilon\cos\alpha - \varepsilon'\sin\alpha)\, snc^2 v}\right), \\ C'N' = \sigma - S(\varrho, n) \\ \quad + \text{arc tang}\left(\frac{2\varepsilon' \sin\alpha}{l} \cdot \frac{\tan g\, g \sin 2\alpha .\, sn\, v\, snc\, v}{\varepsilon\cos\alpha + \varepsilon'\sin\alpha - (\varepsilon\cos\alpha - \varepsilon'\sin\alpha)\, snc^2 v}\right). \end{cases}$$

Si arcus $A'M'$ et $C'N'$ eo extendimus, ut fiunt $A'B'$ et $C'D'$, est $\sigma = \frac{1}{2}\pi$ et $\varrho = L$; quare est

$$4.\quad \begin{cases} \text{arcus } A'B' = \frac{1}{2}\pi + S(L, n), \\ \text{arcus } C'D' = \frac{1}{2}\pi - S(L, n). \end{cases}$$

In formulis (3) est $= \frac{2\varepsilon\cos\alpha}{l} \cdot \frac{tn\, v}{dn\, v}$. Si vero arcus $A'M'$ et $C'N'$ computare vis, e formulis mode erutis, ratione ad arcum coniugatum non habita, substituas

$\sigma = \text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{(c'-z')(c'+z')}{(z'-d')(d'+z')}}\right)$ in computando $A'M'$, at

$\sigma = \text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{(c'-z'_1)(a'+z'_1)}{(z'_1-d')(b'+z'_1)}}\right)$ in computando $C'N'$.

Areae f et f_1 etiam inveniuntur e formulis his, dummodo memineris esse

$$5.\quad \begin{cases} f = A'M' - \text{arc cos}\left(\frac{h}{\cos y(\sin y - e)}\right), \\ f_1 = C'N' - \text{arc cos}\left(\frac{h}{\cos y_1(\sin y_1 + e)}\right), \end{cases}$$

et quia cosinus in formulis his obvii unitati aequales fiunt, si areae f et f_1 usque ad applicatas B et D extenduntur, areae, quae nunc sint F et F_1, exprimuntur formulis satis simplicibus

$$6.\quad \begin{cases} F = A'B' = \frac{1}{2}\pi + S(L, n), \\ F_1 = C'D' = \frac{1}{2}\pi - S(L, n). \end{cases}$$

Eodem perveniemus, si formulas, quibus summae et differentiae abscissarum et arearum exprimuntur in (artic. 23.) probatas alio modo coniungimus. Oriuntur primo:

$$\tfrac{1}{2}(f-f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\frac{hv}{l(1+d)}-\frac{hv}{l(1+b)}+{}'D(v,q)-{}'D(v,L'-r),$$

$$\tfrac{1}{2}(f-f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\frac{hv}{l(1-b)}-\frac{hv}{l(1-d)}+{}'D(v,r)-{}'D(v,L'-q).$$

Ante omnia nunc eruendum est, parametrorum differentiae an sint positivae nec ne. Invenitur autem ope formulae $tn'(a+b)=\frac{tn'a\,dn'b+dn'a\,tn'b}{1-tn'a\,dn'b\,tn'b\,dn'a}$, generalis esse $tn'(q+r)=-tn'2p'$, unde concludimus esse $L-(q+r)$ negativum. Quare vides esse $q>L'-r$ et pariter $r>L'-q$, ideoque esse $L'-p'=\tfrac{1}{2}(q+r)$, sive $q+r-L'=n$.

Quia est ${}'D(v,q)-{}'D(v,L'-r)={}'D(v,n)+(\lambda^2 tn'q\,tnc'r.tn'n).v-\chi$, ponendo

$$\operatorname{tang}\chi=\frac{\lambda'^2\,sn'q\,snc'r\,sn'n.tnv.dnv}{1-dn'q\,dnc'r\,dn'n\,sn^2v},\quad \text{invenimus primo}$$

$$\tfrac{1}{2}(f-f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\Big(-\frac{h(d-b)}{l(1+d)(1+b)}+\lambda^2 tn'q\,tnc'r\,tn'n\Big)v+{}'D(v,n)-\chi,$$

et pariter

$$\tfrac{1}{2}(f-f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\Big(\frac{-h(d-b)}{l(1-d)(1+b)}+\lambda^2 tnc'q\,tn'r\,tn'n\Big)v+{}'D(v,n)-\chi_1,$$

$$\text{ponendo}\quad \operatorname{tang}\chi_1=\frac{\lambda'^2\,snc'q\,sn'r\,sn'n\,tnv\,dnv}{1-dnc'q\,dn'r\,dn'n\,sn^2v},$$

quae vero, cum facillime tibi persuadeas, esse

$$\frac{-h(d-b)}{l(1+d)(1+b)}+\lambda^2 tn'q\,tnc'r\,tn'v=\frac{-h(d-b)}{l(1-d)(1+b)}+\lambda^2 tnc'q\,tn'r\,tn'v=0,$$

contrahuntur ad simplices:

$$7.\quad\begin{cases}\tfrac{1}{2}(f-f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)={}'D(v,n)-\chi,\\ \tfrac{1}{2}(f-f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)={}'D(v,n)-\chi_1,\end{cases}$$

e quarum combinatione obtines

$$8.\quad x-x_1=\chi_1-\chi,$$

$$9.\quad \tfrac{1}{2}(f-f_1)={}'D(v,n)-\tfrac{1}{2}(\chi+\chi_1).$$

Fomulae, quas ad computandos angulos χ et χ_1 applicabis, satis reductae, sunt:

$$10.\quad \operatorname{tang}\chi=\frac{2l\varepsilon\sin\alpha.\operatorname{tang}g\sin2\alpha.(\varepsilon-\cos\alpha).tnv.dnv}{l^2(\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha)(\varepsilon-\sin\alpha)-l'^2(\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha)(\varepsilon+\sin\alpha)sn^2v}$$

et

$$11.\quad \operatorname{tang}\chi_1=\frac{2l\varepsilon\sin\alpha\operatorname{tang}g\sin2\alpha(\varepsilon+\cos\alpha).tnv.dnv}{l^2(\varepsilon\cos\alpha-\varepsilon'\sin\alpha)(\varepsilon+\sin\alpha)-l'^2(\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon'\sin\alpha)(\varepsilon-\sin\alpha)sn^2v}.$$

Si formulas

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1)+\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\operatorname{arc\,tang}\Big(\frac{\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}s}{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}(\pi-g))}\Big),$$

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1)-\tfrac{1}{2}(x-x_1)=\operatorname{arc\,tang}\Big(\frac{\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}s}{\operatorname{tang}(\frac{1}{4}(\pi+g))}\Big),$$

in (art. 17.) inventas, coniungis cum formulis modo erutis (7.), prodeunt novae:

$$12. \quad \begin{cases} f = + {}'D(v, n) - \chi + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,s}{\text{tang}(\frac{1}{4}\pi+g)}\right), \\ f_1 = - {}'D(v, n) + \chi + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\alpha.\text{tang}\,s}{\text{tang}(\frac{1}{4}\pi-g)}\right), \end{cases}$$

et pariter

$$13. \quad \begin{cases} f = + {}'D(v, n) - \chi_1 + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,s}{\text{tang}(\frac{1}{4}\pi-g)}\right), \\ f = - {}'D(v, n) + \chi_1 + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,s}{\text{tang}(\frac{1}{4}\pi+g)}\right), \end{cases}$$

quarum ope singulas areas f et f_1, non habita ratione ratione alterius coniugati, duplici modo computare potes. Areae usque ad applicatas extensae, quae ad vertices proximos superiores pertinent, e formulis his inveniuntur ponendo $s = \frac{1}{2}\pi$ et $v = L$, quo obtines

$$F = {}'D(L, n) \quad \text{et} \quad F_1 = \pi - {}'D(L, n),$$

quae cum supra inventis formulis (6.) congruunt.

26.

Reductiones formularum, quibus arcus coniugati linearum catenariarum et areae reciprocae exprimuntur.

Reducenda est formula ex iis articuli (8 et 9.) composita haec

$$\tfrac{1}{2}(AM - CN) = -\frac{(d-b+2e)v}{l} + {}'D(v, p) - {}'D(v, L'-p),$$

in quo non negligenda est ratio inter parametros p et $L' - p$. Quia est

$$tn'p = \sqrt{\frac{a+d}{b-a}} = \sqrt{\frac{\varepsilon'\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha + \varrho}{\varepsilon'\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha - \varrho}} \quad \text{et} \quad tnc'p = \sqrt{\frac{b+c}{d-c}} = \sqrt{\frac{\varepsilon'\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha - \varrho}{\varepsilon'\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha + \varrho}},$$

vides esse

$$p > L' - p, \quad \text{sive} \quad p > \tfrac{1}{2}L'.$$

Quare ponamus $u = 2p - L'$, quam differentiam positivam esse modo invenimus, et adhibeamus formulam

$${}'D(v, p) - {}'D(v, L'-p) = {}'D(v, u) + (\lambda^2 tn'p\, tnc'p\, tn'u)v - M,$$

$$\text{ponendo} \quad \text{tang}\, M = \frac{\lambda'^2 sn'p\, snc'p\, sn'u . tn\,v\, dn\,v}{1 - dn'p\, dnc'p\, dn'u\, sn^2 v}, \quad \text{quo fit}$$

$$\tfrac{1}{2}(AM - CN) = (\lambda^2 tn'p\, tnc'p\, tn'u - \frac{d-b+2e}{l})v + {}'D(v, u) - M.$$

Ante omnia eruendi sunt valores functionum modularium novi parametri u. Quia vero $tnc'u = tn'(2L' - 2p) = -tn'2p = -\frac{2tn'p\, dn'p}{1 - tn'^2 p\, dn'^2 p} = \frac{l}{\varrho}$, ideoque $tn'u = \frac{\varrho}{l'}$, invenimus formulas:

$$1.\quad \begin{cases} sn'u = \frac{\varrho}{\varepsilon'\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha}, \\ cn'u = \frac{l'}{\varepsilon'\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha}, \\ tn'u = \frac{\varrho}{l}, \\ dn'u = \frac{l'(\varepsilon'\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha)}{l(\varepsilon'\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha)}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} snc'u = \frac{l}{\varepsilon'\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha}, \\ cnc'u = \frac{\varrho}{\varepsilon'\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha}, \\ tnc'u = \frac{l}{\varrho}, \\ dnc'u = \frac{\varepsilon'\cos\alpha - \varepsilon\sin\alpha}{\varepsilon'\cos\alpha + \varepsilon\sin\alpha}. \end{cases}$$

Nunc vero est $\lambda^2 tn'p\, tnc'p\, tn'u = \lambda\, tn'u = \frac{\varrho}{l}$, et quia $\frac{d-b+2e}{l} = \frac{2\varrho\sin^2\alpha+2e}{l}$ $= \frac{\varrho+e}{l}$, invenimus formulam

$$2.\quad \tfrac{1}{2}(AM-CN) = -\frac{ev}{l} + {}'D(v, u) - M,$$

in qua angulum M computabis ope formulae

$$3.\quad \tang M = \frac{2\varrho l\varepsilon\sin\alpha . tnv . dnv}{l^2(\varepsilon'\cos\alpha-\varepsilon\sin\alpha) - l^2(\varepsilon'\cos\alpha+\varepsilon\sin\alpha)sn^2v}.$$

Quia insuper est $\tfrac{1}{2}(AM+CN) = s$, oriuntur

$$4.\quad \begin{cases} AM = s - \frac{ev}{l} + {}'D(v, u) - M, \\ CN = s + \frac{ev}{l} - {}'D(v, u) + M, \end{cases}$$

quarum ope et singulos arcus non habita ratione alterius coniugati computare possumus. Quia in (artic. 24.) invenimus $cn'(L'-q'-r') = \frac{l'}{\varepsilon'\cos\alpha-\varepsilon\sin\alpha}$, videmus esse $cn'(L'-q'-r') = cn'u$, unde concludimus esse

$$u = \pm(L'-q'-r') = 2p' - L', \quad \text{quare}$$
$$\text{aut} \quad p = \tfrac{1}{2}(q'+r'), \quad \text{aut} \quad p = L' - \tfrac{1}{2}(q'+r') \quad \text{erit.}$$

Quia vero $tn'(q'+r') = \frac{tn'q\,dn'r + tn'r\,dn'q}{1 - tn'q\,tn'r . dn'r\,dn'q} = +\, tnc\,u$, est $p = L' - \tfrac{1}{2}(q'+r')$ et $u = L'-(q'+r')$, et quum e formulis (artic. 19.) componi possunt formulae

$$\tfrac{1}{2}(f'-f_1') + \tfrac{1}{2}(x'-x'_1) = \left(\frac{h+ea'}{l(1-a')} - \frac{h-ec'}{l(1-c')}\right)v - S(v, q) + S(v, L'-r'),$$
$$\tfrac{1}{2}(f'-f_1') - \tfrac{1}{2}(x'-x'_1) = \left(\frac{h-ec'}{l(1+c')} - \frac{h+ea'}{l(1+a')}\right)v + S(v, L'-q') - S(v, r),$$

vel, si mavis,

$$\tfrac{1}{2}(f'-f_1') + \tfrac{1}{2}(x'-x'_1) = -\frac{ev}{l} + \left(\frac{e(1-a'c')-h(c'-a')}{l(1-a')(1-c')}\right)v + S(v, L'-r') - S(v, q'),$$
$$\tfrac{1}{2}(f'-f_1') - \tfrac{1}{2}(x'-x'_1) = -\frac{ev}{l} + \left(\frac{e(1-a'c')-h(c'-a')}{l(1+a')(1+c')}\right)v + S(v, L'-q') - S(v, r').$$

ambae integralium differentiae reducuntur ad idem integrale $S(\varrho, u)$, cuius parameter $u = L' - r' - q'$, adhibitis formulis

$$S(\varrho, L'-r') - S(\varrho, q') = S(\varrho, u) + (\lambda^2 tnc' r' tn' q' tn' u)\varrho - \Omega, \quad \text{si ponitur}$$

$$\tang \Omega = \frac{\lambda^2 l'^2 snc' r' sn' q\, sn' u . snv\, sncv}{dnc' r' dn' q\, dn' u - \lambda^2 sn^2 v} \quad \text{et}$$

$$S(\varrho, L'-q') - S(\varrho, r') = S(\varrho, u) + (\lambda^2 tnc' q' tn' r' tn' u)\varrho - \Omega_1, \quad \text{posito}$$

$$\tang \Omega_1 = \frac{\lambda^2 \lambda'^2 snc' q' sn' r' sn' u . snv\, sncv}{dnc' q' dn' r' dn' u - \lambda^2 sn^2 v}.$$

Quia est $\lambda^2 tnc' r' tn' q' tn' u = \frac{\varrho}{l} \cdot \frac{\varepsilon + \cos\alpha}{\varepsilon - \cos\alpha} = \frac{\varrho \sin^2\alpha - \varrho^3 \cos^2\alpha}{l(\varepsilon - \cos\alpha)^2}$ et $\frac{e(1-a'c') - h(c'-a')}{l(1-a')(1-c')}$ $= \frac{-\varrho \sin^2\alpha + \varrho^3 \cos^2\alpha}{l(\varepsilon - \cos\alpha)^2}$, formula prima reducitur ad

$$5. \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(f'-f_1') + \frac{1}{2}(x'-x'_1) = -\frac{ev}{l} + S(\varrho, u) - \Omega, \\ \text{et pariter altera ad} \\ \frac{1}{2}(f'-f_1') + \frac{1}{2}(x'-x'_1) = -\frac{ev}{l} + S(\varrho, u) - \Omega_1; \end{cases}$$

quare, tum addendo tum subtrahendo, invenis

$$6. \quad \tfrac{1}{2}(f'-f_1') = -\frac{ev}{l} + S(\varrho, u) - \tfrac{1}{2}(\Omega + \Omega_1)$$

et

$$7. \quad x' - x'_1 = \Omega - \Omega_1.$$

Formulae ad computandos angulos auxiliares aptissimae nunc vero sunt

$$8. \quad \begin{cases} \tang \Omega = \dfrac{2\varrho l\varepsilon' \sin\alpha . (\varepsilon + \cos\alpha) . snv\, sncv}{(\varepsilon' - \sin\alpha)(\varepsilon' \cos\alpha + \varepsilon \sin\alpha) - (\varepsilon' + \sin\alpha)(\varepsilon' \cos\alpha - \varepsilon \sin\alpha) sn^2 v}, \\ \tang \Omega_1 = \dfrac{2\varrho l\varepsilon' \sin\alpha . (\varepsilon - \cos\alpha) . snv\, sncv}{(\varepsilon' + \sin\alpha)(\varepsilon' \cos\alpha + \varepsilon \sin\alpha) - (\varepsilon' - \sin\alpha)(\varepsilon' \cos\alpha - \varepsilon \sin\alpha) sn^2 v}. \end{cases}$$

Si cum formulis (5) coniungimus inventas in (artic. 20.) has:

$$\tfrac{1}{2}(f'+f_1') - \tfrac{1}{2}(x'-x'_1) = \text{arc tang}\left(\frac{\tang \sigma}{\tang(\alpha+g)}\right),$$

$$\tfrac{1}{2}(f'+f_1') + \tfrac{1}{2}(x'-x'_1) = \text{arc tang}\left(\frac{\tang \sigma}{\tang(\alpha-g)}\right);$$

tum addendo, tum subtrahendo, oriuntur:

$$9. \quad \begin{cases} f' = -\frac{ev}{l} + S(\varrho, u) - \Omega + \text{arc tang}\left(\dfrac{\tang \sigma}{\tang(\alpha+g)}\right), \\ f_1' = \frac{ev}{l} - S(\varrho, u) + \Omega + \text{arc tang}\left(\dfrac{\tang \sigma}{\tang(\alpha-g)}\right), \end{cases}$$

vel etiam hae

$$10. \quad \begin{cases} f' = -\frac{ev}{l} + S(\varrho, u) - \Omega_1 + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha-g)}\right), \\ f_1' = +\frac{ev}{l} - S(\varrho, u) + \Omega_1 + \text{arc tang}\left(\frac{\text{tang}\,\sigma}{\text{tang}(\alpha+g)}\right). \end{cases}$$

Si arcus AM et CN extendimus usque ad vertices proximos B et D, formulae (4) praebent

$$11. \quad AB = {}'D(L, u) - \frac{e.L}{l} \quad \text{et} \quad CD = \pi - {}'D(L, u) + \frac{e.L}{l}.$$

Areae denique f' et f_1' extensae usquae ad applicatas, quae ad vertices B' et D' pertinent, si sunt F' et F_1', valent formulae

$$12. \quad \begin{cases} F' = -\frac{e.L}{l} + S(L, u) + \frac{1}{2}\pi, \\ F_1' = +\frac{e.L}{l} + S(L, u) + \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

Si inventa in praecedentibus inde ab artic. (23) perlustramus, videmus pendere abscissas x et x_1 ab integrali $'D(\varrho, m)$ et abscissas x' et x'_1 ab integrali $S(\varrho, m)$; arcus $A'M'$ et $C'N'$ pendere ab integrali $S(\varrho, n)$ et areas f et f_1 ab integrali $'D(\varrho, n)$; arcus AM et CN ab integrali $'D(\varrho, u)$, arcus vero f' et f_1' ab integrali $S(\varrho, u)$. Quia autem integralia $'D(\varrho, m)$, $'D(\varrho, n)$, $'D(\varrho, u)$ facillime reducuntur ad integralia $S(\varrho, m)$, $S(\varrho, n)$, $S(\varrho, u)$, sive haec ad illa, ope formulae generalis $'D(\varrho, m) - S(\varrho, m) = \text{arc tang}\left(\frac{sn'm}{snc'm} \cdot \frac{snv}{sncv}\right)$, patet, *computum duodecim quantitatum* x, x_1, x′, x_1', AM, CN, A′M′, C′N′, f, f_1, f′, f_1' *pendere nonnisi a computo trium integralium.* Haec de curvis coniugatis sufficiant. Eaedem curvae etiam non homologe coniugatae spectari possunt; tunc vertices A et B coniugati sunt cum verticibus D et C, et crescente applicata y, decrescit applicata y_1. Si disquisitionem hanc novam suscipis, invenies curvarum proprietates geometricas pares et formulas inventis similes. Quam rem attentione dignam addigitasse hoc loco suffficiat, et ad reliquas curvarum formas considerandas iam transeamus.

27.

De catenaria hyperbolica ea, cuius coniugata elliptica ita degenerat, ut fiat circulus.

Invenimus in articulo (5), curvam ellipticam ita degenerare posse, ut fiat circulus, quo vero in casu curva catenaria hyperbolica non est circulus. Hoc evenit, si sumitur $\nu = \gamma$, quo fit $\delta = 0$, ideoque $A = B = \frac{1}{2}\pi - \gamma$. Si e centro lineae abscissarum describis circulum minorem radio sphaerico $= \gamma$,

is est catenaria elliptica degenerata, cuius aequatio est $y=\frac{1}{2}\pi-\gamma$. Formula artic. (5.) $\cos\delta'=\frac{\sin\nu}{\cos\gamma}$ nunc fit $\cos\delta'=\operatorname{tang} g$, ideoque $\sin\delta'=\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\gamma)}$ $=\frac{\sqrt{(\cos 2\gamma)}}{\cos\gamma}$. Quia in artic. (6.) $\delta=\beta-\alpha$, fit $\alpha=\beta$, $\delta'=\frac{1}{2}\pi-2\alpha$, aequatio $\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sin\gamma}{\cos\nu}$ abit in $\sin 2\alpha=\operatorname{tang}\gamma$. Fiunt $e=\frac{\cos 2\gamma}{\cos\gamma}=\cos\gamma(1-\operatorname{tang}^2\gamma)$ $=\cos 2\alpha\sqrt{\cos 2\gamma}$ et $h=\frac{1}{2}(\sin^2 2\alpha.\sin 2\gamma)=\frac{\sin^3\gamma}{\cos\gamma}=\sin^2\gamma.\operatorname{tang}\gamma$

$$1.\quad\begin{cases} a=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\\ b=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\\ c=\frac{\sin^2\gamma-\cos\gamma\sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma}=\sin\gamma\operatorname{tang}\gamma-\cos\gamma\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\gamma)}=\frac{\varrho^2-\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\\ d=\frac{\sin^2\gamma+\cos\gamma\sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma}=\sin\gamma\operatorname{tang}\gamma+\cos\gamma\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\gamma)}=\frac{\varrho^2+\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\end{cases}$$

si ponitur $\varrho=\operatorname{tang}\gamma$.

Ne applicata $C=\arcsin(c)$ fiat negativa, $\operatorname{tang}^2\gamma>\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\gamma)}$ sive $\operatorname{tang}\gamma>\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$ esse debet.

$$2.\quad\begin{cases} a'=\sin\gamma=\frac{\varrho}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\\ b'=\sin\gamma=\frac{\varrho}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\\ c'=\sin\gamma+\operatorname{tang}\gamma\sqrt{(\cos 2\gamma)}=\sin\gamma(1+\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\gamma)})=\frac{\varrho(1+\sqrt{(1-\varrho^2)})}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\\ d'=\sin\gamma-\operatorname{tang}\gamma\sqrt{(\cos 2\gamma)}=\sin\gamma(1-\sqrt{(1-\operatorname{tang}^2\gamma)})=\frac{\varrho(1-\sqrt{(1-\varrho^2)})}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\end{cases}$$

$$e=\frac{1-\varrho^2)}{\sqrt{(1+\varrho^2)}},\qquad h=\frac{\varrho^3}{1+\varrho^2}.$$

Aequatio differentialis curvae hyperbolicae est

$$3.\quad \partial x=\frac{h\partial y}{\cos y\sqrt{(\cos^2 y(\sin y+e)^2-h^2)}}=\frac{h\partial z}{(1-z^2)(z+a)\sqrt{((z-c)(d-z))}}.$$

Sed ante omnia eruenda est relatio inter h et e conditionalis adimplenda, quo linea catenaria elliptica fiat circulus.

Ex aequationibus $(1+\varrho^2)e^2=(1-\varrho)^2$ et $h^2(1+\varrho^2)^2=\varrho^6$ per regulas Algebrae facillime invenis:

$$\varrho^2=\tfrac{1}{2}(e^2+2-e\sqrt{(e^2+8)}),\quad\text{sive}\quad 1+\varrho^2=(\tfrac{1}{2}(\sqrt{(e^2+8)}-e))^2$$

$$\text{et}\quad \varrho^2=\frac{(1-e^2)^2+(4-e^2)h^2}{2-e^2-e^4+e^2h^2}.$$

Si valorem hunc substituis in aequatione $(1+\varrho^2)e^2 = (1-\varrho^2)^2$, invenis

$$(1+e^2-2e^4+(2e^2-4)h^2)^2 = (3e^2-3e^4+4e^2h^2)(2-e^2-e^4+e^2h^2),$$

quae, evoluta et reducta, est haec:

$$(1-e^2)^4 - (8+12e^2-21e^4+e^6)h^2 + 16(1-e^2)h^4 = 0,$$

ideoque, reiecto factore $1-e^2$ tribus terminis communi, migrat in satis simplicem

$$4. \quad 16h^4 - (8+20e^2-e^4)h^2 + (1-e^2)^3 = 0.$$

Adimpleta aequatione hac conditionali, alterutra saltem curva est circulus minor, quia e^2 non vero quantitas e ipsa aequationi inest.

Sit iterum area curvae $= f$, ideoque $\partial f = z.\partial x = \frac{hz.\partial z}{(1-z^2)(z+a)\sqrt{(z-c)(d-z)}}$, et erit

$$\partial x + \partial f = \frac{h\partial z}{(1-z)(z+a)\sqrt{((z-c)(d-z))}} \quad \text{et} \quad \partial x - \partial f = \frac{h\partial z}{(1+z)(z+a)\sqrt{((z-c)(d-z))}},$$

quas formalas ut integremus, ponamus

$$t = \sqrt{\frac{z-c}{d-z}}, \quad \text{et vice versa} \quad z = \frac{c+dt^2}{1+t^2},$$

quo fit $\frac{\partial z}{\sqrt{((z-c)(d-z))}} = \frac{2(d-c).\partial t}{1+t^2}$, ideoque

$$\partial x + \partial f = \frac{2h(d-c)(1+t^2).\partial t}{[(1-c)+(1-d)t^2][a+c+(a+d)t^2]}$$
$$= \frac{2h(d-c)}{1+a}\cdot\frac{\partial t}{1-c+(1-d)t^2} + \frac{2h(d-c)}{1+a}\cdot\frac{\partial t}{a+c+(a+d)t^2},$$
$$\partial x - \partial f = \frac{2h(d-c)(1+t^2).\partial t}{[(1+c)+(1+d)t^2][a+c+(a+d)t^2]}$$
$$= \frac{2h(d-c)}{1-a}\cdot\frac{\partial t}{(a+c)+(a+d)t^2} - \frac{2h(d-c)}{1-a}\cdot\frac{\partial t}{1+c+(1+d)t^2}.$$

Si igitur sumuntur tres anguli sive arcus circulorum maximorum tales, ut sit

$$\text{tang}\, P = t.\sqrt{\frac{1-d}{1-c}}; \quad \text{tang}\, Q = t.\sqrt{\frac{1+d}{1+c}}; \quad \text{tang}\, R = t.\sqrt{\frac{a+d}{a+c}},$$

integrando inveniuntur formulae

$$x + f = \frac{2h(d-c).R}{(1+a)\sqrt{((a+c)(a+d))}} + \frac{2h(d-c).P}{(1+a)\sqrt{((1-c)(1-d))}},$$
$$x - f = \frac{2h(d-c).R}{(1-a)\sqrt{((a+c)(a+d))}} - \frac{2h(d-c).Q}{(1-a)\sqrt{((1+c)(1+d))}}.$$

Quia ob aequationem $a = b$ valet formula $\sqrt{((1-a)(1-b)(1+c)(1+d))} = (1-a)\sqrt{((1+c)(1+d))} = h$, et $d-c = 2\cos\gamma\sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)} = 2\sqrt{\cos 2\gamma}$, $(a+c)(a+d) = (\frac{1}{\cos\gamma} - \sqrt{\cos 2\gamma})(\frac{1}{\cos\gamma} + \sqrt{\cos 2\gamma}) = \text{tang}^2\gamma(2+\cos 2\gamma)$, est

$$x+f = 4(1-\cos\gamma)\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}.R + 4\sqrt{\cos 2\gamma}.P,$$

$$x-f = 4(1+\cos\gamma)\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}.R - 4\sqrt{\cos 2\gamma}.Q,$$

unde addendo et subtrahendo concludimus

$$x = 4\sqrt{\left(\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}\right)}.R + 2\sqrt{\cos 2\gamma}.(P-Q),$$

$$f = 2\sqrt{\cos 2\gamma}.(P+Q) - 4\cos\gamma.\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}.R.$$

Si ponitur $t = \text{tang}\,\varphi$, est

$$z = c\cos\cos^2\varphi + d\sin^2\varphi, \quad \text{sive}$$

$$5. \quad \sin\gamma = z = \frac{\varrho^2 - \cos 2\varphi.\sqrt{(1-\varrho^2)}}{\sqrt{(1+\varrho^2)}}.$$

Hinc sequitur $\text{tang}\,R = \text{tang}\,\varphi.\sqrt{\frac{a+d}{a+c}}$, ideoque

$$\text{tang}\,2R = \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{((a+d)(a+c))}}{(a+c)\cos^2\varphi-(a+d)\sin^2\varphi}, \text{ sive}$$

$$\text{tang}\,2R = \frac{\sin\gamma\sqrt{(2+\cos 2\gamma)}.\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - \cos\gamma\sqrt{\cos 2\gamma}}.$$

Quia autem e formula generali

$$\sqrt{((1-\sin C)(1+\sin D))} = \cos\tfrac{1}{2}(D+C) + \sin\tfrac{1}{2}(D-C), \quad \text{et}$$
$$\sqrt{((1+\sin C)(1-\sin D))} = \cos\tfrac{1}{2}(D+C) - \sin\tfrac{1}{2}(D-C)$$

sequitur

$$\sqrt{((1-c)(1-d)} = \cos\gamma + \sin\delta' = \cos\gamma + \sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)} = \frac{\cos^2\gamma + \sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma}, \quad \text{et}$$

$$\sqrt{((1+c)(1-d))} = \cos\gamma - \sin\delta' = \cos\gamma - \sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)} = \frac{\cos^2\gamma - \sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma},$$

facillime componimus

$$\text{tang}(Q-P) = \frac{\sqrt{\cos 2\gamma}}{\cos\gamma}.\frac{\sin 2\varphi}{c'\cos^2\varphi + d'\sin^2\varphi} \text{ et } \text{tang}(P+Q) = \frac{\cos\gamma.\sin 2\varphi}{c'\cos^2\varphi - d'\sin^2\varphi}, \text{ sive}$$

$$\text{tang}(Q-P) = \frac{\sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)}}{\sin\gamma}.\frac{\sin 2\varphi}{1-\cos 2\varphi\sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)}},$$

$$\text{tang}(Q+P) = \cot\gamma.\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)}-\cos 2\varphi}.$$

Si valores hos substituis, habes formulas

$$6. \quad x = 2\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}.\text{arctang}\left(\frac{\sin\gamma\sqrt{(2+\cos 2\gamma)}\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi - \cos\gamma.\sqrt{\cos 2\gamma}}\right)$$
$$- 2\sqrt{(\cos 2\gamma)}.\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{(1-\text{tang}^2\varphi)}}{\sin\gamma}.\frac{\sin 2\varphi}{1-\cos 2\varphi\sqrt{(1-\text{tang}^2\gamma)}}\right),$$

$$7. \quad f = 2\sqrt{\cos\gamma}\,\text{arc tang}\left(\frac{\cot\gamma\sin 2\varphi}{\sqrt{(1-\tan^2\gamma)}-\cos 2\varphi}\right)$$
$$-2\cos\gamma\sqrt{\frac{\cos\gamma}{2+\cos 2\gamma}}.\text{arc tang}\left(\frac{\sin\gamma\sqrt{(2+\cos 2\gamma)}.\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi-\cos\gamma\sqrt{\cos 2\gamma}}\right).$$

Si arcus curvae $CN = s$ ponitur, est $\partial s = \frac{(z+e)\partial z}{(z+a)\sqrt{((z-c)(d-z))}} = \frac{2(d-c)(z+e).\partial t}{(z+a)(1+t^2)}$
$= 2(d-c).\frac{c+e+(d+e)t^2}{(a+c+(d+a)t^2)(1+t^2)} = 2(d-c).\frac{\partial t}{1+t^2} - \frac{2(d-c)(a-e)\partial t}{a+c+(a+d)t^2}$. Quare, integrando, invenis formulam

$$s = 2(d-c).\varphi - \frac{2(d-c)(a-e)}{\sqrt{((a+c)(a+d))}}.R, \quad \text{sive}$$

$$8. \quad s = 4\sqrt{\cos 2\gamma}.\varphi - 4\sin\gamma\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}.R$$

in qua anguli φ et R sunt iidem ac in formulis praecedentibus. Si ponimus $z = d$, fit $\varphi = P = Q = R = \frac{1}{2}\pi$, quare est

$$\text{Abscissa arcui } CD \text{ subtensa} = 2\pi.\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}},$$

$$\text{Arcus } CD \text{ ipse} = 2\pi\left(\sqrt{\cos 2\gamma} - \sin\gamma\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}\right),$$

$$\text{et area ad arcum } CD \text{ pertinens} = 2\pi\left(\sqrt{\cos 2\gamma} - \cos\gamma\sqrt{\frac{\cos 2\gamma}{2+\cos 2\gamma}}\right).$$

Curvae reciprocitatis lege coniunctae cum curva CD aequatio differentialis est

$$\partial x' = \frac{-(h-ez').\partial z'}{(1-z'^2)(z'+a')\sqrt{((z'-d')(c'-z'))}}.$$

Integrationibus etiam nunc inveniuntur formulae, quarum ope abscissas, areas et arcus computare potes, et quidem formulae ita constructae, ut functiones in ipsis contentae transcendentes sint arcus cyclici; quare in his rebus diutius commorari superfluum esse videtur.

28.

De catenaria hyperbolica ea, cuius coniugata elliptica est imaginaria.

Vidimus in casu III. (articuli 5.) curvam ellipticam esse imaginariam, at curvam hyperbolicam esse realem, neque esse circulum, si ν sumatur talis, ut sit contentus inter fines γ et $\frac{1}{2}\pi - \gamma$.

Sit iterum

$$e = \frac{\cos 2\gamma}{\cos\nu} \quad \text{et} \quad 2h = \sin 2\gamma.\tan^2\nu.$$

Si insuper ponitur $\sin y = z$ et $Z = \cos^2 y(\sin y + e)^2 - h^2$, curvae hyperbolicae aequatio differentialis erit

$$1. \quad \partial x = \frac{h.\partial z}{(1-z^2).\sqrt{Z}},$$

Quia nunc

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma - \delta, \quad C = \gamma - \delta',$$
$$B = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma + \delta, \quad \text{et} \quad D = \gamma + \delta',$$

in quibus $\cos\delta = \frac{\cos\nu}{\cos\gamma}$ et $\cos\delta' = \frac{\sin\gamma}{\cos\nu}$, ponamus iterum $\frac{1}{\cos\nu} = \varrho$, quo fit

$$\cos\delta = \varrho\cos\gamma \quad \text{et} \quad \cos\delta' = \varrho\sin\gamma;$$

vel, si δi ponitur loco δ, est

$$A = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma - \delta i, \quad C = \gamma - \delta',$$
$$B = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma + \delta i, \quad D = \gamma + \delta';$$

in quibus quantitates δ et δ' determinantur formulis his:

$$2. \quad \mathfrak{Cos}\,\delta = \varrho\cos\gamma \quad \text{et} \quad \cos\delta' = \varrho\sin\gamma.$$

Sit insuper

$$3. \quad \mathfrak{Sin}\,\delta = \varepsilon = \sqrt{(\varrho^2\cos^2\gamma - 1)} \quad \text{et} \quad \varepsilon' = \sin\delta' = \sqrt{(1-\varrho^2\sin^2\gamma)}.$$

Quia nunc

$$a = \sin A = \cos\gamma\,\mathfrak{Cos}\,\delta - i\sin\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\delta, \quad c = \sin\gamma\cos\delta' - \cos\gamma\sin\delta' = \sin C,$$
$$b = \sin B = \cos\gamma\,\mathfrak{Cos}\,\delta + i\sin\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\delta, \quad d = \sin\gamma\cos\delta' + \cos\gamma\sin\delta' = \sin D,$$
$$a' = \cos A = \sin\gamma\,\mathfrak{Cos}\,\delta + i\cos\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\delta, \quad c' = \cos\gamma\cos\delta' + \sin\gamma\sin\delta' = \cos C,$$
$$b' = \cos B = \sin\gamma\,\mathfrak{Cos}\,\delta - i\cos\gamma\,\mathfrak{Sin}\,\delta, \quad d' = \cos\gamma\cos\delta' - \sin\gamma\sin\delta' = \cos D,$$

oriuntur formulae satis simplices:

$$4. \quad \begin{cases} a = \varrho\cos^2\gamma - i\varepsilon\sin\gamma, \\ b = \varrho\cos^2\gamma + i\varepsilon\sin\gamma, \\ c = \varrho\sin^2\gamma - \varepsilon'\cos\gamma, \\ d = \varrho\sin^2\gamma + \varepsilon'\cos\gamma, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} a' = \varrho\sin\gamma\cos\gamma + i\varepsilon\cos\gamma, \\ b' = \varrho\sin\gamma\cos\gamma - i\varepsilon\cos\gamma, \\ c' = \varrho\sin\gamma\cos\gamma + \varepsilon'\sin\gamma, \\ d' = \varrho\sin\gamma\cos\gamma - \varepsilon'\sin\gamma; \end{array}$$

$$5. \quad e = \varrho\cos 2\gamma, \quad 2h = (\varrho^2 - 1)\sin 2\gamma;$$

$$Z = (z-c)(d-z)(z^2 + (a+b)z + ab).$$

Adhibeamus formulas in (§. 233.) theoriae functionum modularium demonstratas. Sit

$$n^2 = c^2 + (a+b)c + ab = (c+a)(c+b) \quad \text{et}$$
$$n'^2 = d^2 + (a+b)d + ab = (d+a)(d+b),$$

sive

$$n^2 = (\varrho - \varepsilon'\cos\gamma)^2 + \varepsilon^2\sin^2\gamma = \varrho^2 + \cos 2\gamma - 2\varrho\varepsilon'\cos\varrho,,$$
$$n'^2 = (\varrho + \varepsilon'\cos\gamma)^2 + \varepsilon^2\sin^2\gamma = \varrho^2 + \cos 2\gamma + 2\varrho\varepsilon'\cos\gamma,$$

$$6. \quad n^2 n'^2 = (\varrho^2 - 1)^2 + (\varrho^4 - 1)\sin^2 2\gamma = (\varrho^2 - 1)^2\left(1 + \frac{\varrho^2+1}{\varrho^2-1}\sin^2 2\gamma\right).$$

Quia

$$7.\quad \begin{cases} ab = \varrho^2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma, & cd = \varrho^2\sin^2\gamma - \cos^2\gamma, \\ a+b = 2\varrho\cos^2\gamma, & c+d = 2\varrho\sin^2\gamma, \\ 1+ab = (1+\varrho^2)\cos^2\gamma, & 1+cd = (1+\varrho^2)\sin^2\gamma, \\ \text{inveniuntur} & \\ \sqrt{((1+a)(1+b))} = (\varrho+1)\cos\gamma, & \sqrt{((1+c)(1+d))} = (\varrho+1)\sin\gamma, \\ \sqrt{((1-a)(1-b))} = (\varrho-1)\cos\gamma, & \sqrt{((1-c)(1-d))} = (\varrho-1)\sin\gamma. \end{cases}$$

Est insuper

$$8.\quad m = \sqrt{(ab - \tfrac{1}{2}(a+b)^2)} = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}(a-b)^2)} = \varepsilon\sin\gamma$$

et

$$cd + \tfrac{1}{2}(c+d)(a+b) + ab = \varrho^2\cos^2\gamma - \sin^2\gamma + 2\varrho\sin^2\gamma.\varrho\cos^2\gamma + \varrho^2\sin^2\gamma - \cos^2\gamma,$$

sive

$$9.\quad cd + \tfrac{1}{2}(c+d)(a+b) + ab = \varrho^2 - 1 + \tfrac{1}{2}\varrho^2\sin^2 2\gamma.$$

Quare, ponendo $cd + \frac{1}{2}(c+d)(a+b) + ab = nn'.\mu$, fit

$$10.\quad \begin{cases} \mu = \cos 2\theta = \dfrac{\varrho^2 - 1 + \frac{1}{2}\varrho^2\sin^2 2\gamma}{(\varrho^2-1)\sqrt{(1+\frac{\varrho^2+1}{\varrho^2-1}\sin^2 2\gamma)}} = \dfrac{1+\frac{\varrho^2}{2\varrho^2-2}\sin^2 2\gamma}{\sqrt{(1+\frac{\varrho^2+1}{\varrho^2-1}\sin^2 2\gamma)}}, \\ \sqrt{(1-\mu^2)} = \sin 2\theta = \dfrac{\varepsilon\varepsilon'\sin 2\gamma}{(\varrho^2-1)\sqrt{(1-\frac{\varrho^2+1}{\varrho^2-1}\sin^2 2\gamma)}}, \\ \operatorname{tang} 2\theta = \dfrac{\varepsilon\varepsilon'\sin 2\gamma}{\varrho^2 - 1 + \frac{1}{2}\varrho^2\sin^2 2\gamma}. \end{cases}$$

Si adhibito modulo

11. $\lambda = \sqrt{(\frac{1}{2}(1-\mu))} = \sin\theta$ et coniugato $\lambda' = \sqrt{(\frac{1}{2}(1+\mu))} = \cos\theta$, ponimus

$$12.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}am\,v = \sqrt{\frac{n'(z-c)}{n(d-z)}},$$

et vice versa

$$z = \frac{nd(1-cnv)+n'c(1+cnv)}{n(1-cnv)+n'(1+cnv)} = \frac{nd+n'c+(n'c-nd)cnv}{n'+n+(n'-n)cnv},$$

erit $\frac{\partial z}{\sqrt{Z}} = \frac{\partial u}{\sqrt{(nn')}}$. Formulae $\lambda = \sqrt{(\frac{1}{2}(1-\mu))}$ et $\lambda' = \sqrt{(\frac{1}{2}(1+\mu))}$ etiam sic exhiberi possunt:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\sqrt{((c+a)(c+b)(d+a)(d+b))} - 2ab - 2cd - (c+d)(a+b)}{4\sqrt{[(c+a)(c+b)(d+a)(d+b)]}}},$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{2\sqrt{((c+a)(c+b)(d+a)(d+b))} + 2ab + 2cd + (c+d)(a+b)}{4\sqrt{[(c+a)(c+b)(d+a)(d+b)]}}},$$

et quia $2ab + 2cd + (c+d)(a+b) = (d+a)(c+b) + (c+a)(d+b)$, invenis

$$13.\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\sqrt{((d+a)(c+b))}-\sqrt{((o+a)(d+a))}}{2i\sqrt{(nn')}} \\ = \dfrac{\sqrt{(\varrho^2-1+\frac{1}{2}\varrho^2\sin^2 2\gamma+i\varepsilon\varepsilon'\sin 2\gamma)}-\sqrt{((\varrho^2-1+\frac{1}{2}\varrho^2\sin^2 2\gamma-i\varepsilon\varepsilon'\sin 2\gamma)}}{2\sqrt{(nn')}}, \\ \lambda' = \dfrac{\sqrt{((d+a)(c+b))}+\sqrt{((c+a)(d+b))}}{2\sqrt{(nn')}} \\ = \dfrac{\sqrt{(\varrho^2-1+\frac{1}{2}\varrho^2\sin^2 2\gamma+i\varepsilon\varepsilon'\sin 2\gamma)}+\sqrt{(\varrho^2-1+\frac{1}{2}(\varrho^2\sin^2 2\gamma-i\varepsilon\varepsilon'\sin 2\gamma)}}{2\sqrt{(nn')}}, \end{cases}$$

unde perspicis, modulus λ et λ' et aliis modis computari posse.

Sit iterum f area curvae ad arcum CN pertinens, sive $\partial f = \frac{z\partial z}{(1-z^2)\sqrt{Z}}$ $= \frac{hz\partial u}{(1-z^2)\sqrt{(nn')}}$, ideoque

$$\partial x + \partial f = \frac{h}{\sqrt{(nn')}}\cdot\frac{\partial u}{1-z} \quad \text{et} \quad \partial x - \partial f = \frac{h}{\sqrt{(nn')}}\cdot\frac{\partial u}{1+z}.$$

Quia

$$1+z = \frac{n(1+d)+n'(1+c)+(n'(1+c)-n(1+d))\,\mathrm{cn}\,v}{n'+n+(n'-n)\,\mathrm{cn}\,v},$$

$$1-z = \frac{n(1-d)+n'(1-c)+(n'(1-c)-n(1-d))\,\mathrm{cn}\,v}{n+n'+(n'-n)\,\mathrm{cn}\,v},$$

oriuntur formulae integrandae:

$$\partial x + \partial f = \frac{h}{\sqrt{(nn')}}\cdot\frac{n+n'+(n'-n)\,\mathrm{cn}\,v}{n(1-d)+n'(1-c)+(n'(1-c)-n(1-d))\,\mathrm{cn}\,v}\cdot\partial v,$$

$$\partial x - \partial f = \frac{h}{\sqrt{(nn')}}\cdot\frac{n+n'+(n'-n)\,\mathrm{cn}\,v}{n(1+d)+n'(1+c)+(n'(1+c)-n(1+d))\,\mathrm{cn}\,v}\cdot\partial v.$$

Quia fractio formae $\frac{A+B\,\mathrm{cn}\,v}{C+D\,\mathrm{cn}\,v} = \frac{B}{D} + \frac{AD-BC}{CD}\cdot\frac{1}{1+\frac{D}{C}\mathrm{cn}\,v}$, formula prima reducitur ad

$$x+f = \frac{h(n'-n)v}{(n'(1-c)-n(1-d)\sqrt{(nn')}} + \frac{2h(d-c).\sqrt{(nn')}}{n'^2(1-c)^2-n^2(1-d)^2}\cdot\int_0 \frac{\partial v}{1+g\cdot\mathrm{cn}\,v}$$

si $g = \frac{n'(1-c)-n(1-d)}{n'(1-c)+n(1-d)}$ ponitur, et altera ad

$$x-f = \frac{h(n'-n)v}{(n'(1+c)-n(1+d)\sqrt{(nn')}} - \frac{2h(d-c)\sqrt{(nn')}}{n'^2(1+c)^2-n^2(1+d)^2}\cdot\int_0 \frac{\partial v}{1+g'\cdot\mathrm{cn}\,v},$$

si $g' = \frac{n'(1+c)-n(1-d)}{n'(1+c)+n(1+d}$ ponimus.

29.

His praeparatis integrationes absolvimus. Comparemus integrale $\int_0 \frac{\partial v}{1+g.\mathrm{cn}\,v}$ cum formula (2.) in (§. 212.) theoriae functionum modularium demonstrata:

$$\int_0 \frac{tnc'p\,dnc'p.\partial v}{1-cnc'p.cnv} = \frac{v}{sn'p\,snc'p} - \text{arc tang}\left(\frac{\lambda\,cnc\,v}{\lambda' cn'p}\right) - S(\varrho, p).$$

Quem in finem ponamus $cnc'p = g$, sive

$$cnc'p = \frac{n'(1-c)-n(1-d)}{n'(1-c)+n(1-d)}.$$

Hac ex formula deducimus facillime $\frac{1-cnc'p}{1+cnc'p} = \frac{n(1-d)}{n'(1-c)}$, sive

$$1. \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}amc'p = \sqrt{\frac{n(1-d)}{n'(1-c)}}.$$

Porro est

$$snc'p = \frac{2\sqrt{(nn')}.\sqrt{((1-c)(1-d))}}{n'(1-c)+n(1-d)};\ \lambda' snc'p = \frac{\sqrt{((d+a)(c+b))}+\sqrt{((c+a)(d+b))}}{n'(1-c)+n(1-d)}\sqrt{((1-c)(1-d))},$$

ideoque $dnc'p = \sqrt{(1-\lambda^2 snc^2 p)} = \frac{(d-c)\sqrt{((1+a)(1+b))}}{n'(1-c)+n(1-d)}$,

$$tnc'p = \frac{2\sqrt{(nn')}.\sqrt{((1-c)(1-d))}}{n'(1-c)-n(1-d)}.$$

E formulis his componis $tnc'p.dnc'p = \frac{2(d-c)\sqrt{(nn')}.\sqrt{((1+a)(1+b)(1+c)(1+d))}}{n'^2(1-c)^2-n^2(1-d)^2}$, sive

$$tnc'p.dnc'p = \frac{2h(d-c)\sqrt{(nn')}}{n'^2(1-c)^2-n^2(1-d)^2},\ \text{quare est}$$

$$x+f = \frac{h(n'-n)v}{(n'(1-c)-n(1-d))\sqrt{(nn')}} + \frac{v}{sn'p\,snc'p} - \text{arc tang}\left(\frac{\lambda\,cncv}{\lambda' cn'p}\right) - S(\varrho, p).$$

Quia est $sn'p = \frac{cnc'p}{dnc'p}$, illico obtines

$$sn'p = \frac{n'(1-c)-n(1-d)}{(d-c)\sqrt{((1+a)(1+b))}},\ \text{ideoque}$$

$$\frac{1}{snc'p\,snc'p} = \frac{d-c}{2\sqrt{(nn')}}\cdot\frac{n'(1-c)+n(1-d)}{n'(1-c)-n(1-d)}\cdot\frac{\sqrt{((1+a)(1+b))}}{\sqrt{((1-c)(1-d))}}$$
$$= \frac{h(d-c)}{2(1-c)(1-d)\sqrt{(nn')}}\cdot\frac{n'(1-c)+n(1-d)}{n'(1-c)-n(1-d)};$$

quo valore substituto formulam contrahes ad satis simplicem hanc:

$$x+f = \frac{h(1-\frac{1}{2}(c+d))v}{(1-c)(1-d).\sqrt{(nn')}} - \text{arc tang}\left(\frac{\lambda\,cnc\,v}{\lambda' cn'p}\right) - S(\varrho, p),$$

in qua valores $1-\varrho\sin^2\gamma$ pro $1-\frac{1}{2}(c+d)$ et $(\varrho-1)^2.\sin^2\gamma$ pro $(1-c)(1-d)$ substituendi sunt.

Si formulam differentialem, qua $\partial x - \partial f$ exprimitur, comparas cum ea, quae summam $\partial x+\partial f$ perhibet, videbis, permutanda esse $-a, -b, -c, -d$ cum a, b, c, d; quo si parameter p abit in q, valent formulae

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}amc'q = \sqrt{\frac{n(1+d)}{n'(1+c)}},$$

$$cnc'q = \frac{n'(1+c)-n(1+d)}{n'(1+c)+n(1+d)},$$

$$snc'q = \frac{2\sqrt{(nn')}.\sqrt{((1+a)(1+d))}}{n'(1+c)+n(1+d)},$$

$$dnc'q = \frac{(d-c)\sqrt{((1+a)(1+b))}}{n'(1+c)+n(1+d)},$$

$$tnc'q = \frac{2\sqrt{(nn')}.\sqrt{((1+c)(1+d))}}{n'(1+c)-n(1+d)},$$

$$sn'q = \frac{n'(1+c)-n(1+d)}{(d-c)\sqrt{((1-a)(1-b))}},$$

et

$$x - f = \frac{h(1+\frac{1}{2}(c+d))v}{(1+c)(1+d)\sqrt{(nn')}} + \text{arc tang}\left(\frac{\lambda\, cnc\, v}{\lambda' cn'q}\right) + S(v, q).$$

Si vis abscissam x et aream f eo extendere, ut pertineant ad arcum CD inter vertices proximos contentum, est $z = d$, ideoque $v = 2L$, quare nunc est $cnc\,v = 0$, et

$$X + F = \frac{h(2-c-d)L}{(1-c)(1-d)\sqrt{(nn')}} - S(2L, p),$$

$$X - F = \frac{h(2+c+d)L}{(1+c)(1+d)\sqrt{(nn')}} + S(2L, q).$$

30.

Derivatu facilior est formula, quae longitudinem arcus hyperbolicis $CN = s$ exprimit. Quia est $\partial s = \frac{(z+c)\partial z}{\sqrt{Z}} = \frac{(z+e)\partial v}{\sqrt{(nn')}}$, est

$$s = \frac{ev}{\sqrt{(nn')}} + \frac{1}{\sqrt{(nn')}}\int_0 \frac{nd+n'c+(n'c-nd)\,cnv}{n'+n+(n'-n)\,cnv}.\partial v,$$

quae, adhibita formula $\frac{A+B\,cnu}{C+D\,cnu} = \frac{B}{D} + \frac{AD-BC}{CD}\cdot\frac{1}{1+\frac{D}{C}cnu}$, mutatur in

$$s = \frac{ev}{\sqrt{(nn')}} + \frac{(n'c-nd)}{n'-n}\cdot\frac{v}{\sqrt{(nn')}} + \frac{2\sqrt{(nn')}.(d-c)}{n'^2-n^2}\cdot\frac{\partial v}{1+\frac{n'-n}{n'+n}cnv},$$

quare integratio contingit adhibita eadem formula generali, qua in articulo praeced. usi sumus. Eligamus parametri signum r et ponamus nunc

$$cnc'r = \frac{n'-n}{n'+n}, \text{ quo fiunt}$$

$$snc'r = \frac{2\sqrt{(nn')}}{n'+n},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}amc'r = \sqrt{\frac{n}{n'}},$$

$$tnc'r = \frac{2\sqrt{(nn')}}{n'-n},$$

$$\lambda' sncr = \frac{\sqrt{((d+a)(c+b))}+\sqrt{((c+a)(d+b))}}{n'+n},$$

$$dnc'r = \frac{d-c}{n'+n},$$

$$sn'r = \frac{n'-n}{d-c},$$

unde compones $tnc'r\, dnc'r = \dfrac{2(d-c)\sqrt{(nn')}}{n'^2-n^2}$ et $\dfrac{1}{sn'r\, snc'r} = \dfrac{d-c}{2\sqrt{(nn')}} \cdot \dfrac{n'+n}{n'-n}$, quare est

$$s = \frac{ev}{\sqrt{(nn')}} + \frac{n'c-nd}{n'-n} \cdot \frac{v}{\sqrt{(nn')}} + \frac{d-c}{2\sqrt{(nn')}} \cdot \frac{n'+n}{n'-n} \cdot v - \text{arc tang}\left(\frac{\lambda\, cncv}{\lambda' cn'r}\right) - S(v,r),$$

sive, magis reducta,

$$s = \frac{(e+\frac{1}{2}(c+d))v}{\sqrt{(nn')}} - \text{arc tang}\left(\frac{\lambda\, cncv}{\lambda' cn'r}\right) - S(v,r).$$

Si arcus s extenditur a puncto sive vertice C usque ud verticem proximum D, arcus exprimitur formula

$$CD = \frac{(2e+c+d)L}{\sqrt{(nn')}} - S(2L, r).$$

Formulae ab inventis parum diversae inveniuntur, quibus tum abscissa x', tum area f' curvae reciprocae et arcus reciprocus $C'N'$ ipse exprimuntur; sed has res difficultatibus obnoxias nullis mittamus nunc omnes, cum relationes inter curvas reciprocas intercedentes sint notissimae.

Monasterii Guestph. d. 8. Martii 1845.

15.

Note sur quelques intégrales définies.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch,* professeur à l'université de Jena.)

Parmi les différentes méthodes de calculer les intégrales

$$1.\quad \int_0^\infty \frac{\cos x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2},$$

il n'y a aucune dont l'application aux intégrales analogues

$$2.\quad \int_0^\infty \frac{\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2},$$

n'ait pas de difficultés. C'est pourquoi le développement suivant de ces quatre intégrales aura peut-être quelque interèt.

I.

Pour trouver les valeurs des deux intégrales énoncées (1.), nous considérerons la somme

$$3.\quad \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta-a)}{\theta-a}\partial\theta + \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta+a)}{\theta+a}\partial\theta,$$

qui peut aussi être présentée sous la forme

$$4.\quad 2\cos ax \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta}{\theta^2-a^2}\partial\theta - 2a\sin ax \int_0^\infty \frac{\cos x\theta}{\theta^2-a^2}\partial\theta,$$

comme on le trouvera aisément, en décomposant $\sin x(\theta-a)$ et $\sin x(\theta+a)$.

Mettant pour abréger:

$$5.\quad y = \int_0^\infty \frac{\cos x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2},$$

on aura, en fesant varier la constante x:

$$6.\quad -\frac{\partial y}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2},$$

et en vertu de l'identité des expressions (3) et (4):

$$7.\quad -2\cos ax.\frac{\partial y}{\partial x} - 2a\sin ax.y$$
$$= \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta-a)}{\theta-a}\partial\theta + \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta+a)}{\theta+a}\partial\theta.$$

Les intégrales à droite peuvent être transformées comme suit, à l'aide des substitutions $\theta - a = \eta$, $\theta + a = \omega$:

$$\int_{-a}^{\infty}\frac{\sin x\eta}{\eta}\partial\eta + \int_{a}^{\infty}\frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega = \int_{-a}^{\infty}\frac{\sin x}{\eta}\partial\eta + \int_{a}^{\infty}\frac{\sin x\eta}{\eta}\partial\eta + \int_{a}^{\infty}\frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega,$$

et en remplaçant η par ω, ce qui est permis dans une intégrale définie, on aura

$$2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega + 2\int_{a}^{\infty}\frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\eta + 2\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega.$$

Si x n'est ni zéro ni négatif, la valeur de l'intégrale à droite est $2.\frac{1}{2}\pi$; on aura donc en vertu de l'équation (7):

$$-\cos ax.\frac{\partial y}{\partial x} - a\sin ax.y = \tfrac{1}{2}\pi;$$

donc le problême en question se réduit à l'intégration assez façile d'une équation différentielle. En effet, si nous supposons $y = \cos ax.z$, (z étant une nouvelle fonction de x), l'équation différentielle se changera en

$$-\cos^2 ax.\frac{\partial z}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

d'ou l'on tire

$$z = -\tfrac{1}{2}\pi\int\frac{\partial x}{\cos^2 ax} + C = -\frac{\pi}{2a}\,\mathrm{tang}\,ax + C,$$

et par conséquent

$$y = -\frac{\pi}{2a}\sin ax + C\cos ax,$$

c'est-à-dire, en vertu de la valeur de y:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x\theta\,\partial\theta}{\theta^2 - a^2} = -\frac{\pi}{2a}\sin ax + C\cos ax.$$

Pour trouver la constante C de l'intégrale, nous faisons $x = 0$, ce, qui donne

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\partial\theta}{\theta^2 - a^2} = C.$$

Mais comme

$$\int\frac{\partial\theta}{\theta^2 - a^2} = \tfrac{1}{4}l\left(\frac{\theta - a}{\theta + a}\right)^2 + \text{Const.},$$

on obtient

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\partial\theta}{\theta^2 - a^2} = C = 0;$$

donc nous aurons

$$8.\quad \int_{0}^{\infty}\frac{a\cos x\theta}{a^2 - \theta^2}\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi\sin ax; \qquad \infty > x > 0.$$

et en variant x:

$$9. \quad \int_0^\infty \frac{\theta \sin x\theta}{a^2-\theta^2}\partial\theta = -\tfrac{1}{2}\pi \cos ax; \qquad \infty > x > 0;$$

comme il est déjà connu.

II.

Maintenant nous allons dévélopper les valeurs des intégrales (2). Nous étions parti de la *somme* de deux intégrales (3): ici nous commencerons par la *différence*

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{\sin t(\theta-a)}{\theta-a}\partial\theta - \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta+a)}{\theta+a}\partial\theta,$$

qui aussi peut être presentée sous la forme:

$$11. \quad -2\sin ax \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta\partial\theta}{\theta^2-a^2} + 2a\cos ax \int_0^\infty \frac{\sin x\theta\partial\theta}{\theta^2-a^2}.$$

En supposant pour abrèger

$$12. \quad y = \int_0^\infty \frac{\sin\theta\partial\theta}{\theta^2-a^2},$$

nous aurons

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta\partial\theta}{\theta^2-a^2},$$

et en vertu des expressions identiques (10) et (11):

$$-2\sin ax.\frac{\partial y}{\partial x} + 2a\cos ax.y = \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta-x)}{\theta-a}\partial\theta - \int_0^\infty \frac{\sin x(\theta+a)}{\theta+a}\partial\theta.$$

Quant aux intégrales à droite, on peut les transformer en mettant $\theta-a=\eta$, $\theta+a=\omega$; elles deviennent alors

$$13. \quad = \int_{-a}^\infty \frac{\sin x\eta}{\eta}\partial\eta - \int_a^\infty \frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega = \int_{-a}^a \frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega = 2\int_0^a \frac{\sin x\omega}{\omega}\partial\omega,$$

et à l'aide de $\omega = a\theta$:

$$= 2\int_0^1 \frac{\sin ax\theta}{\theta}\partial\theta.$$

Cette intégrale ne peut pas être exprimée par les fonctions ordinaires; elle présente une nouvelle transcendante, que nous designerons par *Si*, de sorte que l'on a

$$14. \quad \int_0^1 \frac{\sin\omega\theta}{\theta}\partial\theta = Si(\omega)$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\omega}{1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{\omega^7}{1.2\ldots 7} + \ldots$$

L'intégrale dont il est question sera donc exprimée par $Si(ax)$, et en vertu de l'équation (13) on a

$$-\sin ax.\frac{\partial y}{\partial x} + a\cos ax.y = Si(ax).$$

Pour intégrer cette équation différentielle, nous faisons $y = \sin ax . z$, ce qui donne

$$- \sin^2 ax . \frac{\partial z}{\partial x} = Si(ax),$$

et par conséquent,

$$z = - \int \frac{Si(ax)}{\sin^2 ax} \partial x + C.$$

En employant la formule connue

$$\int XY \partial x = X \int Y \partial x - \int \partial X \int Y \partial x,$$

supposant $X = Si(ax)$, $Y = \frac{1}{\sin^2 ax}$, et observant qu'en vertu de la définition de $Si(ax)$ on a

$$\partial Si(ax) = \frac{\sin ax}{x} \partial x,$$

on trouvera sans peine

$$z = - Si(ax) \int \frac{\partial x}{\sin^2 ax} + \int \frac{\sin ax}{x} \partial x \int \frac{\partial x}{\sin^2 ax} + C$$

$$= \frac{1}{a} \{ Si(ax) \cot ax - \int \frac{\cos ax}{x} \partial x \} + C$$

et

$$y = \frac{1}{a} \{ \cos ax \; Si(ax) - \sin ax \int \frac{\cos ax}{x} \partial x \} + C \sin ax;$$

et en écrivant $\frac{c}{a}$ au lieu de C, et restituant la valeur de y:

$$15. \quad \int_0^\infty \frac{\sin x\theta \partial \theta}{\theta^2 - a^2} = \frac{1}{a} \{ \cos ax \; Si(ax) - \sin ax [C + \int \frac{\cos ax}{x} \partial x] \}.$$

La differentiation relativement à x, donne encore la formule suivante:

$$16. \quad \int_0^\infty \frac{\theta \cos x\theta \partial \theta}{\theta^2 - a^2} = - \{ \sin ax \; Si(ax) + \cos ax [C + \int \frac{\cos ax}{x} \partial x] \}.$$

Pour resoudre complètement notre problème, il est encore necessaire de calculer la valeur de la constante C, introduite par l'intégration de l'équation différentielle. Ce n'est pas aussi fácile que dans le paragraphe précédent, parcequ'on ne parvient pas au bût en fésant $x = 0$ dans les équations trouvées. Il faut donc chercher un autre moyen.

Sans doute de deux choses une arrivera: ou la constante C dépendra de la quantité: a ou elle sera un nombre absolu. Cherchons donc d'abord comment la constante en question dépend de a.

L'équation (15) peut aussi être présentée sous la forme

$$17.\quad \int^{\infty} \frac{\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} = \cos ax\; Si(ax)$$
$$-\sin ax\left[C + lx - \tfrac{1}{2}\frac{(ax)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{(ax)^4}{1.2.3.4} - \ldots\right],$$

et en posant, pour abrèger,

$$C = f(a),\quad -\tfrac{1}{2}\frac{(ax)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\frac{(ax)^4}{1.2.3.4} - \ldots = \psi(ax),$$

sous la forme

$$18.\quad \int_0^{\infty} \frac{a\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} = \cos ax\; Si(ax) - \sin ax[f(a) + lx + \psi(ax)].$$

Cela donne pour $x = 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{a\sin\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} = \cos a\; Si(a) - \sin a[f(a) + \psi(a)].$$

Mettant maintenant $x\theta$ et ax à la place de θ et a, on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{a\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} = \cos ax\; Si(ax) - \sin ax[f(ax) + \psi(ax)],$$

et comme cela doit coïncider avec l'équation (18), il faut que l'on ait

$$f(ax) = f(a) + lx,$$

ou, en mettant $x = \frac{b}{a}$,

$$f(b) - f(a) = lb - la.$$

De là on tire immédiatement

$$f(a) = C = la + C',$$

où C' désigne une nouvelle constante, qui ne peut être qu'un nombre absolu. Donc en vertu de No. (17.) nous avons l'équation suivante:

$$19.\quad \int_0^{\infty} \frac{a\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-a^2} = \cos ax\left\{\frac{1}{1}\frac{ax}{1} - \frac{1}{3}\frac{(ax)^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{(ax)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\}$$
$$-\sin ax\left\{C' + l(ax) - \frac{1}{2}\frac{(ax)^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{(ax)^4}{1.2.3.4} - \ldots\right\}.$$

Cherchons maintenant la constante numerique C'. Après avoir reduit à l'unité la quantité a, multiplions toute l'équation par $e^{-x}\partial x$; alors l'intégration par rapport à x donne:

$$20.\quad \int_0^{\infty} e^{-x}\partial x \int_0^{\infty} \frac{\sin x\theta\,\partial\theta}{\theta^2-1}$$
$$= \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{1}\frac{x}{1} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right\}e^{-x}\cos x\,\partial x$$
$$+ \int_0^{\infty}\left\{\frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{1}{6}\frac{x^6}{1.2\ldots6} - \ldots\right\}e^{-x}\sin x\,\partial x$$
$$- C'\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,\partial x - \int_0^{\infty} lx\,e^{-x}\sin x\,\partial x$$

Toutes les intégrations indiquées ici, s'effectueront aisement en ayant recours aux formules

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin\beta x\,\partial x=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,e^{-\alpha x}\sin\beta x\,\partial x=\frac{\Gamma(\mu)\sin(\mu\,\mathrm{arctang}\,\frac{\beta}{\alpha})}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}\mu}},$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,e^{-\alpha x}\cos\beta x\,\partial x=\frac{\Gamma(\mu)\cos(\mu\,\mathrm{arctang}\,\frac{\beta}{\alpha})}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}\mu}},$$

Quant à l'intégrale double (20), elle peut être transformée en

$$\int_0^\infty\frac{\partial\theta}{\theta^2-1}\int_0^\infty e^{-x}\sin\theta x\,\partial x=\int_0^\infty\frac{\partial\theta}{\theta^2-1}\cdot\frac{\theta}{\theta^2+1}=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{2\theta\,\partial\theta}{\theta^4-1},$$

si l'on renverse l'ordre des intégrations. Mettant encore $\theta^2=\omega$, elle devient

$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\partial\omega}{\omega^2-1}=0,$$

comme on le trouve à l'aide de la formule

$$\int\frac{\partial\omega}{\omega^2-1}=\tfrac{1}{4}l\left(\frac{\omega-1}{\omega+1}\right)^2+\text{Const.}$$

Suivant les remarques que nous venons de faire, l'équation (20) se change en celle ci:

$$\begin{aligned}\text{21.}\quad 0=\;&\tfrac{1}{1}\frac{\cos 2.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^2}-\tfrac{1}{3}\frac{\cos 4.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^4}+\tfrac{1}{5}\frac{\cos 6.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^6}-\dots\\&+\tfrac{1}{2}\frac{\sin 3.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^3}-\tfrac{1}{4}\frac{\sin 5.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^5}+\tfrac{1}{6}\frac{\sin 7.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^7}-\dots\\&-\tfrac{1}{2}C'-\int_0^\infty lx\,e^{-x}\sin x\,\partial x.\end{aligned}$$

La dernière intégrale peut être trouvée par le procédé suivant. En prenant la dérivée de l'équation

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\sin x\,\partial x=\frac{\Gamma(\mu)\sin\mu.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^\mu}$$

par rapport à μ, on trouve sans difficulté:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\,lx\,e^{-x}\sin x\,\partial x=\frac{\Gamma(\mu)}{(\sqrt{2})^\mu}\left\{\tfrac{1}{4}\pi\cos\mu.\tfrac{1}{4}\pi-\tfrac{1}{2}l2\sin\mu.\tfrac{1}{4}\pi+\frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)}\sin\mu.\tfrac{1}{4}\pi\right\},$$

où l'on peut remplacer $\frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)}=\frac{\partial\Gamma(\mu)}{\partial\mu}:\Gamma(\mu)$ par $\frac{\partial l\Gamma(\mu)}{\partial\mu}$. D'ailleurs on a, suivant une formule connue (Voyez *Légendre*, Traité des fonctions elliptiques, tome II, page 462, No. (33)):

$$\frac{\partial l\Gamma(\mu)}{\partial\mu}=-C+\int_0^1\frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\partial x,\quad C=0{,}577\,215\,6\dots$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\, lx\, e^{-x} \sin x\, \partial x$$
$$= \frac{\Gamma(\mu)}{(\sqrt{2})^\mu}\left\{\tfrac{1}{4}\pi \cos \mu.\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}l^2 \sin \mu.\tfrac{1}{4}\pi + \left[-C + \int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\partial x\right] \sin \mu.\tfrac{1}{4}\pi\right\},$$

ce qui donne pour $\mu = 1$,

$$\int_0^\infty lx e^{-x} \sin x \partial x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}l2 - C).$$

On a donc en vertu de l'équation (21):

$$22.\quad \tfrac{1}{2}C^4 = \frac{1}{1}\frac{\cos 2.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{3}\frac{\cos 4.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^4} + \frac{1}{5}\frac{\cos 6.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^6} - \dots$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\sin 3.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^3} - \frac{1}{4}\frac{\sin 5.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^5} + \frac{1}{6}\frac{\sin 7.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^7} - \dots$$
$$+ \tfrac{1}{2}(C + \tfrac{1}{2}l2 - \tfrac{1}{4}\pi).$$

La sommation des deux séries de cette équation est facile. En effet ces séries ne sont que

$$\tfrac{1}{1}r^2 \cos 2\omega + \tfrac{1}{3}r^4 \cos 4\omega + \tfrac{1}{5}r^6 \cos 6\omega + \dots$$
$$\tfrac{1}{2}r^3 \sin 3\omega + \tfrac{1}{4}r^5 \sin 5\omega + \tfrac{1}{6}r^7 \sin 7\omega + \dots$$

pour $r = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ et $\omega = \frac{1}{4}\pi$, et dans ce cas elles peuvent être sommées par le procédé suivant. Pour $1 \geqq r \geqq -1$ on a

$$\tfrac{1}{4}l\left(\frac{1+2r\cos\omega+r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}\right) = \tfrac{1}{1}r \cos\omega + \tfrac{1}{3}r^3 \cos 3\omega + \tfrac{1}{5}r^5 \cos 5\omega + \dots$$
$$\tfrac{1}{2}\text{arc tang}\,\frac{2r\sin\omega}{1-r^2} = \tfrac{1}{1}r \sin\omega + \tfrac{1}{3}r^3 \sin 3\omega + \tfrac{1}{5}r^5 \sin 5\omega + \dots$$

En multipliant la première de ces expressions pas $r\cos\omega$ et la seconde par $r\sin\omega$, et en soustrayant le second produit du premier, on obtient

$$\tfrac{1}{2}r\left\{\tfrac{1}{2}\cos\omega\, l\left(\frac{1+2r\cos\omega+r^2}{1-2r\cos\omega+r^2}\right) - \sin\omega \text{ arc tang}\,\frac{2r\sin\omega}{1-r^2}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{1}r^2 \cos 2\omega + \tfrac{1}{3}r^4 \cos 4\omega + \tfrac{1}{5}r^6 \cos 6\omega + \dots$$

De là on tire pour $r = \frac{1}{2}\sqrt{-1}$ et $\omega = \frac{1}{4}\pi$:

$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{-1}\left\{\tfrac{1}{2}l\,\frac{1+2\sqrt{(-1)}}{1-2\sqrt{(-1)}} - \text{arc tang}\,\frac{2\sqrt{-1}}{3}\right\}$$
$$= \frac{1}{1}\frac{\cos 2.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^2} - \frac{1}{3}\frac{\cos 4.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^4} + \frac{1}{5}\frac{\cos 6.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^6} - \dots$$

En y appliquant les formules

$$\tfrac{1}{2}l\,\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\alpha-\beta\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\text{ arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha} \quad\text{et}$$
$$\text{arc tang}\,\frac{\beta\sqrt{-1}}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right),$$

il suit que l'expression

$$23. \quad \tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\,2 - \tfrac{1}{8}l5$$

donne la somme de la série en question, c'est à dire de la première en (22). De plus on a

$$-\tfrac{1}{4}l(1-2r^2\cos 2\omega+r^4) = \tfrac{1}{2}r^2\cos 2\omega + \tfrac{1}{4}r^4\cos 4\omega + \tfrac{1}{6}r^6\cos 6\omega + \ldots.$$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{r^2\sin 2\omega}{1-r^2\cos 2\omega} = \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\omega + \tfrac{1}{4}r^4\sin 4\omega + \tfrac{1}{6}r^6\sin 6\omega + \ldots.$$

En réunissant les deux équations, après avoir multiplié la première par par $r\sin\omega$ et la seconde par $r\cos\omega$, on obtient

$$\tfrac{1}{2}r\left\{-\tfrac{1}{2}\sin\omega l(1-2r^2\cos 2\omega+r^4) + \cos\omega\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{r^2\sin 2\omega}{1-r^2\cos 2\omega}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}r^3\sin 3\omega + \tfrac{1}{4}r^5\sin 5\omega + \tfrac{1}{6}r^7\sin 7\omega + \ldots.$$

et pour $r = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ et $\omega = \frac{1}{4}\pi$:

$$24. \quad \tfrac{1}{8}l(\tfrac{5}{4}) + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tang}\,\tfrac{1}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{\sin 3.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^3} - \tfrac{1}{4}\frac{\sin 5.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^5} + \tfrac{1}{6}\frac{\sin 7.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^7} - \ldots;$$

ce qui est la somme de la seconde série dans (22).

En vertu de ce que nous venons de trouver dans (23) et (24), l'équation (22) se change en

$$\tfrac{1}{2}C' = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{arc\,tang}\,2 - \tfrac{1}{8}l5 + \tfrac{1}{8}l(\tfrac{5}{4}) + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{arctang}\,\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(C+\tfrac{1}{2}l2-\tfrac{1}{4}\pi).$$

En ayant égard à la formule $\mathrm{arc\,tang}\,\gamma + \mathrm{arc\,tang}\,\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}\pi$, on tire de là

$$C' = C = 0{,}577\,215\,6\ldots.$$

En introduisant maintenant une nouvelle fonction transcendante analogue à

$$25. \quad Si(\omega) = \frac{1}{1}\frac{\omega}{1} - \frac{1}{3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

savoir

$$26. \quad Ci(\omega) = 0{,}577\,215\,6\ldots + \tfrac{1}{2}l(\omega^2)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{6}\frac{\omega^6}{1.2\ldots6} + \ldots,$$

l'équation (19) pourra être présentée sous la forme élégante:

$$27. \quad \int_0^\infty \frac{a\sin x\theta}{a^2-\theta^2}\partial\theta = Ci(ax)\sin ax - Si(ax)\cos ax, \qquad \infty > x > 0,$$

et en prenant la dérivée par rapport à x, nous aurons

$$28. \quad \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta}{a^2-\theta^2}\partial\theta = Ci(ax)\cos ax + Si(ax)\sin ax, \qquad \infty > x > 0.$$

Quant aux deux fonctions $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$, il y a à remarquer qu'il existe une relation très simple entre nos transcendantes et une nouvelle fonc-

tion qui ne diffère que très peu du logarithme intégral de Mr. *Soldner*. En effet on sait que la formule

$$li(e^{\omega}) = 0{,}577\,215\,6\ldots. + \tfrac{1}{2}l(\omega^2)$$
$$+ \frac{1}{1}\,\frac{\omega}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\,\frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

a lieu par toutes les valeurs de ω entre les limites $\omega = +\infty$, $\omega = -\infty$. En introduisant maintenant une nouvelle fonction $Ei(\omega)$, savoir

$$Ei(\omega) = 0{,}577\,215\,6\ldots. + \tfrac{1}{4}l(\omega^4)$$
$$+ \frac{1}{1}\,\frac{\omega}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\,\frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \ldots.,$$

cette nouvelle transcendante ne différera de $li(e^{\omega})$ qu'en raison des valeurs imaginaires de ω; car si par exemple ω est remplacé par $\omega\sqrt{-1}$, $\frac{1}{4}l(\omega^4)$ reste encore réél, ce qui n'a pas lieu relativement à $\frac{1}{2}l\omega^2$. En adoptant la substitution de $\omega\sqrt{-1}$ au lieu de ω, nous aurons à l'égard de définitions des $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$:

$$Ei(\omega\sqrt{-1}) = Ci(\omega) + \sqrt{-1}\,Si(\omega),$$

c'est à dire une relation tout analogue à celle, qui à lieu entre l'exponentielle d'exposant imaginaire et le cosinus et sinus.

Pour faciliter l'usage des formules (27) et (28), nous ajoutons ici une petite table des valeurs de $Ei(\omega)$, $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$ calculée par Mr. *Bretschneider*, professeur de Gotha, pour $\omega = 1, 2, 3 \ldots. 10$.

ω	$Ei(\omega)$	$Ci(\omega)$	$Si(\omega)$
1	+ 1,89511 78164	+ 0,33740 39229	+ 0,94608 30704
2	+ 4,95423 43560	+ 0,42298 08288	+ 1,60541 29768
3	+ 9,93383 25706	+ 0,11962 97860	+ 1,84865 25280
4	+ 19,63087 44701	− 0,14098 16979	+ 1,75820 31389
5	+ 40,18527 53558	− 0,19002 97497	+ 1,54993 12449
6	+ 85,98976 21424	− 0,06805 72439	+ 1,42468 75513
7	+ 191,50474 33355	+ 0,07669 52785	+ 1,45459 66142
8	+ 440,37989 95348	+ 0,12243 38825	+ 1,57418 68217
9	+ 1037,87829 0717	+ 0,05534 75313	+ 1,66504 00758
10	+ 2492,22897 62419	− 0,04545 64330	+ 1,65834 75942

16.

Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+a^2} e^{-x\theta}$.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

L'intégrale énoncée ci-dessus est une de celles dont les valeurs peuvent être calculées à l'aide des fonctions transcendantes $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$ dont nous avons parlé dans la théorie des intégrales définies et dont les définitions sont données par les équations

$$1.\quad Ci(\omega) = 0{,}577\,215\,6\ldots. + \tfrac{1}{2}l(\omega^2)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{1.2.3.4} - \frac{1}{6}\frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

$$2.\quad Si(\omega) = \frac{1}{1}\frac{\omega}{1} - \frac{1}{3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{\omega^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Pour effectuer la réduction mentionnée, on peut opérer comme suit. Soit d'abord

$$3.\quad y = \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta}.$$

En différentiant cette expression deux fois par rapport à x, on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int_0^\infty \frac{\theta^2\,\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta},$$

et par conséquent

$$4.\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = \int_0^\infty e^{-x\theta}\,\partial\theta = \frac{1}{x}.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, nous faisons

$$5.\quad y = z_1 \cos x + z_2 \sin x,$$

en désignant par z_1 et z_2 deux fonctions indéterminées de x; alors on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\,z_1 \sin x + z_2 \cos x + \frac{\partial z_1}{\partial x}\cos x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\sin x.$$

En y supposant

$$6.\quad \frac{\partial z_1}{\partial x}\cos x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\sin x = 0,$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -(z^1 \cos x + z_2 \sin x) - \frac{\partial z_1}{\partial x}\sin x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\cos x,$$

et par conséquent

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = -\frac{\partial z_1}{\partial x}\sin x + \frac{\partial z_2}{\partial x}\cos x,$$

ou en vertu de l'équation (4):

$$7. \quad \frac{\partial z_1}{\partial x}\sin x - \frac{\partial z_2}{\partial x}\cos x = -\frac{1}{x}.$$

Les quantités $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ étant eliminées des équations (6) et (7), on obtient

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\sin x}{x}, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{\cos x}{x}$$

et par conséquent

$$z_1 = A - \int \frac{\sin x}{x}\partial x, \qquad z_2 = B + \int \frac{\cos x}{x}\partial x,$$

où A et B désignent les deux constantes de l'intégration.

Maintenant on a en vertu des équations (5) et (8)

$$8. \quad \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1}e^{-x\theta} = \left(A - \int\frac{\sin x}{x}\partial x\right)\cos x + \left(B + \int\frac{\cos x}{x}\partial x\right)\sin x$$

$$= \left(A - \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)\cos x$$

$$+ \left(B + \tfrac{1}{2}l(x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right)\sin x.$$

Pour trouver les deux constantes A et B, nous faisons d'abord $x=0$, ce qui donne

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} = A = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Ayant trouvé A, nous multiplierons toute l'équation par $e^{-x}\partial x$, et nous intégrerons par rapport à x entre les limites $x=0$ et $x=\infty$, ce qui donne

$$\int_0^\infty e^{-x}\partial x + \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1}e^{-x\theta}.$$

$$= \int_0^\infty \left(\tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{1}\,\frac{x}{1} + \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{1.2\ldots5} + \ldots\right)\cos x\,\partial x$$

$$+ \int_0^\infty \left(B + \tfrac{1}{2}l(x^2) - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4}\,\frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots\right)\sin x\,\partial x.$$

Puis, ayant recours aux formules

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\,\partial x = \frac{1.2\ldots n\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{b}\right]}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\cos bx\,\partial x = \frac{1.2\ldots n\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right]}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\int_0^\infty \tfrac{1}{2} l(x^2) e^{-x} \sin x \partial x = \int_0^\infty lx e^{-x} \sin x \partial x$$

$= \frac{1}{2}(C + \frac{1}{2}l1 - \frac{1}{4}\pi)$, $C = 0{,}577\,215\,6\ldots.$, (Voyez le mémoire précédent) on obtient

$$9. \quad \int_0^\infty e^{-x}\partial x \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta}$$

$$= \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{1}\frac{\cos 2.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\cos 4.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^4} - \tfrac{1}{5}\frac{\cos 6.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^6} + \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{4}l2 - \tfrac{1}{8}\pi - \tfrac{1}{2}\frac{\sin 3.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\sin 5.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^5} - \tfrac{1}{6}\frac{\sin 7.\frac{1}{4}\pi}{(\sqrt{2})^7} + \ldots$$

En renversant l'ordre des intégrations à gauche, on trouve que l'intégrale double est égale à la suivante:

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} \int_0^\infty e^{-(\theta+1)x}\partial x = \int_0^\infty \frac{\partial\theta}{(\theta^2+1)(\theta+1)} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

Les deux séries à droite dans (9), qui contiennent les cosinus et sinus, peuvent être sommées, et l'on obtient

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{4}\pi - (\tfrac{1}{4}\text{arc tang } 2 - \tfrac{1}{8}l5) + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{4}l2 - \tfrac{1}{8}\pi$$
$$- (\tfrac{1}{8}l(\tfrac{5}{4}) + \tfrac{1}{4}\text{arc tang } 2).$$

De là suit

$$B = C = 0{,}577\,215\,6\ldots.$$

En substituant maintenant les valeurs de A et B dans l'expression cidessus et ayant égard aux définitions de $Ci(\omega)$ et $Si(\omega)$, l'équation (8) prend la forme

$$\int_0^\infty \frac{\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta} = [\tfrac{1}{2}\pi - Si(x)]\cos x + Ci(x)\sin x$$
$$= Ci(x)\sin x - Si(x)\cos x + \tfrac{1}{2}\pi\cos x.$$

De là, en différentiant suivant x, on tire

$$\int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{\theta^2+1} e^{-x\theta} = Ci(x)\cos x + Si(x)\sin x - \tfrac{1}{2}\pi\sin x.$$

En remplaçant enfin θ et x par $\frac{\theta}{a}$ et ax, les équations trouvées prennent la forme

$$10. \quad \int_0^\infty \frac{a\partial\theta}{a^2+\theta^2} e^{-x\theta} = Ci(ax)\sin ax - Si(ax)\cos ax + \tfrac{1}{2}\pi\cos ax,$$

$$11. \quad \int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{a^2+\theta^2} e^{-x\theta} = Ci(ax)\cos ax + Si(ax)\sin ax - \tfrac{1}{2}\pi\sin ax.$$

où il ne faut pas oublier que les quantités a et x doivent être essentiellement positives.

Suivant les différents résultats déjà connus, et suivant les développements

que nous avons données antérieurement, on pourra calculer une table complète des valeurs des intégrales que l'on obtient en fésant $\varphi(\theta) = e^{-x\theta}$, $\cos x\theta$, $\sin x\theta$ dans les formules generales

$$\int_0^\infty \frac{a\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2-\theta^2},\quad \int_0^\infty \frac{\theta\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2-\theta^2},\quad \int_0^\infty \frac{a\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2+\theta^2},\quad \int_0^\infty \frac{\theta\varphi(\theta)\partial\theta}{a^2+\theta^2}.$$

En effet, si pour abrèger on fait

$$12.\quad Ei(\omega) = 0{,}577\,215\,6\ldots + \tfrac{1}{4}l(\omega^4)$$
$$+\frac{1}{1}\frac{\omega}{1} + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{\omega^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

on obtient les douze formules suivantes:

$$\text{I.}\quad \int_0^\infty \frac{a\partial\theta}{a^2-\theta^2}.e^{-x\theta} = \tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) - e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{II.}\quad \int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{a^2-\theta^2}.e^{-x\theta} = \tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) + e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{III.}\quad \int_0^\infty \frac{a\partial\theta}{a^2+\theta^2}.e^{-x\theta} = Ci(ax)\sin ax - Si(ax)\cos ax + \tfrac{1}{2}\pi\cos ax,$$

$$\text{IV.}\quad \int_0^\infty \frac{\theta\partial\theta}{a^2+\theta^2}.e^{-x\theta} = Ci(ax)\cos ax + Si(ax)\sin ax - \tfrac{1}{2}\pi\sin ax,$$

$$\text{V.}\quad \int_0^\infty \frac{a\cos x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi\sin ax,$$

$$\text{VI.}\quad \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = Ci(ax)\cos ax + Si(ax)\sin ax,$$

$$\text{VII.}\quad \int_0^\infty \frac{a\cos x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax},$$

$$\text{VIII.}\quad \int_0^\infty \frac{\theta\cos x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = -\tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) + e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{IX.}\quad \int_0^\infty \frac{a\sin x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = Ci(ax)\sin ax - Si(ax)\cos ax,$$

$$\text{X.}\quad \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta}{a^2-\theta^2}.\partial\theta = -\tfrac{1}{2}\pi\cos ax,$$

$$\text{XI.}\quad \int_0^\infty \frac{a\sin x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\{e^{-ax}Ei(ax) - e^{ax}Ei(-ax)\},$$

$$\text{XII.}\quad \int_0^\infty \frac{\theta\sin x\theta}{a^2+\theta^2}.\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ax}.$$

Dans toutes ces formules il faut que $\infty > a > 0$ et $\infty > x > 0$.

17.

Nachtrag zu Abschnitt I. und II. der Untersuchungen über die analytischen Facultäten.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Freyburg im Br.)

Die Beweismethode, welche in der vorliegenden Abhandlung über die Facultäten angewendet wurde, um allgemeine Gesetze aufzustellen, besteht darin, dass zuerst die Gültigkeit derselben an Facultäten mit ganzen, positiven und negativen Exponenten gezeigt und hierauf der Schluss auf Facultäten mit gebrochenen positiven und negativen Exponenten gemacht wurde.

Diese Schlussweise rechtfertigt sich dadurch, dass positive und negative Brüche oder Quotienten Zwischenglieder in der Reihe der positiven und negativen ganzen Zahlen sind, und dass so die Gesetze, welche von den Hauptgliedern einer Reihe gelten, auch von den Zwischengliedern gelten müssen.

Obgleich diese Schlussweise, wie ich glaube, vollkommen zulässlich ist, so könnte sie doch beanstandet werden. Dem soll im Folgenden begegnet werden; was um so angemessner sein dürfte, da durch jene Schlussweise neue Sätze gefunden wurden, die so lange ungewiss sein werden, bis die Methode entweder als genügend bewiesen, oder bis die Sätze auf anderm, nicht bestrittenem Wege als richtig begründet worden sind. Da ferner die ersten Elemente der Facultäten-Theorie in Frage gestellt werden können, deren unzweifelhafte Feststellung, als erste Bedingung, vor Allem zu wünschen ist, und endlich die Richtigkeit mancher aufgestellten Sätze, wie namentlich die der Gleichungen (52. §. 11. S. 48.), nebst den daraus gezogenen Resultaten, in Abrede gestellt werden könnten: so liegt mir ob, alle diese Bedenken zu heben, und neben der in der vorliegenden Abhandlung zur Begründung der Facultäten-Theorie benutzten Schlussweise, noch einen andern Weg anzugeben, auf welchem die erlangten Sätze ebenfalls gefunden werden können; also insbesondere diese Sätze neu zu begründen. Hierdurch wird dann, ausser der andern Beweismethode, auch noch Das gewonnen, dass die von mir benutzte Schlussweise nicht ferner als unzulässlich und ungenügend erklärt werden kann: ein nicht zu übersehender Vortheil, da sie sehr einfach und bequem ist.

Um die Aufgabe zu lösen, müssen die Sätze, um deren andere allgemeine Begründung es sich handelt, und die sich in (§. 4. u. §. 11.) aufgestellt und für ein positives und negatives n nachgewiesen finden, mit geschichtlichen Notizen zusammengestellt werden. Sie sind folgende:

$$1.\quad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}},$$

$$2.\quad a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+nd)^{n|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{n|d}},$$

$$3.\quad a^{n|d} = \frac{1}{(a+nd)^{-n|d}} = \frac{1}{(a-d)^{-n,-d}},$$

$$4.\quad a^{n|-d} = \frac{1}{(a-nd)^{-n|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{-n|d}},$$

$$5.\quad a^{n|d} = d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1},$$

$$6.\quad a^{-n|d} = d^{-n}\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|1} = \frac{1}{d^n\left(\frac{d}{a}-n\right)^{n|1}},$$

$$7.\quad a^{n|d} = a^n 1^{n\left|\frac{d}{a}\right.},$$

$$8.\quad a^{-n|d} = a^{-n} 1^{-n\left|\frac{d}{a}\right.} = \frac{1}{a^n\left(1-n\frac{d}{a}\right)^{n\left|\frac{d}{a}\right.}},$$

$$9.\quad a^{n|d} = \frac{d^n}{h^n}\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|h},$$

$$10.\quad a^{-n|d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-n}\left(\frac{ah}{d}\right)^{-n|h} = \frac{h^n}{d^n\left(\frac{ah}{d}-nh\right)^{n|h}},$$

$$11.\quad a^{n|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^n b^{n\left|\frac{bd}{a}\right.},$$

$$12.\quad a^{-n|d} = \frac{b^n}{a^n} b^{-n\left|\frac{bd}{a}\right.} = \frac{b^n}{a^n\left(b-\frac{nbd}{a}\right)^{n\left|\frac{bd}{a}\right.}},$$

$$13.\quad a^{n|d} = d^n\,\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^n\,\frac{1^{\frac{a}{d}+n+1|1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}},$$

$$14.\quad a^{-n|d} = d^{-n}\,\frac{1^{\frac{a}{d}-n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^{-n}\,\frac{1^{\frac{a}{d}-n+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}},$$

$$15.\quad a^{n|-d} = d^n\,\frac{1^{-\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^n\,\frac{1^{\frac{a}{-d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{-d}-1|1}},$$

$$16.\quad a^{-n|-d} = d^{-n}\,\frac{1^{-\frac{a}{d}-n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^{-n}\,\frac{1^{\frac{a}{-d}-n-1|1}}{1^{\frac{a}{-d}-1|1}},$$

$$17.\quad (-a)^{n|d} = (-1)^n a^{n|-d},$$

$$18.\quad (-a)^{-n|d} = (-1)^n a^{-n|-d} = \frac{1}{(-1)^n (a+nd)^{n|-d}},$$

$$19.\quad (-a)^{n|-d} = (-1)^n a^{n|d},$$

$$20.\quad (-a)^{-n|-d} = (-1)^n a^{-n|d} = \frac{1}{(-1)^n (a-nd)^{n|d}},$$

$$21.\quad a^{n|d} = (a+(n-1)(+d))^{n|-d} = (a+(n-1)d)^{n|-d},$$

$$22.\quad a^{n|-d} = (a+(n-1)(-d))^{n|d} = (a-(n-1)d)^{n|d},$$

$$23.\quad a^{-n|d} = (a+(-n-1)(+d))^{-n|-d} = (a-nd-d)^{-n|-d},$$

$$24.\quad a^{-n|-d} = (a+(-n-1)(-d))^{-n|d} = (a+nd+d)^{-n|d}.$$

Von diesen Gleichungen hat *Kramp* folgende zuerst in seiner Anal. d. réfr. gegeben:

$$25.\quad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}},$$

$$26.\quad a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+d)^{n|+d}},$$

$$27.\quad a^{n|d} = (a+(n-1)d)^{n|-d},$$

$$28.\quad a^{n|d} = a^n . 1^{n|\frac{d}{a}},$$

$$29.\quad a^{n|d} = d^n \left(\frac{a}{d}\right)^{n|1},$$

$$30.\quad a^{n|d} = \frac{a^n b^{n|\frac{bd}{a}}}{b^n},$$

$$31.\quad a^{n|d} = \frac{d^n}{h^n}\left(\frac{ha}{d}\right)^{n|h}.$$

Sie fallen mit (1., 2., 5., 7., 9. und 11.) zusammen. Er hat aber weder ihre Begründung gezeigt, noch nachgewiesen, dass sie von einem gebrochenen n gelten. Ferner hat er von (5., 7., 9. und 11.) weder gesagt, noch gezeigt, dass sie von einem negativen ganzen und von einem gebrochenen n gelten.

Bessel hat im Königsberger Archiv gleichfalls die vorstehenden Sätze, und noch die Sätze

$$32.\quad a^{n|d} = d^n \frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}},$$

$$33.\quad a^{n|-d} = d^n \frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-n|1}},$$

mitgetheilt und an bestimmte Bedingungen geknüpft, welche später erwähnt werden sollen. *Kramp* hat (Annal. d. Gergonne T. III. Pag. 3. u. 4.) die Glei-

chung (33.), jedoch nur für ein *ganzes n* entwickelt. *Gauss* hat, wie schon (§. 1.) erwähnt, auch die Gleichung (32.) gegeben.

Wir kehren nun zu der Aufgabe zurück. Da in der vorliegenden Abhandlung nachgewiesen ist, dass die aufgeführten Gleichungen für *positive* und *negative ganze n* gelten, so bleibt zu zeigen, dass sie auch für jedes *gebrochene n* gelten.

Geht man von der allgemeinen Definition aus, dass eine Facultät mit mehreren Exponenten und einerlei Zunahme, aus so vielen Factoren besteht, als Exponenten vorkommen, von denen der erste Factor aus der gegebenen Grundgrösse (a), als Basis, nebst einem Exponenten und der Zunahme besteht, jeder folgende aber eine Basis hat, aus der Grundgrösse und dem Producte der Zunahme in die Summe aller vorhergehenden Exponenten bestehend, und als Exponenten den aus der Reihe der vorkommenden, ihm zugehörigen bestimmten Exponenten, nebst der Zunahme: erwägt man ferner, dass die Exponenten unter sich, unbeschadet des Werthes der Facultät, beliebig *versetzt* werden können, so erhält man, wie bekannt, folgende maassgebenden elementaren Ausdrücke:

$$34.\quad a^{n+m|d} = a^{n|d}(a+nd)^{m|d} = a^{m|d}(a+md)^{n|d},$$

$$35.\quad a^{n+m|-d} = a^{n|-d}(a-nd)^{m|-d} = a^{m|-d}(a-md)^{n|-d},$$

$$\begin{aligned}36.\quad a^{n+m+p|d} &= a^{n|d}(a+nd)^{m|d}(a+(n+m)d)^{p|d},\\ &= a^{n|d}(a+nd)^{p|d}(a+(n+p)d)^{m|d},\\ &= a^{m|d}(a+md)^{n|d}(a+(m+n)d)^{p|d},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

u. s. w. und hat nun so für die Facultät $a^{n+m+p|d}$ sechs verschiedene, unter sich gleichgeltende Formen.

Die vorstehenden Gleichungen finden sich in jeder, den Gegenstand behandelnden Schrift entwickelt und begründet. Wir legen sie daher auch unsern weitern Schlussfolgerungen zu Grunde und werden auf sie stets, als auf unbestrittene Gesetze, zurückkommen. Die Exponenten zeigen sich als unter einander unabhängig. Jeder zeigt sich als eine für sich abgeschlossene Grösse. Man kann daher mit ihnen in allen weitern analytischen Entwicklungen alle diejenigen Veränderungen machen, welche die Natur der Facultäten und das oben ausgesprochene Gesetz nicht stören, und die verschiedenen Exponenten für sich bestehende Grössen sein lassen.

Setzt man nun in (34.) $-n$ statt n und dann $+n$ statt m, so ergiebt sich:

$$a^{0|d} = 1 = a^{-n|d}(a-nd)^{n|d},$$

und hieraus

$$37. \qquad a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}}.$$

Setzt man in (34.) $-n$ statt m, so erhält man:

$$a^{0|d} = a^{n|d}(a+nd)^{-n|d},$$

also

$$38. \qquad a^{n|d} = \frac{1}{(a+nd)^{-n|d}}.$$

Hiedurch sind die ersten Formen in den Gleichungen (1. und 3.), welche schon auf anderm Wege gefunden wurden, nachgewiesen. Setzt man nun die nämlichen Werthe nach einander in die Gleichung (35.), so giebt sie

$$1 = a^{-n|-d}(a+nd)^{n|-d} = a^{n|-d}(a-nd)^{-n|-d}.$$

Hieraus folgt

$$39. \qquad a^{-n|-d} = \frac{1}{(a+nd)^{n|-d}},$$

$$40. \qquad a^{n|-d} = \frac{1}{(a-nd)^{-n|-d}},$$

Dies sind die in (2. und 4.) auf anderm Wege gefundenen ersten Formen. Setzt man in (34.) $-\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{n}{m}$ statt m, ferner $-\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{n}{m}$ statt m, was dem Gesagten nach zulässlich ist, so erhält man

$$1 = a^{-\frac{n}{m}|d}\left(a - \frac{n}{m}d\right)^{\frac{n}{m}|d} = a^{\frac{n}{m}|d}\left(a + \frac{n}{m}d\right)^{-\frac{n}{m}|d},$$

und hieraus

$$41. \qquad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{\left(a-\frac{n}{m}d\right)^{\frac{n}{m}|d}},$$

$$42. \qquad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{\left(a+\frac{n}{m}d\right)^{-\frac{n}{m}|d}}.$$

Durch Einführung der nämlichen Werthe in (35.) ergiebt sich

$$1 = a^{-\frac{n}{m}|-d}\left(a - \frac{n}{m}d\right)^{\frac{n}{m}|-d} = a^{\frac{n}{m}|-d}\left(a - \frac{n}{m}d\right)^{-\frac{n}{m}|-d},$$

und hieraus

$$43. \qquad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{\left(a+\frac{n}{m}d\right)^{\frac{n}{m}|-d}},$$

$$44. \qquad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{\left(a-\frac{n}{m}d\right)^{-\frac{n}{m}|-d}}.$$

Durch die Ausdrücke (37. bis 44.) ist erwiesen, dass die ersten Formen der in (1. bis 4.) gefundenen Facultäten-Ausdrücke allgemein für jedes beliebige *positive, negative, gebrochene* und *ganze n* gelten.

Die Gleichungen (erste Form in (1. bis 4. und 37. bis 44.)) finden sich weder bei *Kramp*, noch bei *Bessel*; sie nehmen nur auf die zweiten Formen in (1. bis 4.) Rücksicht, ohne jedoch zu beweisen, dass sie für jedes n gelten. Die zweiten Formen von (1. bis 4.), welche von *Kramp* und *Bessel* hervorgehoben wurden, ergeben sich auf diesem Wege nicht. Sie gelten also vorerst nicht allgemein, sondern nur für *positive* und *negative ganze n*. Es lässt sich jedoch auch nachweisen, dass sie allgemein gelten; was später geschehen wird.

Die Ausdrücke (1. bis 4.) (erste Form 37. bis 44.) sind als die Grundformen für die Facultäten zu betrachten. Ich habe sie daher als die *ursprünglichen* (§. 4. No. 6. und 7.) hervorgehoben.

Da jetzt die formelle Bedeutung der Facultät $a^{n|\pm d}$ für jedes beliebige n festgestellt ist, so lässt sich die Gültigkeit der Ausdrücke (5. bis 24.) für jedes beliebige n auf folgende Art in aller Strenge nachweisen.

Da für jedes beliebige endliche n und ein ganzes positives r, nach (34.)

$$a^{n+r|d} = a^{r+n|d} = a^{n|d}(a+nd)^{r|d} = a^{r|d}(a+rd)^{n|d}$$

ist, so folgt hieraus:

$$45. \qquad a^{n|d} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}}{(a+nd)^{r|d}}.$$

Aus diesem Ausdruck folgt unter den nämlichen Bedingungen:

$$\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1} = \frac{\left(\frac{a}{d}\right)^{r|1}\left(\frac{a}{d}+r\right)^{n|1}}{\left(\frac{a}{d}+n\right)^{r|1}}.$$

Wird (45.) durch diese Gleichung dividirt, so entsteht, durch Anwendung von (No. 5.):

$$\frac{a^{n|d}}{\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}\left(\frac{a}{d}+n\right)^{r|1}}{(a+nd)^{r|d}\left(\frac{a}{d}\right)^{r|1}\left(\frac{a}{d}+r\right)^{n|1}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}d^r(a+nd)^{r|d}}{(a+nd)^{r|d}d^r a^{r|d}\left(\frac{a}{d}+r\right)^{n|1}}.$$

Durch Weglassen der gleichen Factoren und durch Versetzen ergiebt sich hieraus

$$46. \qquad a^{n|d} = \left(\frac{a}{d}\right)^{n|1}\frac{(a+rd)^{n|d}}{\left(\frac{a}{d}+r\right)^{n|1}}.$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige n und ein ganzes positives r gilt, so kann man $+n$, $-n$, $+\frac{n}{m}$, $-\frac{n}{m}$ statt n setzen. Diese Fälle sind, da die vorstehende Formel im Wesentlichen nachher wieder benutzt werden wird, einzeln zu untersuchen.

Für ein ganzes positives n wird nach (5.)

$$\frac{(a+rd)^{n|d}}{(\frac{a}{d}+r)^{n|1}} = \frac{d^n(a+rd)^{n|d}}{(a+rd)^{n|d}} = d^n.$$

Es ist also für diesen Fall, aus (46.), für ein *positives ganzes* n:

$$47. \qquad a^{n|d} = d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1};$$

wie schon (1. §. 11.) nachgewiesen ist. Für ein *negatives* ganzes n ist aus (46.):

$$\frac{(a+rd)^{-n|d}}{(\frac{a}{d}+r)^{-n|1}} = \frac{(\frac{a}{d}+r-n)^{n|d}}{(a+rd-nd)^{n|d}} = \frac{(a+rd-nd)^{n|d}}{d^n(a+rd-nd)^{n|d}} = d^{-n}$$

nach (No. 1. und 5.). Daher geht (46.) für diesen Fall über in:

$$48. \qquad a^{-n|d} = d^{-n}\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|1} = \frac{1}{d^n(\frac{a}{d}-n)^{n|1}}.$$

Für ein *gebrochenes positives* n ist aus (46.):

$$a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}|1}(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}}{(\frac{a}{d}+r)^{\frac{n}{m}|1}}.$$

Nimmt r ins Unendliche zu, so ist nach (29. §. 12.)

$$\text{Lim}\,\frac{(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}}{(\frac{a}{d}+r)^{\frac{n}{m}|1}} = \frac{(a+rd)^{\frac{n}{m}}}{(\frac{a}{d}+r)^{\frac{n}{m}}} = d^{\frac{n}{m}}.$$

Demnach geht (46.) für diesen Fall über in

$$49. \qquad a^{\frac{n}{m}|d} = d^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}|1}.$$

Für ein *gebrochenes negatives* n giebt (46.)

$$a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|1}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|d}}{(\frac{a}{d}+r)^{-\frac{n}{m}|1}},$$

und bei unendlich zunehmendem r ist

$$\mathrm{Lim}\,\frac{(a+rd)^{-\frac{n}{m}|d}}{(\frac{a}{d}+r)^{-\frac{n}{m}|1}} = \frac{\left(\frac{a}{d}+r-\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}}}{(a+rd-\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}}} = d^{-\frac{n}{m}};$$

also hat man für diesen Fall aus (46.):

$$50. \quad a^{-\frac{n}{m}|d} = d^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|} = \frac{1}{d^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}-\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}|1}}.$$

Hiedurch ist erwiesen, dass die Gleichungen (5. und 6.) allgemein für *jedes beliebige* n gelten.

Aus (35.) erhält man

$$a^{n|-d} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}}{(a-nd)^{r|-d}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1} = \frac{\left(\frac{a}{d}\right)^{r|-1}(\frac{a}{d}-r)^{n|-1}}{(\frac{a}{d}-n)^{r|-1}},$$

und hieraus durch Division:

$$\frac{a^{n|-d}}{\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1}} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}(\frac{a}{d}-n)^{r|-1}}{(a-nd)^{r|-d}\left(\frac{a}{d}\right)^{r|-1}(\frac{a}{d}-r)^{n|-1}} = \frac{(a-rd)^{n|-d}}{(\frac{a}{d}-r)^{n|-1}},$$

oder

$$a^{n|-d} = \left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1}\frac{(a-rd)^{n|-d}}{(\frac{a}{d}-r)^{n|-1}}.$$

Da nun auf die nämliche Weise, wie zu (47. bis 50.), gezeigt werden kann, dass für jedes ganze und gebrochene n:

$$\frac{(a-rd)^{\pm n|-d}}{(\frac{a}{d}-r)^{\pm n|-1}} = d^{\pm n} \quad \text{und} \quad \mathrm{Lim}\,\frac{(a-rd)^{\pm\frac{n}{m}|-d}}{(\frac{a}{d}-r)^{\pm\frac{n}{m}|-1}} = d^{\pm\frac{n}{m}}$$

ist, so hat man allgemein für jedes beliebige n:

$$51. \quad a^{n|-d} = d^{n}\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1}.$$

Setzt man in (51.) $-d$ statt d, so ergeben sich hieraus und aus (47. bis 50.) für *jedes beliebige* n folgende Doppelformeln:

$$52.\quad \begin{aligned} a^{n|d} &= d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1} = (-d)^n\left(\frac{a}{-d}\right)^{n|-1}, \\ a^{-n|d} &= d^{-n}\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|1} = (-d)^{-n}\left(\frac{a}{-d}\right)^{-n|-1}, \\ a^{\frac{n}{m}|d} &= d^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}|1} = (-d)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{-d}\right)^{\frac{n}{m}|-1}, \\ a^{-\frac{n}{m}|d} &= d^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|1} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|-1}. \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (51.), und dadurch, dass man in (47. bis 50.) $-d$ statt d setzt:

$$53.\quad \begin{aligned} a^{n|-d} &= d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1} = (-d)^n\left(\frac{a}{-d}\right)^{n|1}, \\ a^{-n|-d} &= d^{-n}\left(\frac{a}{d}\right)^{-n|-1} = (-d)^{-n}\left(\frac{a}{-d}\right)^{-n|1}, \\ a^{\frac{n}{m}|-d} &= d^{+\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{n}{m}|-1} = (-d)^{\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{-d}\right)^{\frac{n}{m}|1}, \\ a^{-\frac{n}{m}|-d} &= d^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|-1} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\left(\frac{a}{-d}\right)^{-\frac{n}{m}|1}, \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (45.) folgt

$$1^{n|\frac{d}{a}} = \frac{1^{r|\frac{d}{a}}\left(1+\frac{rd}{a}\right)^{n|\frac{d}{a}}}{\left(1+\frac{rd}{a}\right)^{r|\frac{d}{a}}}.$$

Wird (45.) durch diese Gleichung dividirt, so findet sich

$$\frac{a^{n|d}}{1^{n|\frac{d}{a}}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}\left(1+\frac{nd}{a}\right)^{r|\frac{d}{a}}}{(a+nd)^{r|d}\,1^{r|\frac{d}{a}}\left(1+\frac{rd}{a}\right)^{n|\frac{d}{a}}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}a^r(a+nd)^{r|d}}{(a+nd)^{r|d}a^r a^{r|d}\left(1+\frac{rd}{a}\right)^{n|\frac{d}{a}}}$$

nach (No. 7.); also

$$a^{n|d} = \frac{1^{n|\frac{d}{a}}(a+rd)^{n|d}}{\left(1+\frac{rd}{a}\right)^{n|\frac{d}{a}}}.$$

Was nun auch n sein mag, so hat man auf die zu (47. bis 50.) gezeigte Weise im Allgemeinen:

$$\text{Lim}\ \frac{(a+rd)^{n|d}}{(1+\frac{rd}{a})^{n|\frac{d}{a}}} = a^n.$$

Hiernach ist allgemein für jedes beliebige n und positive und negative d:

$$54.\qquad a^{n|d} = a^n 1^{n|\frac{d}{a}},$$

$$55.\qquad a^{n|-d} = a^n 1^{n|\frac{-d}{a}},$$

wovon sich die besonderen Fälle leicht ergeben.

Aus (34.) ist

$$\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|h} = \frac{\left(\frac{ah}{d}\right)^{r|h}(\frac{ah}{d}+rh)^{n|h}}{(\frac{ah}{d}+nh)^{r|h}}.$$

Wird (45.) durch diesen Ausdruck dividirt, so ergiebt sich

$$\frac{a^{n|d}}{\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|h}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}(\frac{ah}{d}+nh)^{r|h}}{(a+nd)^{r|d}\left(\frac{ah}{d}\right)^{r|h}(\frac{ah}{d}+rh)^{n|h}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}\left(\frac{h}{d}\right)^r(a+nd)^{r|d}}{(a+nd)^{r|d}\left(\frac{h}{d}\right)^r a^{r|d}(\frac{ah}{d}+rh)^{n|h}}$$

$$= \frac{(a+rd)^{n|d}}{(\frac{ah}{d}+rh)^{n|h}}$$

Werden nun die Schlüsse wie bei (47. bis 50.) wiederholt, so erhält man für jedes beliebige n:

$$\text{Lim}\ \frac{(a+rd)^{n|d}}{(\frac{ah}{d}+rh)^{n|h}} = \frac{d^n}{h^n}.$$

Demnach ist allgemein für *jedes beliebige* n:

$$56.\qquad a^{n|d} = \frac{d^n}{h^n}\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|h}.$$

Aus (35.) ergiebt sich

$$a^{n|-d} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}}{(a-nd)^{r|-d}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{ah}{d}\right)^{n|-h} = \frac{\left(\frac{ah}{d}\right)^{r|-h}(\frac{ah}{d}-rh)^{n|-h}}{(\frac{ah}{d}-nh)^{r|-h}}.$$

Dies giebt durch Division:

$$\frac{a^{n|-d}}{\left(\frac{ah}{d}\right)^{n|-h}} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}(\frac{ah}{d}-nh)^{r|-h}}{(a-nd)^{r|-d}\left(\frac{ah}{d}\right)^{r|-h}(\frac{ah}{d}-rh)^{n|-h}} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}\left(\frac{h}{d}\right)^r(a-nd)^{r|-d}}{(a-nd)^{r|-d}\left(\frac{h}{d}\right)^r a^{r|-d}(\frac{ah}{d}-rh)^{n|-h}}$$

$$= \frac{(a-rd)^{n|-d}}{(\frac{ah}{d}-rh)^{n|-h}}.$$

Nun ist nach (47. bis 50.) für jedes beliebige n:

$$\text{Lim}\ \frac{(a-rd)^{n|-d}}{(\frac{ah}{d}-rh)^{n|-h}} = \left(\frac{d}{h}\right)^n.$$

Also ist auch allgemein:

$$57.\qquad a^{n|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^n \left(\frac{ah}{d}\right)^{n|-h}.$$

Aus (56. und 57.) ergeben sich, wenn man zugleich gegenseitig $-d$ statt d setzt, folgende besondere Formen für jedes n:

$$58.\qquad a^{n|d} = \left(\frac{d}{h}\right)^n \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{n|h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^n \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{n|-h},$$

$$a^{-n|d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{-n|h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{-n|-h},$$

$$a^{\frac{n}{m}|d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{\frac{n}{m}|h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{\frac{n}{m}|-h},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{-\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{-\frac{n}{m}|-h};$$

$$59.\qquad a^{n|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^n \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{n|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^n \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{n|h},$$

$$a^{-n|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{-n|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{-n|h},$$

$$a^{\frac{n}{m}|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{\frac{n}{m}|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{\frac{n}{m}|h},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = \left(\frac{d}{h}\right)^{-\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{d}\right)^{-\frac{n}{m}|-h} = \left(\frac{-d}{h}\right)^{-\frac{n}{m}} \cdot \left(\frac{ah}{-d}\right)^{-\frac{n}{m}|h};$$

wie sie zum Theil (16. bis 21. §. 11.) gefunden wurden.

Es ist aus (11. und 34.)

$$b^{n|\frac{bd}{a}} = \frac{b^{r|\frac{bd}{a}}(b+\frac{rbd}{a})^{r|\frac{bd}{a}}}{(b+\frac{nbd}{a})^{r|\frac{bd}{a}}}.$$

Dies giebt durch Division:

$$\frac{a^{n|d}}{b^{n|\frac{bd}{a}}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}.(b+\frac{nbd}{a})^{r|\frac{bd}{a}}}{(a+nd)^{r|d}b^{r|\frac{bd}{a}}(b+\frac{rbd}{a})^{n\frac{bd}{a}}} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{n|d}\left(\frac{b}{a}\right)^r(a+nd)^{r|d}}{(a+nd)^{r|d}\left(\frac{b}{a}\right)^r a^{r|d}(b+\frac{rbd}{a})^{n|\frac{bd}{a}}}$$

$$= \frac{(a+rd)^{n|d}}{(b+\frac{rbd}{a})^{n|\frac{bd}{a}}}.$$

Nun ist durch Anwendung der frühern Schlussweise

$$\mathrm{Lim}\ \frac{(a+rd)^{n|d}}{(b+\frac{rdb}{a})^{n|\frac{bd}{a}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n;$$

demnach erhält man für jedes beliebige n:

$$60. \quad a^{n|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^n . b^{n|\frac{bd}{a}},$$

$$a^{-n|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} . b^{-n|\frac{bd}{a}} = \frac{b^n}{a^n(b-\frac{nbd}{ma})^{n|\frac{bd}{a}}},$$

$$a^{\frac{n}{m}|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} . b^{\frac{n}{m}|\frac{bd}{a}},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|d} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{n}{m}} . b^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{b^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n}{m}}(b-\frac{nbd}{ma})^{\frac{n}{m}|\frac{bd}{a}}}.$$

Eben so findet sich auf dem nämlichen Wege für jedes beliebige n:

$$61. \quad a^{n|-d} = \left(\frac{a}{b}\right)^n b^{n|\frac{-bd}{a}}.$$

Die Richtigkeit der Gleichungen (**13.** und **14.** erste Form) lässt sich einfach wie folgt beweisen. Es ist

$$a^{n|d} = d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1}$$

für *jedes n*. Man muss daher dem Ausdrucke $\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1}$ eine solche Facultät vorsetzen, dass die Basis des nachfolgenden Factors $\left(\frac{a}{d}\right)$ ist, und sie dann wieder ausscheiden. Diese Facultät ist $1^{\frac{a}{d}-1|1}$ und es ist

$$1^{\frac{a}{d}-1|1}\left(\frac{a}{d}\right)^{n|1} = 1^{\frac{a}{d}-1|1}(1+\frac{a}{d}-1)^{n|1} = 1^{\frac{a}{d}-1|1+n|1} = 1^{\frac{a}{d}-1+n|1}.$$

Demnach ist

$$62. \quad a^{n|d} = d^n\,\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}}$$

für *jedes beliebige n*, weil die Gleichung (5.), aus welcher die gegenwärtige abgeleitet wurde, ebenfalls für jedes beliebige n gilt.

Auf gleiche Art beweiset man die Richtigkeit der Gleichungen (**15.** und **16.** erste Form). Man hat nämlich dem Ausdrucke $\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1}$ in der Gleichung

$$a^{n|-d} = d^n\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1},$$

die nach (51.) von jedem beliebigen n gilt, eine solche Facultät vorzusetzen, dass die Basis des nachfolgenden Factors bei negativer Zunahme $\left(\frac{a}{d}\right)$ ist, und sie dann wieder auszuscheiden. Diese Facultät ist $1^{-\frac{a}{d}+1|-1}$ und es ist

$$1^{-\frac{a}{d}+1|-1}\left(\frac{a}{d}\right)^{n|-1} = 1^{-\frac{a}{d}+1|-1}\left(1-1\left(-\frac{a}{d}+1\right)\right)^{n|-1} = 1^{-\frac{a}{d}+1|-1}\left(1+\frac{a}{d}-1\right)^{n|-1}$$
$$= 1^{-\frac{a}{d}+1+n|-1}$$

für *jedes beliebige n*. Demnach hat man allgemein:

$$63. \qquad a^{n|-d} = d^n\,\frac{1^{-\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}}.$$

Setzt man in (62. und 63.) gegenseitig $-d$, so ergeben sich folgende allgemeine Uebergangsformen:

$$64. \qquad a^{n|d} = d^n\,\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^n\,\frac{1^{\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}},$$

$$65. \qquad a^{n|-d} = d^n\,\frac{1^{-\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^n\,\frac{1^{-\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{-\frac{a}{d}-1|1}},$$

welche für jedes n gelten. Demnach ist die Richtigkeit von (13. bis 16.) erwiesen. Wir werden später auf diese Gleichungen zurückkommen.

Aus der Vergleichung von (65.) mit (24. bis 27. §. 11.) zeigt sich, dass die dort angegebenen zwei letzten Ausdrücke unrichtig sind. Sie müssen so heissen, wie hier.

Aus (45.) folgt

$$(-a)^{n|d} = \frac{(-a)^{r|d}(-a+rd)^{n|d}}{(-a+nd)^{r|d}}.$$

Diese Gleichung durch

$$a^{n|-d} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}}{(a-nd)^{r|-d}}$$

dividirt, giebt

$$\frac{(-a)^{n|d}}{a^{n|-d}} = \frac{(-a)^{r|d}(-a+rd)^{n|d}(a-nd)^{r|-d}}{(-a+nd)^{r|d}a^{r|-d}(a-rd)^{n|-d}} = \frac{(-a)^{r|d}(-a+rd)^{n|d}(-1)^r(-a+nd)^{r|d}}{(-a+nd)^{r|d}(-1)^r(-a)^{r|d}(a-rd)^{n|-d}}$$
$$= \frac{(-a+rd)^{n|d}}{(a-rd)^{n|-d}}.$$

Was auch n sein mag, so ist

$$\text{Lim}\,\frac{(-a+rd)^{n|d}}{(a-rd)^{n|-d}} = \text{Lim}\,\frac{(a-rd)^n}{(-a+rd)^n} = (-1)^n.$$

Dies giebt durch Einführung dieses Werthes:

$$66.\quad \begin{aligned}
(-a)^{n|d} &= (-1)^n a^{n|-d},\\
(-a)^{-n|d} &= (-1)^{-n} a^{-n|-d} = \frac{1}{(-1)^n (a+nd)^{n|-d}},\\
(-a)^{\frac{n}{m}|d} &= (-1)^{\frac{n}{m}} a^{\frac{n}{m}|-d},\\
(-a)^{-\frac{n}{m}|d} &= (-1)^{-\frac{n}{m}} a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{m}} (a+\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|-d}}.
\end{aligned}$$

Eben so erhält man

$$\frac{(-a)^{n|-d}}{a^{n|d}} = \frac{(-a)^{r|-d}(-a-rd)^{n|-d}(a+nd)^{r|d}}{(-a-nd)^{r|-d}a^{r|d}(a+rd)^{n|d}}$$

$$= \frac{(-a-rd)^{n|-d}}{(a+rd)^{n|d}},$$

und da

$$\text{Lim}\,\frac{(-a-rd)}{(a+rd)^{n|d}} = (-1)^n$$

ist, so erhält man für *jedes beliebige n*:

$$67.\quad \begin{aligned}
(-a)^{n|-d} &= (-1)^n\ a^{n|d},\\
(-a)^{-n|-d} &= (-1)^{-n}\ a^{-n|d} = \frac{1}{(-1)^n (a-nd)^{n|d}},\\
(-a)^{\frac{n}{m}|-d} &= (-1)^{\frac{n}{m}}\ a^{\frac{n}{m}|d},\\
(-a)^{-\frac{n}{m}|-d} &= (-1)^{-\frac{n}{m}} a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{(-1)^{\frac{n}{m}} (a-\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|d}}.
\end{aligned}$$

Dadurch ist die Richtigkeit der Gleichungen (17. bis 20.) bewiesen. Es bleibt noch zu zeigen übrig, dass die Gleichungen (21. bis 24.), so wie die zweiten Formen der in (1 bis 4.) aufgestellten Gleichungen, für jedes n gelten.

Dass sie für ein ganzes positives und negatives n gelten, wurde schon nachgewiesen. Es ist also nur noch nachzuweisen, dass sie auch für gebrochene positive und negative n gelten. Dazu benutzen wir die Gleichungen (1. und 2. §. 13.). Nach der ersten ist

$$a^{\frac{n}{m}|d} \,.\, a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{am}{am+nd} = \frac{a}{a+\frac{n}{m}d},$$

oder
$$a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a}{a^{-\frac{n}{m}|-d}(a+\frac{n}{m}d)} = \frac{a}{a^{-\frac{n}{m}|-d}(a+(-\frac{n}{m})(-d))^{1|-d}}$$
$$= \frac{a}{a^{-\frac{n}{m}+1|-d}} = \frac{a}{a^{1|-d-\frac{n}{m}|-d}} = \frac{a^{1|-d}}{a^{1|-d}(a-d)^{-\frac{n}{m}|-d}},$$
und hieraus erhält man
$$68. \quad a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{(a-d)^{-\frac{n}{m}|-d}}.$$
Aus der nämlichen Gleichung ist
$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{a}{a^{\frac{n}{m}|d}(a+\frac{n}{m}d)} = \frac{a}{a^{\frac{n}{m}|d}(a+\frac{n}{m}d)^{1|d}} = \frac{a}{a^{\frac{n}{m}+1|d}}$$
$$= \frac{a}{a^{1+\frac{n}{m}|d}} = \frac{a}{a^{1|d}(a+d)^{\frac{n}{m}|d}},$$
und dann ist
$$69. \quad a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{(a+d)^{\frac{n}{m}|d}}.$$
Aus der Gleichung (2. §. 13.) ist
$$a^{\frac{n}{m}|-d}a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{am}{am-nd} = \frac{a}{a-\frac{n}{m}d},$$
oder
$$a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a}{a^{\frac{n}{m}|-d}(a-\frac{n}{m}d)^{1|-d}} = \frac{a}{a^{\frac{n}{m}+1|-d}} = \frac{a}{a^{1+\frac{n}{m}|-d}} = \frac{a}{a(a-d)^{\frac{n}{m}|-d}}.$$
Dieses giebt
$$70. \quad a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{(a-d)^{\frac{n}{m}|-d}}.$$
Eben so ist
$$a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{a}{a^{-\frac{n}{m}|d}(a-\frac{n}{m}d)^{1|d}} = \frac{a}{a^{-\frac{n}{m}+1|d}} = \frac{a}{a^{1-\frac{n}{m}|d}} = \frac{a}{a^{1|d}(a+d)^{-\frac{n}{m}|d}},$$
also auch
$$71. \quad a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{(a+d)^{-\frac{n}{m}|d}}.$$

Vergleicht man (68. bis 71.) mit den zweiten Formen von (1. bis 4.), so erhellet leicht ihre Uebereinstimmung, und es ist demnach die Behauptung gerechtfertigt, dass diese Gleichungen allgemein für *jedes n* (ganzes und gebrochenes) gelten. **In ihnen liegt folgendes Umwandlungsgesetz:**

72. Jede Facultät, die ein Factor ist, lässt sich in eine andere verwandeln, welche ein Divisor der Einheit ist; und umgekehrt, wenn man dem Exponenten und der Zunahme die entgegengesetzten Zeichen giebt, und die so veränderte Zunahme zur Basis zählt.

Das in (37. bis 44.) liegende Gesetz ist ein anderes und heisst so:

73. Jede Facultät, die ein Factor ist, lässt sich in eine andere verwandeln, die zum Divisor der Einheit wird (und umgekehrt), wenn man das Product der Zunahme in den Exponenten der Basis zuzählt und dem Exponenten das entgegengesetzte Zeichen giebt.

Diese beiden Gesetze unterscheiden sich dadurch, dass in dem einen Fall *Exponent* und *Zunahme* die Zeichen ändern, im andern Falle nur der *Exponent*.

Da beide Gesetze ganz allgemein gelten, so lassen sie sich gegenseitig auf die aus ihnen hervorgehenden Formen anwenden und führen dann auf andere allgemeine Gesetze. Wendet man daher das Gesetz, welches in den ersten Formen von (1. bis 4.), oder in (37. bis 44.) liegt, auf die zweiten Formen von (1. bis 4.), oder auf (68. bis 71.) an, und umgekehrt, so erhält man folgende Ausdrücke:

74.
$$a^{n|d} = \frac{1}{(a+nd)^{-n|d}} = \frac{1}{(a-d)^{-n|-d}} = (a+(n-1)d)^{n|-d}$$
$$a^{n|-d} = \frac{1}{(a-nd)^{-n|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{-n|d}} = (a-(n-1)d)^{n|d}$$
$$a^{-n|d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|d}} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}} = (a-(n+1)d)^{-n|-d}$$
$$a^{-n|-d} = \frac{1}{(a-nd)^{n|-d}} = \frac{1}{(a-d)^{n|d}} = (a+(n+1)d)^{-n|d}$$
$$a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{(a+\frac{n}{m}d)^{-\frac{n}{m}|d}} = \frac{1}{(a-d)^{-\frac{n}{m}|-d}} = (a-(\frac{n}{m}-1)d)^{\frac{n}{m}|-d}$$
$$a^{\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{(a-\frac{n}{m}d)^{-\frac{n}{m}|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{-\frac{n}{m}|d}} = (a-(\frac{n}{m}-1)d)^{\frac{n}{m}|d}$$
$$a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{1}{(a-\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|d}} = \frac{1}{(a-d)^{\frac{n}{m}|-d}} = (a-(\frac{n}{m}+1)d)^{-\frac{n}{m}|-d}$$
$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{1}{(a+\frac{n}{m}d)^{\frac{n}{m}|-d}} = \frac{1}{(a+d)^{\frac{n}{m}|d}} = (a+(\frac{n}{m}+1)d)^{-\frac{n}{m}|d}.$$

Demnach ist die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen (50. und 52. §. 11.),

die bezweifelt werden könnte, für jedes n gerechtfertigt.

Der hier gegebene Beweis lässt sich nur noch in so weit in Frage stellen, als man etwa die Richtigkeit der Gleichungen (1. und 2. §. 13.) bezweifelt, die dort aus *unendlichen Factorenfolgen* abgeleitet wurden. Um auch diesen Zweifel zu entfernen, sollen diese Gleichungen noch auf folgende andere Art bewiesen werden.

Für ein ganzes r und ein gebrochenes n ist aus (34.)

$$a^{\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{r|d}}$$

$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{a^{-r-\frac{n}{m}|-d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{-r|-d}} = \frac{(a+\frac{n}{m}d+rd)^{r|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}}{(a+rd)^{r|-d}}.$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen erhält man für ein *ganzes* r:

$$a^{\frac{n}{m}|d}.\,a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{a^{r|d}(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}(a+\frac{n}{m}d+d)^{r|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}}{(a+\frac{n}{m}d)^{r|d}(a+d)^{r|d}}$$

$$= \frac{a.(a+d)^{r-1|d}(a+\frac{n}{m}d+d)^{r-1|d}(a+\frac{n}{m}d+rd)(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}}{(a+d)^{r-1|d}(a+rd)(a+\frac{n}{m}d)(a+\frac{n}{m}d+d)^{r-1|d}}$$

$$= \frac{a}{a+\frac{n}{m}d}\cdot\frac{a+\frac{n}{m}d+rd}{(a+rd)}\cdot(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d}.$$

Nun ist für ein unendlich wachsendes r:

$$\text{Lim}\,\frac{a+\frac{n}{m}d+rd}{a+rd)} = 1 \quad \text{und}$$

$$\text{Lim}\,(a+rd)^{\frac{n}{m}|d}(a+rd)^{-\frac{n}{m}|-d} = (a+rd)^{\frac{n}{m}}(a+rd)^{-\frac{n}{m}} = 1;$$

demnach ist

$$75.\quad a^{\frac{n}{m}|d}.\,a^{-\frac{n}{m}|-d} = \frac{a}{a+\frac{n}{m}d} = \frac{am}{am+nd}.$$

Es ist also jetzt die Richtigkeit der Gleichung (1. §. 13.) erweisen. Setzt man in (75.) $-d$ statt d, so erhält man

$$76.\quad a^{\frac{n}{m}|-d}a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a}{a-\frac{n}{m}d} = \frac{am}{am-nd}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch direct wie folgt beweisen. Es ist

$$a^{\frac{n}{m}|-d}.a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a^{r|-d}(a-rd)^{\frac{n}{m}|-d}}{(a-\frac{n}{m}d)^{r|-d}}.\frac{(a-\frac{n}{m}d-rd)^{r|d}(a-rd)^{-\frac{n}{m}|d}}{(a-rd)^{r|d}}$$

$$= \frac{a(a-d)^{r-1|-d}(a-\frac{n}{m}d-d)^{r-1|-d}(a-\frac{n}{m}d-rd)(a-rd)^{\frac{n}{m}|-d}(a-rd)^{-\frac{n}{m}|d}}{(a-\frac{n}{m}d)(a-\frac{n}{m}d-d)^{r-1|-d}(a-d)^{r-1|-d}(a-rd)}$$

$$= \frac{a}{a-\frac{n}{m}d}.\frac{a-\frac{n}{m}d-rd}{a-rd}.(a-rd)^{\frac{n}{m}|-d}(a-rd)^{-\frac{n}{m}|d}$$

Nun ist

$$\text{Lim}\,\frac{a-\frac{n}{m}d-rd}{a-rd} = 1 \quad \text{und}$$

$$\text{Lim}\,(a-rd)^{\frac{n}{m}|-d}(a-rd)^{-\frac{n}{m}|-d} = (a-rd)^{\frac{n}{m}}(a-rd)^{-\frac{n}{m}} = 1,$$

also auch, wie oben,

$$a^{\frac{n}{m}|-d}.a^{-\frac{n}{m}|d} = \frac{a}{a-\frac{n}{m}d} = \frac{am}{am-nd}.$$

Wir fügen noch einige Sätze bei, welche die in (42. §. 13.) gegebenen speciellen Formen in allgemeine verwandeln. Nach einer elementaren Entwicklung ist nämlich

$$77.\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|d}}{a^{-\frac{m-n}{m}|d}} = \frac{a^{\frac{n}{m}|d}}{a^{\frac{n}{m}-1|d}} = \frac{a^{\frac{n}{m}|d}}{a^{\frac{n}{m}|d}(a+\frac{n}{m}d)^{-1|d}} = a+\frac{nd}{m}-d = \frac{am+nd-md}{m},$$

$$78.\quad \frac{a^{-\frac{n}{m}|-d}}{a^{\frac{m-n}{m}|-d}} = \frac{a^{-\frac{n}{m}|-d}}{a^{-\frac{n}{m}|-d}(a+\frac{n}{m}d)^{1|-d}} = \frac{1}{a+\frac{n}{m}d} = \frac{m}{am+nd},$$

$$79.\quad \frac{a^{-\frac{n}{m}|d}}{a^{\frac{m-n}{m}|d}} = \frac{a^{-\frac{n}{m}|d}}{a^{-\frac{n}{m}|d}(a-\frac{n}{m}d)^{1|d}} = \frac{1}{a-\frac{n}{m}d} = \frac{m}{am-nd},$$

$$80.\quad \frac{a^{\frac{n}{m}|-d}}{a^{-\frac{m-n}{m}|-d}} = \frac{a^{\frac{n}{m}|-d}}{a^{\frac{n}{m}|-d}(a-\frac{n}{m}d)^{-1|-d}} = a-\frac{n}{m}+d = \frac{am-nd+md}{m};$$

es ist also auch

$$81.\quad \frac{1^{\frac{n}{m}|-1}}{1^{-\frac{m-n}{m}|-1}} = 2m-n.$$

Wir kommen nun, wie bemerkt, auf die Gleichungen (64. und 65.) zurück.

Man kann auf die letzten Ausdrücke in (74.) die Gleichungen (62. und 63.) selbst wieder anwenden und im Reductions-Ausdrucke statt a die veränderte Basis aus (74.) setzen. Behandelt man die erste Gleichung in (74.) nach (63.), so erhält man

$$a^{n|d} = (a+nd-d)^{n|-d} = d^n \frac{1^{\frac{-(a+nd-d)}{d}+n+1|-1}}{1^{-\frac{a+nd-d}{d}+1|-1}};$$

$$82.\quad a^{n|d} = d^n \frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}-n+2|-1}}.$$

Diese Gleichung gilt für *jedes beliebige* n. Behandelt man die zweite Gleichung in (74.) nach (62.), so erhält man

$$a^{n|-d} = (a-nd+d)^{n|d} = d^n. \frac{1^{\frac{a-nd+d}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a-nd+d}{d}-1|1}},$$

oder

$$83.\quad a^{n|-d} = d^n. \frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-n|1}}.$$

Setzt man in (82. und 83.) $-d$ statt d, wie in (62. und 63.), so erhält man folgende, für jedes n geltende Gleichungen:

$$84.\quad a^{n|d} = d^n \frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}-n+2|-1}} = (-d)^n \frac{1^{-\frac{a}{d}|1}}{1^{-\frac{a}{d}-n|1}},$$

$$85.\quad a^{n|-d} = d^n \frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-n|1}} = (-d)^n \frac{1^{\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{\frac{a}{d}-n+2|+1}}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit denen in (64. und 65.), so ergeben sich *vier* Formen für jede von den Facultäten $a^{n|d}$ und $a^{n|-d}$, und man erhält folgende Ausdrücke:

$$86.\quad a^{n|d} = d^n.\frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^n\frac{1^{\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}} = d^n\frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}-n+2|-1}} = (-d)^n.\frac{1^{-\frac{a}{d}|1}}{1^{-\frac{a}{d}-n|1}},$$

$$a^{-n|d} = d^{-n}\frac{1^{\frac{a}{d}-n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^{-n}\frac{1^{\frac{a}{d}-n+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}} = d^{-n}\frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+n+2|-1}} = (-d)^{-n}.\frac{1^{-\frac{a}{d}|1}}{1^{-\frac{a}{d}+n|1}},$$

$$a^{\frac{n}{m}|d} = d^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}} = d^{\frac{n}{m}}\frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}-\frac{n}{m}+2|-1}} = (-d)^{\frac{n}{m}}.\frac{1^{-\frac{a}{d}|1}}{1^{-\frac{a}{d}-\frac{n}{m}|1}},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|d} = d^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}} = d^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+\frac{n}{m}+2|-1}} = (-d)^{-\frac{n}{m}}.\frac{1^{-\frac{a}{d}|1}}{1^{-\frac{a}{d}+\frac{n}{m}|1}};$$

$$87.\quad a^{n|-d} = d^n.\frac{1^{-\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^n.\frac{1^{-\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{-\frac{a}{d}-1|1}} = d^n\frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-n|1}} = (-d)^n\frac{1^{\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{\frac{a}{d}-n+2|-1}},$$

$$a^{-n|-d} = d^{-n}\frac{1^{-\frac{a}{d}-n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^{-n}\frac{1^{-\frac{a}{d}-n-1|1}}{1^{-\frac{a}{d}-1|1}} = d^{-n}\frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}+n|1}} = (-d)^{-n}\frac{1^{\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{\frac{a}{d}+n+2|-1}},$$

$$a^{\frac{n}{m}|-d} = d^{\frac{n}{m}}\frac{1^{-\frac{a}{d}+\frac{n}{m}+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^{\frac{n}{m}}\frac{1^{-\frac{a}{d}+\frac{n}{m}-1|1}}{1^{-\frac{a}{d}-1|1}} = d^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}|1}} = (-d)^{\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{\frac{a}{d}-\frac{n}{m}-2|-1}},$$

$$a^{-\frac{n}{m}|-d} = d^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{-\frac{a}{d}+\frac{n}{m}+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{-\frac{a}{d}-\frac{n}{m}-1|1}}{1^{-\frac{a}{d}-1|1}} = d^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}|1}} = (-d)^{-\frac{n}{m}}\frac{1^{\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{\frac{a}{d}+\frac{n}{m}+2|-1}}.$$

Von diesen acht Formen, welche dazu dienen, eine Facultät von beliebiger Basis und Zunahme, auf eine andere zurückzubringen, deren Basis und Zunahme die Einheit ist, sind, wie bemerkt, bis jetzt zwei gegeben gewesen (No. 32. und 33.): von *Gauss* die eine, von *Kramp* die andere und von *Bessel* beide.

Man kann nun auch die durch (86. und 86.) ausgedrückten Gesetze auf die Ausdrücke (66. und 67.) ausdehnen; dann erhält man folgende acht weitere, für jedes n gültige Gleichungen:

$$88.\quad (-a)^{n|d} = d^n\frac{1^{-\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{-\frac{a}{d}-1|1}} = (-d)^n\frac{1^{-\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{-\frac{a}{d}+1|-1}} = d^n\frac{1^{\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{\frac{a}{d}-n+2|-1}}$$

$$= (-d)^n\frac{1^{\frac{a}{d}|1}}{1^{\frac{a}{d}-n|1}},$$

$$89.\qquad (-a)^{n|-d} = d^n \frac{1^{\frac{a}{d}+n+1|-1}}{1^{\frac{a}{d}+1|-1}} = (-d)^n \frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}} = d^n \frac{1^{-\frac{a}{d}|1}}{1^{-\frac{a}{d}-n|1}}$$

$$= (-d)^n \frac{1^{-\frac{a}{d}+2|-1}}{1^{-\frac{a}{d}-n+2|-1}}.$$

Diese Gleichungen werden immer mit voller Consequenz angewendet werden können. Dabei zeigt sich dann die eigenthümliche Erscheinung, dass nicht alle Ausdrücke auf *darstellbare* Werthe führen. Man darf sich aber dadurch nicht irren lassen, denn es ergiebt sich kein Widerspruch, sondern es rechtfertigt sich nur die eben aufgestellte Behauptung, und die so gefundenen, auf *nicht darstellbare* Werthe führenden Ausdrücke müssen näher untersucht und wo möglich bestimmt werden; wie dies überhaupt bei unbestimmten Ausdrücken vorkommt. Diese Bemerkung hat, wie schon früher angeführt, *Kramp* übersehen, und *Bessel*, der im Königsberger Archiv (S. 244.) *Kramps* Irrthum nachweiset und ihn zu berichtigen sich bemüht, hat im ersten Falle Recht, dürfte aber in so weit sich täuschen, dass er glaubt, die verschiedenen Formen, welche in der Theorie der Facultäten folgerichtig aufgestellt werden können, seien unter sich *ungleich*, oder könnten in Widerspruch zu einander stehen; weshalb er der Ansicht ist, dass man eine *bestimmte* Form zur Erklärung von $a^{n|d}$ wählen müsse; was er auch thut. Auch hier ist aber, wie bei jeder systematischen Entwicklung, die Willkühr ausgeschlossen, und auch die strengste Schlussforderung muss zugeben, dass Formen, welche die Analysis findet, auf unbestimmte Ausdrücke führen können, also nicht leisten, was sie sollen. Es tritt dann nothwendig die weitere Forderung auf, dass der Werth solcher Ausdrücke näher bestimmt und der Weg dazu angegeben werde. Bei richtiger Anwendung des eben Gesagten zeigt sich nirgends ein Widerspruch. Dies soll an der Werth-Ermittlung einiger besondern Fälle noch näher nachgewiesen werden.

Untersucht man die Facultäten $(-1)^{\frac{1}{2}|1}$ und $(-1)^{\frac{1}{2}|-1}$, von welchen die letzte von *Kramp* für ein Unendlich-Grosses (Pg. 91. Anal. d. réfr.) erklärt wurde, so ist aus (88. und 89.)

$$(-1)^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1^{\frac{1}{2}-2|1}}{1^{-2|1}} = \sqrt{-1}\,\frac{1^{\frac{1}{2}|-1}}{1^{0|1}} = \frac{1^{3|-1}}{1^{3-\frac{1}{2}|-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{1^{\frac{1}{2}|1}}.$$

Der zweite und vierte Ausdruck führt nach (25. bis 28. §. 13.) auf den Werth

$$90. \qquad (-1)^{\frac{1}{2}|1} = \frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}};$$

der erste und dritte auf

$$(-1)^{\frac{1}{2}|1} = (-1).0^{2|1}1^{-\frac{3}{2}|1} = \frac{-1.0}{1^{\frac{3}{2}|-1}};$$

was in dieser Form nicht genügt. Man kann jedoch dem Ausdrucke folgende andere Gestalt geben:

$$(-1)^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1^{-2|1}(1-2)^{\frac{1}{2}|1}}{1^{-2|1}} = (-1)^{\frac{1}{2}|1},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1^{3|-1}}{1^{3|-1}(-2)^{-\frac{1}{2}|-1}} = \frac{1}{(-2)^{-\frac{1}{2}|1}} = (-\tfrac{3}{2})^{\frac{1}{2}|-1} = (-1)^{\frac{1}{2}|+1}.$$

So führen sie auf den ersten Ausdruck zurück. Die drei letzten Darstellungen stehen aber unter sich keineswegs in Widerspruch, und man erfährt zugleich, dass

$$91. \qquad (-1)^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1}{(-2)^{-\frac{1}{2}|-1}} = (-\tfrac{3}{2})^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}$$

gleichbedeutende Formen sind.

Für $(-1)^{\frac{1}{2}|-1}$ erhält man

$$(-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1^{\frac{3}{2}|-1}}{1^{2|-1}} = \sqrt{-1}\; 1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1^{-1|1}}{1^{-\frac{3}{2}|1}} = \frac{\sqrt{-1}}{1^{\frac{1}{2}|-1}}.$$

Der zweite und vierte Ausdruck führt nach (15. bis 18. §. 13.) auf

$$(-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi};$$

der erste und dritte aber, je nachdem sie umgeformt werden, auf die Ausdrücke

$$(-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1^{\frac{3}{2}|-1}}{0} = \frac{1}{0.1^{-\frac{3}{2}|1}},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1^{2|-1}(-1)^{\frac{1}{2}|-1}}{1^{2|-1}} = (-1)^{\frac{1}{2}|-1},$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1^{-1|1}}{1^{-\frac{1}{2}|1}.0^{-\frac{1}{2}|1}} = (-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}|1} = (-1)^{\frac{1}{2}|-1},$$

die in keinem Widerspruch stehen, und zeigen, dass folgende Ausdrü gleichbedeutend sind:

$$92. \qquad (-1)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1}{0^{-\frac{1}{2}|1}} = (-\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}|1} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi}.$$

Eben so erhält man

$$93. \qquad (-1)^{-\frac{1}{2}|1} = \frac{4\sqrt{-1}}{3\sqrt{\pi}} = -0.1^{-\frac{3}{2}|1} = \frac{0.1}{1^{\frac{3}{2}|-1}} = \frac{1}{(-2)^{\frac{1}{2}|-1}} = (-\tfrac{5}{2})^{-\frac{1}{2}|-}$$

$$94. \quad (-1)^{-\frac{1}{2}|-1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}} = \frac{1^{\frac{3}{2}|-1}}{-1.0} = \frac{1}{0.1^{-\frac{1}{2}|1}} = \frac{1}{0^{\frac{1}{2}|1}}.$$

Untersucht man die Facultäten $0^{\frac{1}{2}|1}$, $0^{\frac{1}{2}|-1}$, $0^{-\frac{1}{2}|1}$ und $0^{-\frac{1}{2}|-1}$ nach (86. und 87.), so erhält man

$$0^{\frac{1}{2}|1} = \frac{1^{\frac{1}{2}-1|1}}{1^{-1|1}} = \sqrt{-1}\,\frac{1^{\frac{3}{2}|-1}}{1^{1|-1}} = \frac{1^{2|-1}}{1^{\frac{3}{2}|-1}} = \sqrt{-1}\,\frac{1}{1^{-\frac{1}{2}|1}}.$$

Nun ist

$$1^{\frac{3}{2}|-1} = \tfrac{1}{2}.1^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{und} \quad \frac{1^{2|-1}}{1^{\frac{3}{2}|-1}} = \frac{1^{2|-1}}{1^{2|-1}(-1)^{-\frac{1}{2}|-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}.$$

Der erste Ausdruck führt auf die zwei Formen:

$$\frac{1^{-\frac{1}{2}|1}}{1^{-1|1}} = 0.1^{-\frac{1}{2}|1} = 0^{\frac{1}{2}|1};$$

demnach ist

$$95. \quad 0^{\frac{1}{2}|1} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}} = 0.1^{\frac{3}{2}|-1}\sqrt{-1} = \frac{0.1}{1^{\frac{3}{2}|-1}} = 0.1^{-\frac{1}{2}|1}.$$

Eben so erhält man

$$96. \quad 0^{\frac{1}{2}|-1} = 1^{\frac{3}{2}|-1} = \sqrt{-1}\,\frac{1^{-\frac{1}{2}|1}}{1^{-1|1}} = \frac{1}{1^{-\frac{1}{2}|1}} = \sqrt{-1}.\frac{1^{2|-1}}{1^{\frac{3}{2}|-1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

$$97. \quad 0^{-\frac{1}{2}|1} = \frac{1^{-\frac{3}{2}|1}}{1^{-1|1}} = \frac{1^{\frac{1}{2}|-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1^{2|-1}}{1^{\frac{3}{2}|-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}.1^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{2}{\sqrt{-\pi}},$$

$$98. \quad 0^{-\frac{1}{2}|-1} = 1^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{1^{-\frac{3}{2}|1}}{\sqrt{-1}.1^{-1|1}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{2}|1}} = \frac{1^{2|-1}}{\sqrt{-1}.1^{\frac{3}{2}|-1}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Aus der Behandlung der vorstehenden speciellen Fälle geht hervor, dass die in (86. bis 89.) aufgestellten verschiedenen Formen sich gegenseitig unterstützen und ergänzen. Eine einzige genügt nicht zur Reduction für alle möglichen Fälle, und häufig führt auch die eine auf unbestimmte und ungenügende Ausdrücke, während die übrigen ihre Dienste nicht versagen. So genügt z. B. die Formel $a^{n|d} = \frac{1^{\frac{a}{d}+n-1|1}}{1^{\frac{a}{d}-1|1}}$ in manchen Fällen zur Werth-Ermittlung nicht, während andere genügen; und umgekehrt. Es dürfte daher nicht angemessen sein, *nur eine* Formel für die Reduction aller Fälle als maassgebend aufzustellen.

Durch die vorstehenden Entwicklungen wird nun die oben gestellte Aufgabe gelöset und die in Frage stehende Beweismethode gerechtfertigt sein.

Zu dem, was über die Entwicklung der Facultäten mit gebrochenen Exponenten in unendliche Factorenfolgen (§. 12. und 13.) und ihre weitere

Benutzung gesagt worden, ist für Den, welcher den Inhalt von Seite (51., 52. und 64.) beachtet hat, nichts hinzuzufügen. Der Ausdruck jeder einzelnen, in $a^{\pm\frac{n}{m}|\pm d}$ begriffenen Facultät durch unendliche Factorenreihen, ist vorerst nur *formell* und deutet eine unvollendete Operation an, dient also auch nicht in dieser Eigenschaft zu *Werthbestimmungen*. Dennoch kann er, wie Seite (52.) bemerkt, dazu benutzt werden, wenn man ihn mit der nöthigen Vorsicht und in zweckmässiger Verbindung gebraucht; was auch oben geschah und wobei das Zurückgehen auf die Gleichungen (19. bis 22. §. 12.) sehr förderlich ist. Uebersieht man dies und benutzt den Ausdruck, ohne auf diese Beobachtung Rücksicht zu nehmen, zu *Werthbestimmungen*, so bringt man einen Fehler in die Entwicklungen, der nicht in ihnen liegt und dessen Schuld nicht ihnen, sondern dem Rechner zur Last fällt.

Setzt man z. B. $a=1$, $d=1$ und $\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$ in (23. §. 12.), so ergiebt sich

$$1^{\frac{1}{2}|1}=\frac{2.4.6.8.10\ldots}{3.5.7.9.11\ldots}.$$

Es ist aber

$$\frac{2.4.6.8.10\ldots}{3.5.7.9.11\ldots}<0,5.$$

Wollte man also hieraus weiter den *Werth* von $1^{\frac{1}{2}|1}$ schliessen, so hätte man

$$1^{\frac{1}{2}|1}<0,5,$$

was falsch wäre, da $1^{\frac{1}{2}|1}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, also grösser als 0,5 ist. Die hier angegebene Schlussweise steht aber dem auf (S. 52.) Gesagten entgegen.

18.

Développement de quelques intégrales définies, renfermant des fonctions trigonométriques.

(Par Mr. le Dr. *O. Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

Depuis longtemps les deux formules

$$1.\quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\cos ux\,\partial x = \frac{\Gamma(\mu)\cos(\mu\,\mathrm{arc\,tang}\,u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}},$$

$$2.\quad \int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\sin ux\,\partial x = \frac{\Gamma(\mu)\sin(\mu\,\mathrm{arc\,tang}\,u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}}$$

sont connues, mais on n'a pas encore essayé d'en tirer des nouveaux résultats pour la théorie des intégrales définies. Or ces formules donnent différentes intégrales définies, si on les combine avec d'autres formules du même genre. Nous présenterons ici quelques exemples de ces combinaisons.

I.

Après avoir remplacé μ par p, nous multiplierons l'équation (1.) par $\frac{\partial u}{u^q}$ et en prendrons l'intégrale par rapport à u, entre les limites $u=0$ et $u=\infty$. Cela donne

$$3.\quad \int_0^\infty \frac{\partial u}{u^q}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\cos ux\,\partial x = \Gamma(p)\int_0^\infty \frac{\cos(p\,\mathrm{arc\,tang}\,u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{\partial u}{u^q}.$$

Quant à l'intégrale double à gauche, on en peut trouver la valeur en renversant l'ordre des intégrations. Par cela elle se change en

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\partial x\int_0^\infty \frac{\cos xu}{u^q}\partial u,$$

et en posant $u=\frac{t}{x}$, l'intégrale double se change en un produit de deux intégrales simples, savoir en

$$\left(\int_0^\infty x^{p+q-2}e^{-x}\partial x\right)\left(\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q}\partial t\right),$$

c'est à dire en

$$\Gamma(p+q-1)\cdot\frac{\pi}{2\Gamma(q)\cos\frac{1}{2}q\pi},\quad 1>q>0.$$

Car comme $\frac{1}{t^q} = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty z^{q-1}e^{-tz}\partial z$, il suit delà

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q}\partial t = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty \cos t\partial t\int_0^\infty z^{q-1}e^{-tz}\partial z;$$

et en renversant l'ordre des intégrations:

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q}\partial t = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty z^{q-1}\partial z\int_0^\infty e^{-zt}\cos t\partial t = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty \frac{z^q\partial z}{1+z^2}.$$

La valeur de l'intégrale à droite se trouve à l'aide de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{z^{m-1}\partial z}{1+z^n} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}, \quad n > m > 1,$$

donc on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^q}\partial t = \frac{1}{\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}(q+1)\pi} = \frac{\pi}{2\Gamma(q)\cos\frac{1}{2}q\pi}, \quad 1 > q > 0;$$

et c'est là la formule ci-dessus.

En égalant cette expression à l'intégrale à droite dans (3.), on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\cos(p\operatorname{arctang}u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{\partial u}{u^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}; \quad 1 > q > 0.$$

En substitutant $u = \operatorname{tang}\theta$, on obtient sans difficulté:

$$4. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2}\theta\cot^q\theta\cos p\theta\partial\theta = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}q\pi}; \quad 1 > q > 0;$$

ce qui est une formule assez rémarquable.

Pour trouver une autre équation, analogue à la précédente, multiplions (2) par $\frac{\partial u}{u^q}$, après y avoir écrit p à la place de μ; intégrant alors suivant u, on obtient

$$5. \quad \int_0^\infty \frac{\partial u}{u^q}\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\sin ux\partial x = \Gamma(p)\int_0^\infty \frac{\sin(p\operatorname{arctang}u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}}\cdot\frac{\partial u}{u^q},$$

où l'intégrale double à gauche est aussi égale à l'expression

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\partial x\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u^q}\partial u,$$

qui, par la substitution de $u = \frac{t}{x}$ se change en

$$\left(\int_0^\infty x^{p+q-2}e^{-x}\partial x\right)\left(\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^q}\partial t\right) = \Gamma(p+q-1)\cdot\frac{\pi}{2\Gamma(q)\sin\frac{1}{2}q\pi}; \quad 2 > q > 0.$$

La valeur de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^q}\partial t$ peut être trouvée par un calcul tout à fait analogue à celui employé ci-dessus.

En égalant l'expression ci-dessus à l'intégrale à droite dans (5.), on obtient

$$\int_0^\infty \frac{\sin(p \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}p}} \cdot \frac{\partial u}{u^q} = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}; \quad 2 > q > 0,$$

et en fesant $u = \operatorname{tang} \theta$, on en tire la formule

$$6. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p-2}\theta \cot^q\theta \sin p\theta \,\partial\theta = \frac{\Gamma(p+q-1)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \cdot \frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}q\pi}; \quad 2 > q > 0.$$

Les résultats trouvés (4. et 6.) présentent plusieurs formules déjà connues. Si par exemple on fait $q = 1$ dans (6.), on parvient à l'équation

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} \cos^{p-1}\theta \,\partial\theta = \tfrac{1}{2}\pi,$$

trouvée par Mr. *Liouville* par une voie tout-différente. (Voyez tome 13. de ce journal page 232.).

II.

Pour faire une autre application de l'équation (1.), multiplions la par

$$\frac{u^m \,\partial u}{r^2 + u^2},$$

et prenons en l'intégrale suivant u entre les limites $u = 0$ et $u = \infty$. Cela donne

$$7. \quad \int_0^\infty \frac{u^m . \partial u}{r^2+u^2} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \cos ux \,\partial x = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^m \,\partial u}{r^2+u^2}.$$

Cette intégrale double peut aussi être présentée sous la forme

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{u^m \cos xu}{r^2+u^2} \partial u,$$

où l'intégration suivant u peut être exécutée au moyen de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{u^m \cos xu}{r^2+u^2} \partial u = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi r^{m-1} e^{-rx},$$

qui suppose que m est un nombre pair. L'intégrale double se change alors en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi r^{m-1} e^{-rx} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi r^{m-1} \frac{\Gamma(\mu)}{(1+r)^\mu},$$

ce qui est la valeur de l'expression à gauche dans l'équation (7.). On en tire

$$8. \quad \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^m \,\partial u}{r^2+u^2} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{r^{m-1}}{(1+r)^\mu}.$$

Avant de transformer cette intégrale en une autre, qui ne contienne que des fonctions trigonométriques, nous ferons voir qu'on en peut tirer deux autres formules plus générales.

(A.) A cet effet nous présenterons l'équation sous la forme suivante:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u}{r^2+u^2} u^{m-1} \partial u = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi . r^{m-1} (1+r)^{-\mu},$$

dont il est facile de prendre la dérivée $n^{\text{ième}}$ suivant r. En faisant usage de la formule connue

$$\frac{\partial^n[\varphi(r)\psi(r)]}{\partial r^n} = \varphi(r)\psi^{(n)}(r) + n_1\varphi'(r)\psi^{(n-1)}(r) + n_2\varphi''(r)\psi^{(n-2)}(r) + \dots$$

$$\left[n_1 = \frac{n}{1},\quad n^2 = \frac{n(n-1)}{1.2},\quad n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ \text{etc.}\right],$$

on obtient sans difficulté:

$$9.\qquad \int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left[\frac{u}{r^2+u^2}\right] u^{m-1}\partial u$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m+n}\tfrac{1}{2}\pi(\mu,1)^n \frac{r^{m-1}}{(1+r)^{\mu+n}}\left\{1 - \frac{(m-1)n_1}{\mu+n-1}\left(\frac{1+r}{r}\right) + \frac{(m-1)(m-2)n_2}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)}\left(\frac{1+r}{r}\right)^2 - \dots\right\}$$

où $(\mu, 1)^n$ designe la factorielle $\mu(\mu+1)\dots(\mu+n-1)$.

Quant à la dérivée sous le signe de l'intégration, elle se trouve être:

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left[\frac{u}{r^2+u^2}\right] = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left[\frac{1}{r-u\sqrt{-1}} - \frac{1}{r+u\sqrt{-1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n 1.2\dots n}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{1}{(r-u\sqrt{-1})^{n+1}} - \frac{1}{(r+u\sqrt{-1})^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n(1,1)^n}{2\sqrt{-1}} \cdot \frac{(r+u\sqrt{-1})^{n+1}-(r-u\sqrt{-1})^{n+1}}{(r^2+u^2)^{n+1}}.$$

En posant $r+u\sqrt{-1} = \varrho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$, on aura aussi

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left[\frac{u}{r^2+u^2}\right] = (-1)^n(1,1)^n \frac{\varrho^{n+1}\sin(n+1)\omega}{(r^2+u^2)^{n+1}},$$

et parcequ'en vertu de l'équation précédente on a $\varrho = \sqrt{(r^2+u^2)}$ et $\omega = \operatorname{arc\,tang}\frac{u}{r}$:

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left[\frac{u}{r^2+u^2}\right] = (-1)^n(1,1)^n \frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{r}\right]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}.$$

L'équation (9.) donne maintenant

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arc\,tang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{r}\right]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} u^{m-1}\partial u$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m}\tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \cdot \frac{r^{m-1}}{(1+r)^{\mu+n}}\left\{1 - \frac{(m-1).n}{1.(\mu+n-1)}\left(\frac{1+r}{r}\right) + \frac{(m-1)(m-2).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)}\left(\frac{1+r}{r}\right)^2 - \dots\right\}$$

et en fesant $r = 1$ et $u = \operatorname{tang}\theta$:

$$10. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1}\theta \tan^{m-1}\theta \cos\mu\theta \sin(n+1)\theta\,\partial\theta$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{\pi}{2^{\mu+n+1}} \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \left\{ 1 - \frac{(m-1).n}{1.(\mu+n-1)} 2 + \frac{(m-1)(m-2).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} 2^2 - \dots \right\}$$

B. L'équation (8.) peut aussi être présentées sous la forme

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{r}{r^2+u^2} u^m \partial u = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{r^m}{(1+r)^\mu}.$$

En la différentiant n fois de suite, et se reportant à la formule

$$\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left[\frac{r}{r^2+u^2}\right] = (-1)^n (1,1)^n \frac{\cos[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

on en tire

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\cos[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} u^m \partial u$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \cdot \frac{r^m}{(1+r)^{\mu+n}} \left\{ 1 - \frac{m.n}{1.(\mu+n-1)}\left(\frac{1+r}{r}\right) + \frac{m(m-1).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)}\left(\frac{1+r}{r}\right)^2 - \dots \right\}$$

Cela, pour $r=1$, $u = \tan\theta$, donne

$$11. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1}\theta \tan^m\theta \cos\mu\theta \cos(n+1)\theta\,\partial\theta$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{\pi}{2^{\mu+n+1}} \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \left\{ 1 - \frac{m.n}{1.(\mu+n-1)} 2 + \frac{m(m-1).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} 2^2 - \dots \right\}$$

Voilà une formule correspondante avec celle (10.).

Des calculs tout analogues peuvent être appliqués à la formule (2.). En la multipliant par

$$\frac{u^{m+1}\partial u}{r^2+u^2}$$

et l'intégrant suivant u, entre les limites $u=0$, $u=\infty$, on obtient

$$12. \quad \int_0^\infty \frac{u^{m+1}\partial u}{r^2+u^2} \int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \sin ux\,\partial x = \Gamma(\mu) \int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^{m+1}\partial u}{r^2+u^2}.$$

L'intégrale double à gauche peut être transformée en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{u^{m+1}\sin xu}{r^2+u^2} \partial u,$$

où l'intégration peut être operée suivant u, si l'on fait usage de la formule

$$\int_0^\infty \frac{u^{m+1}\sin xu}{r^2+u^2} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi r^m e^{-rx},$$

qui suppose m pair. L'intégrale en question se change maintenant en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi r^m e^{-rx} = (-1)^{\frac{1}{2}m} \tfrac{1}{2}\pi r^m \frac{\Gamma(\mu)}{(1+r)^\mu},$$

et à l'aide de l'équation (12.) on obtient

$$13. \quad \int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arc\,tang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u^{m+1}\partial u}{r^2+u^2} = (-1)^{\frac{1}{2}m}\tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{r^m}{(1+r)^\mu}.$$

La différentiation n fois répétée de cette équation, donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arc\,taug} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\sin[(n+1)\operatorname{arctang}\frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \partial u$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}m}\tfrac{1}{2}\pi \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \cdot \frac{r^m}{(1+r)^{\mu+n}} \Big\{1 - \frac{m.n}{1.(\mu+n-1)}\Big(\frac{1+r}{r}\Big) + \frac{m(m-1).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)}\Big(\frac{1+r}{r}\Big)^2 - \dots\Big\}$$

et pour $r=1$, $u=\operatorname{tang}\theta$:

$$14. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1}\theta \operatorname{tang}^m\theta \sin\mu\theta \sin(n+1)\theta\,\partial\theta$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{\pi}{2^{\mu+n+1}} \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n}\Big\{1 - \frac{m.n}{1.(\mu+n-1)}2 + \frac{m(m-1).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)}2^2 - \dots\Big\}.$$

Mettant $m-2$ à la place de m et multipliant par r, la différentiation donne

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arc\,tang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\cos[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{u}{r}]}{(r^2+u^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} u^{m-1}\partial u$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}m+1}\tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \cdot \frac{r^{m-1}}{(1+r)^{\mu+n}}\Big\{1 - \frac{(m-1).n}{1.(\mu+n-1)}\Big(\frac{1+r}{r}\Big) + \frac{(m-1)(m-2).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)}\Big(\frac{1+r}{r}\Big)^2 - \dots\Big\}$$

et pour $r=1$, $u=\operatorname{tang}\theta$:

$$15. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+n-1}\theta \operatorname{tang}^{m-1}\theta \sin\mu\theta \cos(n+1)\theta\,\partial\theta$$

$$=(-1)^{\frac{1}{2}m+1}\frac{\pi}{2^{\mu+n+1}} \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n}\Big\{1 - \frac{(m-1)n}{1.(\mu+n-1)}2 + \frac{(m-1)(m-2).n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)}2^2 - \dots\Big\}.$$

Voilà la dernière formule correspondante à celles (10., 11. et 14.). Comme toutes ces intégrales contiennent trois nombres μ, m, n, dont le premier est absolument arbitraire, on en peut tirer beaucoup de formules particulières plus où moins connues.

III.

Passons maintenant à une troisième application des équations (1.) et (2). Multipliant par

$$\frac{\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

et intégrant suivant u, on tire de (1):

$$16. \quad \int_0^\infty \frac{\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\cos ux\,\partial x = \Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arc\,tang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}.$$

Renversant l'ordre des intégration, l'intégrale à gauche se change en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{\cos xu \, \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}},$$

où l'intégration suivant u peut être effectuée par le secours de la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{\cos xu \, \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{\pi e^{-rx}}{2^{n+1}\Gamma(n+1)} \left\{ M_0 \frac{x^n}{r^{n+1}} + M_2 \frac{x^{n-1}}{r^{n+2}} + M_4 \frac{x^{n-2}}{r^{n+3}} + \dots \right\},$$

dans laquelle les coefficients M_0, M_2, M_4 etc. sont déterminés par les équations

$$17. \quad M_0 = 1, \quad M_2 = \tfrac{1}{2}(n+1)n, \quad M_4 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{2.4},$$

$$M_6 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4.6}, \quad \text{etc.}$$

Maintenant on obtient

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-x} \partial x \int_0^\infty \frac{\cos xu \, \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{\pi}{2^{n+1}\Gamma(n+1)} \left\{ \frac{M_0}{r^{n+1}} \int_0^\infty x^{\mu+n-1} e^{-(1+r)x} \partial x + \frac{M_2}{r^{n+2}} \int_0^\infty x^{\mu+n-2} e^{-(1+r)x} \partial x \right.$$

$$\left. + \frac{M_4}{r^{n+3}} \int_0^\infty x^{\mu+n-3} e^{-(1+r)x} \partial x + \dots \right\}$$

et en opérant les intégrations indiquées à droite, on trouve que l'intégrale double mentionnée est égale à la série finie

$$\frac{\pi}{2^{n+1}\Gamma(n+1)} \left\{ \frac{M_0}{r^{n+1}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n)}{(1+r)^{\mu+n}} + \frac{M_2}{r^{n+2}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-1)}{(1+r)^{\mu+n-1}} + \frac{M_4}{r^{n-3}} \cdot \frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(1+r)^{\mu+n-2}} + \dots \right\},$$

ou bien à

$$\frac{\pi}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ M_0 \Gamma(\mu+n) + M_2 \Gamma(\mu+n-1) \frac{1+r}{r} \right.$$

$$\left. + M_4 \Gamma(\mu+n-2) \left(\frac{1+r}{r}\right)^2 + \dots \right\}.$$

En observant qu'en vertu des propriétés des intégrales Euleriennes on a

$$\Gamma(\mu+n-1) = \frac{\Gamma(\mu+n)}{\mu+n-1} \quad \text{et} \quad \Gamma(\mu+n-2) = \frac{\Gamma(\mu+n)}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} \quad \text{etc.},$$

la série précédente peut aussi être présentée sous la forme

$$\frac{\pi \Gamma(\mu+r)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ M_0 + \frac{M_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{M_4(1+\frac{1}{r})}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}.$$

Cela étant la valeur de l'intégrale double en (16.), nous avons maintenant:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

$$\frac{\pi\Gamma(\mu+n):\Gamma(\mu)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}}\left\{M_0 + \frac{M_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{M_4(1+\frac{1}{r})^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \ldots\right\},$$

où $\frac{\Gamma(\mu+n):\Gamma(\mu)}{\Gamma(n+1)}$ peut être remplacé par

$$\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}{1.2.3\ldots n} = \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n}.$$

Fesant enfin $r=1$, $u=\operatorname{tang}\theta$, nous aurons en vertu des valeurs de M_0, M_2, M_4 etc.

$$18. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{\mu+2n}\theta \cos\mu\theta\,\partial\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{\mu+2n+1}} \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n}\left\{1 + \frac{(n+1)n}{1.(\mu+n-1)} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \ldots\right\}.$$

Un calcul semblable donnera un théorème analogue; car de (2.) on tire

$$19. \quad \int_0^\infty \frac{u\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}\int_0 x^{\mu-1}e^{-x}\sin ux\,\partial x = \Gamma(\mu)\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}},$$

où l'intégrale double peut être transformée en

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-x}\partial x\int_0^\infty \frac{u\sin xu\,\partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}.$$

La valeur de cette intégrale par rapport à u est, comme on sait,

$$\frac{\pi e^{-rx}}{2^{n+1}\Gamma(n+1)}\left\{N_0\frac{x^n}{r^n} + N_2\frac{x^{n-1}}{r^{n+1}} + N_4\frac{x^{n-2}}{r^{n+2}} + \ldots\right\},$$

où

$$N_0 = 1, \quad N_2 = \tfrac{1}{2}(n-1), \quad N_4 = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4},$$

$$N_6 = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.6}, \quad \text{etc.}$$

Delà on tire sans difficulté la valeur suivante de l'intégrale double:

$$\frac{\pi}{2^{n+1}\Gamma(n+1)}\left\{\frac{N_0}{r^n}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n)}{(1+r)^{\mu+n}} + \frac{N_2}{r^{n+1}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n-1)}{(1+r)^{\mu+n-1}} + \frac{N_4}{r^{n+2}}\cdot\frac{\Gamma(\mu+n-2)}{(1+r)^{\mu+n-2}} + \ldots\right\},$$

ou bien

$$\frac{r\pi\Gamma(\mu+n)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}}\left\{N_0 + \frac{N_2(1+\frac{1}{r})}{\mu+n-1} + \frac{N_4(1+\frac{1}{r})^2}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \ldots\right\},$$

et en égalant cette valeur à l'intégrale à droite dans (19.):

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\mu \operatorname{arctang} u)}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}\mu}} \cdot \frac{u \partial u}{(r^2+u^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{r\pi\Gamma(\mu+n):\Gamma(\mu)}{\Gamma(n+1)(2r)^{n+1}(1+r)^{\mu+n}} \left\{ N_0 + \frac{N_2\left(1+\frac{1}{r}\right)}{\mu+n-1} + \frac{N_4\left(1+\frac{1}{r}\right)}{(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}$$

Fesant enfin $r = 1$, $u = \operatorname{tang} \theta$, on obtient

$$20. \quad \int_0^{\frac{1}{2}\mu} \cos^{\mu+2n}\theta \sin \mu\theta \operatorname{tang} \theta \partial\theta$$

$$= \frac{\pi}{2^{\mu+2n+1}} \cdot \frac{(\mu,1)^n}{(1,1)^n} \left\{ 1 + \frac{n(n-1)}{1.(\mu+n-1)} + \frac{(n-1)n(n-1)(n-2)}{1.2.(\mu+n-1)(\mu+n-2)} + \dots \right\}$$

Il est à remarquer qu'il n'est pas permis de supposer $\mu = 0$, ou négatif, dans toutes les formules que nous venons de présenter, parceque le calcul a été fondé sur les propriétés des intégrales Eulériennes qui n'ont lieu que pour des valeurs positives de la variable.

19.

Ueber die Summe einer gewissen endlichen Reihe.

(Von Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

Dass die endliche Reihe

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{n-4.n-5}{2.3}-\frac{n-5.n-6.n-7}{2.3.4}+\dots$$

je nach der Beschaffenheit der Zahl n vier verschiedene Werthe hat, ist bereits in diesem Journale (Bd. 20. S. 321.) nachgewiesen worden. Diese vier Werthe lassen sich aber durch einen einzigen Ausdruck darstellen. Setzt man nämlich in der Formel

$$1.\quad x^n+y^n=(x+y)^n-nxy\left[(x+y)^{n-2}-\tfrac{1}{2}(n-3)(x+y)^{n-4}+\dots\right]$$

statt y den Werth $\frac{1}{x}$, so ergiebt sich

$$2.\quad x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}-\tfrac{1}{2}(n-3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}+\dots\right].$$

Bestimmt man nun x durch die Gleichung $x+\frac{1}{x}=1$, so hat eine der zwei Grössen x und $\frac{1}{x}$ den Werth $-e^{+\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}}$, die andere den Werth $-e^{-\frac{2}{3}\pi\sqrt{-1}}$, mithin, wenn man diese Werthe in (2.) substituirt:

$$(-1)^n\left(e^{+\frac{2}{3}n\pi\sqrt{-1}}+e^{-\frac{2}{3}n\pi\sqrt{-1}}\right)=1-n\left(1-\frac{n-3}{2}+\frac{n-4.n-5}{2.3}-\dots\right)$$

und

$$\frac{1+(-1)^{n+1}\,2\cos\frac{2}{3}n\pi}{n}=1-\frac{n-3}{2}+\frac{n-4.n-5}{2.3}-\dots$$

20.

Ueber die Anwendung der Sturm'schen Methode auf transcendente Gleichungen.

(Von Herrn Dr. *Stern* in Göttingen.)

Die *Sturm*'sche Methode der Auflösung der algebraischen Gleichungen wird gewöhnlich in folgender Gestalt vorgetragen. Ist eine algebraische Gleichung vom $m$ten Grade

$$Fx = 0$$

gegeben, so bildet man aus Fx und seinem Differentialquotienten $F_1 x$ die Functionen $\overset{2}{F}x$, $\overset{3}{F}x$ u. s. w., bis man an die letzte $\overset{m}{F}x$ kommt. Diese Functionen sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} Fx &= A_1 F_1 x - \overset{2}{F}x \\ F_1 x &= A_2 \overset{2}{F}x - \overset{3}{F}x \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \overset{m-2}{F}x &= A_{m-1}\overset{m-1}{F}x - \overset{m}{F}x \end{aligned}$$

verbunden und es wird dabei vorausgesetzt, dass sowohl Fx und $F_1 x$, als auch die folgenden Functionen nach den fallenden Potenzen von x geordnet sind. Substituirt man in die Reihe Fx, $F_1 x$ ... $\overset{m}{F}x$ statt x den Werth a, und dann den grösseren Werth b, so wird die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichung, die zwischen a und b liegen, der Zahl der Zeichenwechsel gleich sein, welche die dem Werthe a entsprechende Zeichenreihe mehr enthält, als die dem Werthe b entsprechende.

Es versteht sich von selbst, dass die *Sturm*'sche Methode in dieser Gestalt nicht auf *transcendente* Gleichungen anwendbar ist. Indessen hat schon *Sturm* selbst angedeutet, dass man auch den entgegengesetzten Weg einschlagen kann. Man schreibe nämlich Fx und $F_1 x$ nach aufsteigenden Potenzen von x. Dividirt man dann Fx durch $F_1 x$, so findet man

$$Fx = (\alpha_1 + \beta_1 x) F_1 x - x^2 \overset{2}{F}x;$$

ebenso

$$F_1 x = (\alpha_2 + \beta_2 x)\overset{2}{F}x - x^2 \overset{3}{F}x.$$

und so weiter. Diese Reihe von Functionen, welche gleichmässig mit $\overset{m}{F}x$ schliesst, hat ebenfalls die Eigenschaft, dass zwischen a und b so viel reelle Wurzeln der gegebenen Gleichung liegen, als die Differenz der Anzahl der Zeichenwechsel in den zwei Reihen $Fa, F_1 a, \overset{2}{F}a \ldots\ldots \overset{m}{F}a$ und $Fb, F_1 b, \overset{2}{F}b \ldots\ldots \overset{m}{F}b$ beträgt.

Berücksichtigt man bloss die *algebraischen* Gleichungen, so möchte dieses zweite Verfahren schwerlich dem ersten vorzuziehen sein. Dagegen hat es den Vortheil, dass es leicht auf die Auflösung der transcendenten Gleichungen übertragen werden kann. Es bedarf hierzu nur einer kleinen Modification, ähnlich derjenigen, durch welche auch die *Fourier*'sche Methode auf transcendente Gleichungen anwendbar wird*). Man wird nämlich, wenn eine transcendente Gleichung aufgelöset werden soll, nicht mehr immer unmittelbar bestimmen können, wie viel reelle Wurzeln zwischen zwei beliebig gewählten Grenzen a und b liegen, sondern oft genöthigt sein, diesen Zwischenraum erst in kleinere, genauer zu bestimmende Zwischenräume zu zerlegen.

Es sei nämlich die transcendente Gleichung

$$Fx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots = 0$$

gegeben, also $F_1 x = a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots$

Dividirt man Fx durch $F_1 x$, so ergiebt sich

$$Fx = (\alpha_1 + \beta_1 x) F_1 x - x^2 \overset{2}{F}x.$$

Eben so ergiebt sich aus der Division von $F_1 x$ durch $\overset{2}{F}x$:

$$F_1 x = (\alpha_2 + \beta_2 x) \overset{2}{F}x - x^2 \overset{3}{F}x.$$

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens findet man also eine Functionenreihe $Fx, F_1 x, \overset{2}{F}x, \overset{3}{F}x \ldots\ldots$, die jedoch nicht, wie bei den algebraischen Gleichungen, abbricht, sondern beliebig fortgesetzt werden kann. Man bleibe aber bei irgend einer abgeleiteten Function $\overset{r}{F}x$ stehen. Da diese Function, wie Fx, zwischen gewissen Grenzen continuirlich sein muss, so wird man immer zwei Zahlen, m und $n > m$, finden können, so beschaffen, dass $\overset{r}{F}x$ zwischen den Grenzen $x = m$ und $x = n$ dasselbe Zeichen behält. Alsdann hat man folgenden Satz:

Die transcendente Gleichung hat eben so viele reelle Wurzeln, deren Werthe zwischen m und n liegen, als die Differenz der Anzahl der

*) Vergl. Bd. 22. Seite 14. dieses Journals.

Zeichenwechsel in den zwei Reihen Fm, $F_1 m \dots \overset{r}{F} m$ und Fn $F_1 n \dots \overset{r}{F} n$ beträgt.

Der Beweis ist eben so wie bei den algebraischen Gleichungen zu führen und bedarf keiner weitern Erläuterung.

Es sei z. B. die Gleichung

$$Fx = 1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \dots = 0$$

gegeben. Hier ist

$$F_1 x = -1 + \frac{x}{1.2} - \frac{x^2}{(1.2)^2.3} + \frac{x^3}{(1.2.3)^2.4} - \dots$$

und daher

$$\overset{2}{F} x = \frac{1}{2^2.3} - \frac{x}{2^2.3.4} + \frac{x^2}{2^2.3.4.5} - \frac{x^3}{2^2.3^2.4.5.6} + \dots$$

Das allgemeine Glied der letzteren Reihe ist

$$\frac{\pm \frac{1}{2} x^m}{2^2.3^2 \dots m^2.m+1.m+2.m+3},$$

und man findet aus diesem Gliede das folgende, indem man es mit $\frac{x}{m+1.m+4}$ multiplicirt. Sobald $x < 4$ ist, wird mithin jedes positive Glied der Reihe grösser als das folgende negative sein, d. h. $\overset{2}{F} x$ wird zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 4$ immer positiv sein. Man setze daher $r = 2$, so kann man nun bestimmen, wie viele reelle Wurzeln der Gleichung zwischen $x = 0$ und $x = 4$ liegen. Die Functionen $Fx, F_1 x, \overset{2}{F} x$ geben nämlich für $x = 0$ die Zeichenreihe $+ - +$, für $x = 4$ die Zeichenreihe $- + +$, also liegt eine reelle Wurzel zwischen 0 und 4.

21.

Auflösung einiger von Herrn Professor *Steiner* im 1. Hefte 16. Bandes d. J., No. 12., gestellten Aufgaben.

(Von dem Herrn Conrector *Fasbender* in Iserlohn.)

22.

Ist die Grundfläche einer Pyramide nach Form und Grösse gegeben, so kann bei der Frage nach dem Maximum des Inhaltes statt des letztern die Höhe gesetzt werden. Dieses Maximum soll bestimmt werden, unter der Voraussetzung, dass die Summe der Seitenflächen gegeben sei.

Die Ebene der Grundfläche sei die Ebene der xy; sind dann x, y und z die Coordinaten der Spitze, so bezeichnet zugleich z die Höhe der Pyramide. Die Summe der Seitenflächen sei u; sie ist eine Function nur von x, y und z, und man hat

$$u = \text{Const.}$$

Hiernach ist die Höhe z eine Function der beiden Veränderlichen x und y, und die beiden partiellen Differential-Coefficienten derselben sind durch die Gleichungen

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} = 0.$$

gegeben. Durch Verbindung mit den Bedingungen des Maximums für z, nämlich

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} = 0,$$

folgt hieraus:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} = 0.$$

Nun seien $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots. x_m y_m$ die bekannten Coordinaten der Ecken der Grundfläche; l_m sei die Länge der Seite, welche die $m$te Ecke mit der $(m+1)$ten verbindet; φ_m der Winkel, den die verlängerte Seite l_m mit der Axe der x bildet; ϑ_m der Winkel, den die durch l_m gehende Seitenfläche mit der Ebene der xy macht; endlich sei p_m das Loth von dem Fusspuncte der Höhe auf die Seite l_m. Dann ist

$$p_m = (y - y_m) \cos \varphi_m - (x - x_m) \sin \varphi_m \text{ und } \operatorname{cotang} \vartheta_m = \frac{p_m}{z}.$$

Das von der Spitze auf die Seite l_m gefällte Loth hat die Länge $\frac{z}{\sin \vartheta_m}$; also ist $\frac{\frac{1}{2} z l_m}{\sin \vartheta_m}$ der Inhalt der betreffenden Seitenfläche und

$$u = \tfrac{1}{2} z \Sigma \frac{l_m}{\sin \vartheta_m},$$

wo die Summation sich auf die mit m bezeichneten Grössen bezieht und von der ersten bis zur letzten Ecke auszuführen ist.

Die Differentiation von u nach x und y geschieht (da diese Grössen von denen der Summation unabhängig sind) unter dem Summationszeichen, und zwar nur an der Grösse ϑ_m; sie giebt

$$\frac{du}{dx} = -\tfrac{1}{2} \Sigma l_m \sin \varphi_m \cos \vartheta_m, \qquad \frac{du}{dy} = +\tfrac{1}{2} \Sigma l_m \cos \varphi_m \cos \vartheta_m.$$

Hieraus folgt

$$\Sigma l_m \sin \varphi_m \cos \vartheta_m = 0, \qquad \Sigma l_m \cos \varphi_m \cos \vartheta_m = 0.$$

Die gefundene Bedingung bezieht sich auf beide Coordinaten-Axen; da aber über deren Richtung keine Voraussetzung gemacht wurde, so ist dieselbe allgemein folgende:

Wird jede Seite der Grundfläche auf eine in der Ebene der letztern beliebig gezogene Linie projicirt und jede Projection multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den jene Ebene mit der der projicirten Seite angehörigen Seitenfläche bildet, so muss die Summe dieser Producte $= 0$ sein.

Der Winkel φ_m ist in der polygonometrischen Bedeutung zu nehmen, bei welcher unter Anderm

$$\Sigma l_m \sin \varphi_m = \Sigma l_m \cos \varphi_m = 0.$$

Der Ausdruck von p_m gilt für alle Werthe von φ_m, in der Voraussetzung, dass p_m auf der dem Polygone zugewandten Seite von l_m liegt. Liegt p_m auf der entgegengesetzten Seite, so hat man

$$p_m = (x - x_m) . \sin \varphi_m - (y - y_m) . \cos \varphi_m,$$

und tang ϑ_m wäre bei Anwendung des frühern Ausdrucks negativ. Da aber unter ϑ_m der der Pyramide zugewandter Flächenwinkel verstanden wird, so ist für die zweite Lage von p_m der Winkel von ϑ_m allerdings stumpf. Daher wird p_m für beide Lagen durch den frühern Ausdruck gegeben.

Ist die Grunbfläche der Pyramide einem Kreise umschrieben, und nimmt man dann senkrecht über dessen Mittelpunct die Spitze der Pyramide, so sind

alle Winkel ϑ_m einander gleich, und die so bestimmte Pyramide würde ein Maximum sein, wenn

$$\cos\vartheta . \Sigma l_m \sin\varphi_m = \cos\vartheta . \Sigma l_m \cos\varphi_m = 0$$

wäre. Diese Bedingung wird aber allerdings erfüllt.

26.

Statt der Summe der Seitenflächen soll jetzt die Summe der Seitenkanten constant sein. Sie werden durch u bezeichnet; dann ist

$$u = \Sigma\sqrt{((x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 + z^2)}$$

und die Bedingung des Maximums wird

$$\Sigma\frac{x-x_m}{\sqrt{((x-x_m)^2+(y-y_m)^2+z^2)}} = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{y-y_m}{\sqrt{((x-x_m)^2+(y-y_m)^2+z^2)}} = 0.$$

Eine beliebige, durch die Spitze mit der Grundfläche parallel gezogene Linie soll mit der Axe der x den Winkel χ und mit der $m$ten Seitenkante den Winkel α_m bilden. Mit Hülfe der sechs Winkel, die von der Parallelen und von der $m$ten Seitenkante mit den drei Coordinaten-Axen gebildet werden, findet man

$$\cos\alpha_m = \cos\chi . \frac{x-x_m}{\sqrt{((x-x_m)^2+(y-y_m)^2+z^2)}} + \sin\chi . \frac{y-y_m}{\sqrt{((x-x_m)^2+(y-y_m)^2+z^2)}}.$$

Hieraus folgt, da der Winkel χ von den mit m bezeichneten Grössen unabhängig ist:

$$\Sigma\cos\alpha_m = \cos\chi . \Sigma\frac{x-x_m}{\sqrt{((x-x_m)^2+(y-y_m)^2+z^2)}} + \sin\chi . \Sigma\frac{y-y_m}{\sqrt{((x-x_m)^2+(y-y_m)^2+z^2)}},$$

oder

$$\Sigma\cos\alpha_m = 0,$$

also die Bedingung des Maximums, welche bereits in der gestellten Aufgabe mitgetheilt ist. Da das Resultat von dem Winkel χ unabhängig ist, so kann die durch die Spitze gezogene Linie beliebig in der Ebene angenommen werden, welche man parallel mit der Grundfläche durch die Spitze legt.

Ist die gefundene Bedingung erfüllt und man trägt auf jede der Seitenkanten der Pyramide, von der Spitze an, gleiche Kräfte auf, so ist die Summe ihrer Projectionen auf jede durch die Spitze mit der Grundfläche parallel gezogene Linie gleich 0: ein Beweis, dass die Ebene, in welcher jene Parallelen liegen, und die Ebene der Grundfläche selbst, auf der Resultirenden jener Kräfte senkrecht steht. Hieraus ergiebt sich ein neuer Ausdruck jener Bedingung.

29.

Von einem Dreiecke ist die Grundlinie und die Summe der Schenkel gegeben; die Spitze liegt demnach in einer Ellipse, deren Brennpuncte und grosse Axe bekannt sind. Die Gleichung dieser Ellipse sei $a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$. Sind nun x und y die Coordinaten der Spitze, so hat man $a\pm ex$ als Ausdruck für die Länge der Schenkel, so wie $\frac{1}{2}(x\mp ae)$ und $\frac{1}{2}y$ als Coordinaten ihrer resp. Schwerpuncte.

Die Flächen, welche die Schenkel beschreiben, sollen wohl durch Rotation um die Linie A entstehen. Es sei deren Gleichung

$$y=x\operatorname{tang}\varphi+n.$$

Der senkrechte Abstand eines Puncts $(x'y')$ von ihr ist

$$-y'\cos\varphi+x'\sin\varphi+n\sin\varphi,$$

die Abstände der genannten Schwerpuncte von ihr sind daher

$$-\tfrac{1}{2}y\cos\varphi+\tfrac{1}{2}(x\mp ae)\sin\varphi+n\sin\varphi,$$

und nach dem *Guldin*'schen Satze erhält man als Ausdruck der von beiden Schenkeln zusammen beschriebenen Fläche:

$$2\pi(a+ex)\left(-\tfrac{1}{2}y\cos\varphi+\tfrac{1}{2}(x-ae)\sin\varphi+n\sin\varphi\right)$$
$$+2\pi(a-ex)\left(-\tfrac{1}{2}y\cos\varphi+\tfrac{1}{2}(x+ae)\sin\varphi+n\sin\varphi\right),$$

oder

$$2\pi a.\{-y\cos\varphi+x\sin\varphi(1-e^2)+2n\sin\varphi\}.$$

Da durch die Gleichung der Ellipse y von x abhängt, so ist dieser Ausdruck eine Function von *einer* Veränderlichen; die Bedingung für das Maximum oder Minimum jener Flächensumme ist daher

$$\cos\varphi.\frac{dy}{dx}=\sin\varphi(1-e^2),$$

oder, da bei der Ellipse $\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$ ist:

$$-\cos\varphi.\frac{b^2x}{a^2y}=\sin\varphi(1-e^2),\qquad\text{oder}$$
$$y=-x.\operatorname{cotang}\varphi.$$

Die Spitze des Dreiecks muss also in dem Perpendikel von der Mitte der Grundlinie auf die Rotations-Axe liegen. Dieses hat mit der Ellipse zwei Durchschnitte, denen gleiche und entgegengesetzte Coordinatenwerthe entsprechen. Der zweite Differential-Coefficient nach x der Flächensumme ist

$$-2\pi a\cos\varphi\frac{d^2y}{d^2},$$

oder, da für die Ellipse $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}$ ist:

$$-\frac{2\pi b^4 \cos\varphi}{ay^3}.$$

Der Durchschnitt mit positiven y liefert also das Minimum, der andere das Maximum der Flächensumme, im Falle der Winkel φ spitz ist; umgekehrt verhält es sich, wenn φ stumpf ist. Aber in beiden Fällen wird das Minimum von dem Puncte geliefert, welcher der Rotations-Axe am nächsten ist; von dem andern Puncte dagegen das Maximum.

Erzeugen zwei der anfänglichen Bedingung entsprechende Dreiecke gleiche Flächensummen F, so liegen ihre Spitzen auf dem Orte, dessen Gleichung

$$2\pi a.\{-y\cos\varphi + x\sin\varphi.(1-e^2) + 2n\sin\varphi\} = F,$$

oder

$$y = x\,\text{tang}\,\varphi.(1-e^2) + \text{Const.},$$

ist, also auf einer Sehne, welche durch jenes Perpeneikel halbirt wird. Ist diese Sehne ein Durchmesser, so liegt F in der Mitte zwischen dem Maximum und dem Minimum.

Iserlohn, im September 1843.

22.

Remarques sur la condition de l'egalité de deux racines d'une équation algébrique; et sur quelques théorèmes de Géométrie, qui en suivent.

(Par Mr. *F. Joachimsthal* de Berlin.)

1.

Soit

$$1. \quad ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a^n = 0$$

l'équation générale de $n$ième degré, et

$$\Delta(x_1, x_2, \dots x_n)$$

le produit de toutes les $\frac{1}{2}(n(n-1))$ différences des racines $x_1, x_2, \dots x_n$ de l'équation (1.). L'expression $\Delta(x_1, \dots x^n)^2$ sera une fonction symétrique de ces racines, qui peut être exprimée par leur somme s_1 et par les sommes s_2, $s_3, \dots$ de leurs combinaisons à trois, quatre, et ainsi de suite. En substituant les valeurs de ces sommes

$$s_1 = -\frac{a_1}{a}, \quad s_2 = \frac{a_2}{a}, \quad s_3 = \frac{a_3}{a}, \dots,$$

on introduit des fractions dont les dénominateurs sont les différentes puissances de a. Il est facile de voir que $a^{-(2n-1)}$ est la plus haute des puissances négatives contenues dans Δ^2, ce qui exige, que Δ^2 soit de la $2(n-1)$ième dimension par rapport a $s_1, s_2, s_3, \dots$ En effet, une fonction symétrique des racines $x_1, x_2, \dots x_n$, dont x_1^k est la puissance la plus haute de x_1, si on l'exprime par $s_1, s_2, \dots$ sera au moins de la $k$ième dimension par rapport à $s_1, s_2, \dots$, ces quantités étant linéaires par rapport aux racines. Mais on démontrera aussi, que le nombre des dimensions ne peut surpasser k (Cf. *Gauss* „Demonstratio nova altera, omnem functionem algebraicam" etc. Gottingae 1816). Dans l'expression Δ^2 ce sont les facteurs $(x_1-x_2)^2, (x_1-x_3)^2, \dots$ $\dots (x_1-x_n)^2$ qui renferment x_1; donc $x_1^{(2n-1)}$ sera la puissance la plus haute, c. q. f. d.

En multipliant Δ^2 par $a^{2(n-1)}$, on fait disparaître tous les dénominateurs. Soit $a^{2(n-1)}\Delta^2 = L$, on sait que

$$2. \quad L = 0$$

est la condition la plus simple qui doit avoir lieu pour que l'équation (1.) ait une racine double. Tous les termes en L qui ne contiennent pas a_n, sont affectés du facteur a_{n-1}^2; c'est ce que nous allons prouver.

En posant $a^n = 0$, il faut qu'une des racines de (1.) s'evanouisse, p. e. x^n; alors les quantités $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ sont les racines de l'équation

$$3. \quad ax^{n-1} + a_1 x^{n-2} + a_2 x^{n-3} + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

L'expression $\Delta(x_1, x_2, \ldots x_n)^2$ étant égale à

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})^2 (x_n - x_1)^2 (x_n - x_2)^2 \ldots (x_n - x_{n-1})^2,$$

elle se réduit à

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})^2 x_1^2 x_2^2 \ldots x_{n-1}^2.$$

Mais on a

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1} = \pm \frac{a_{n-1}}{a},$$

donc, en substituant cette valeur, on aura

$$4. \quad L = a_{n-1}^2 a^{2(n-2)} \Delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})^2.$$

et en fésant

$$L_1 = a^{2(n-2)} \Delta(x_1, x_2, \ldots x_{n-1})^2,$$

on obtient

$$L = a_{n-1} L; \quad \text{c. q. f. d.}$$

On voit d'après ce que nous avons démontré, que la condition $L_1 = 1$ rend égales deux racines de l'équation (3.). De même il peut être prouvé, que L_1 se réduit à $a_{n-2}^2 L_2$ en fesant $a_{n-1} = 0$, et que $L_2 = 0$ a la même signification pour l'équation

$$ax^{n-2} + a_1{}^{n-3} + \ldots + a_{n-2} = 0.$$

En poursuivant, on parviendra à $L_{n-2} = a_1^2 - 4aa_2$. On sait que $L_{n-2} = 0$ rend égales les deux racines de $ax^2 + a_1 x + a_2 = 0$. En fesant $a_2 = 0$, L_{n-2} se réduit à a_1^2.

Il suit de ces rémarques, que L peut être présenté sous la forme

$$L = B_n + a_{n-1}^2 \{B_{n-1} + a_{n-2}^2 \{B_{n-2} + a_{n-3}^2 \{B_{n-3} + \ldots\}\}\}.$$

L'expression B_{n-1} ne contient pas a_n,
B_{n-2} - - - a_n, a_{n-1},
B_{n-3} - - - a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, et ainsi de suite.

On trouvera dans L un terme $a_{n-1}^2 a_{n-2}^2 \ldots a_2^2 a_1^2$ dont le coefficient est l'unité positive. L'expression L étant la même en changeant les deux séries des quantités

$$a_n \; a_{n-1} \; a_{n-2} \ldots a_2 \quad a_1 \quad a,$$
$$\text{et} \quad a \; a_1 \quad a_1 \quad \ldots a_{n-2} \; a_{n-1} \; a_n,$$

on voit, que L est aussi susceptible de la forme suivante:

$$L = A + a_1^2 \{A_1 + a_2^2 \{A_2 + a_3^2 \{A_3 \ldots\}\}\},$$

où A_1 ne contient pas a,
A_2 - - - a, a_1,
A_3 - - - a, a_1, a_2 etc.

2.

Dans les recherches sur les surfaces et courbes algébriques, outre les coordinées ordinaires, on a introduit une quantité w, dont la valeur numérique est égale à l'unité. C'est en rendant par w homogènes les équations de ces lieux géométriques, qu'on a simplifié leur théorie.

Soient f, g, h trois points situés en ligne droite, dont les coordonnées soient X, Y, W; x, y, w; $\xi, \eta, \tilde{\omega}$, où $W = w = \tilde{\omega} = 1$. Soient r et ϱ les distances du premier point des deux autres. Nous supposerons que le quotient $\frac{r}{\varrho}$ est négatif, si f est entre g et h, et positif dans le cas contraire. On aura les équations suivantes:

$$\frac{X-x}{X-\xi} = \frac{r}{\varrho}, \qquad \frac{Y-y}{Y-\eta} = \frac{r}{\varrho}, \qquad \text{ou bien}$$

$$X(\varrho - r) = x\varrho - \xi r; \qquad Y(\varrho - r) = y\varrho - \eta r,$$

auxquelles on peut ajouter l'équation identique

$$W(\varrho - r) = w\varrho - \tilde{\omega} r.$$

Donc la ligne droite qui passe par g et h, peut être exprimée par le système des trois équations suivantes

$$5. \qquad X = \frac{\varrho x - r\xi}{\varrho - r}, \qquad Y = \frac{\varrho y - r\eta}{\varrho - r}, \qquad W = \frac{\varrho w - r\tilde{\omega}}{\varrho - r}.$$

On connait les coordonnées d'un de ses points, le rapport des deux variables indépendantes r et ϱ étant donné.

Soit

$$6. \qquad \varphi(X, Y, W) = 0$$

l'équation d'une courbe algébrique du dégré n, que nous supposons rendue homogène par W, comme nous l'avons mentionné plus haut. Nous chercherons les l'intersections de cette courbe avec la droite (5.). En substituant les valeurs (5.) dans l'équation (6.), on obtient

$$\varphi\left(\frac{\varrho x - r\xi}{\varrho - r}, \frac{\varrho y - r\eta}{\varrho - r}, \frac{\varrho w - r\tilde{\omega}}{\varrho - r}\right) = 0,$$

ou, en multipliant par $(\varrho - r)^n$:

$$7. \qquad \varphi(\varrho x - r\xi, \ \varrho y - r\eta, \ \varrho w - r\tilde{\omega}) = 0.$$

En développant suivant les puissances de r et ϱ, on aura au lieu de (7.):

$$8. \qquad \varrho^n p - \varrho^{n-1} r \frac{p_1}{1} + \varrho^{n-2} r^2 \frac{p_2}{1.2} - \dots + (-1)^n r_n \frac{p_n}{1.2 \dots n} = 0.$$

Cette équation fournit les différentes vuleurs de $\frac{r}{\varrho}$, par lesquelles les n intersections de la droite (3.) et de la courbe (6.) sont déterminées. Quant aux coefficients p, p_1, on aura les valeurs suivantes:

$$p = \varphi(x, y, w),$$
$$p_1 = \xi \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial p}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial p}{\partial w},$$
$$p_2 = \xi \frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial p_1}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial p_1}{\partial w},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_n = \xi \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} + \eta \frac{\partial p_{n-1}}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial p_{n-1}}{\partial w}.$$

Les expressions $p, p_1, p_2, \dots p_n$ sont des dégrés $n, n-1, n-2 \dots 0$ par rapport aux quantités x, y, w, et des dégrés $0, 1, 2, \dots n$ par rapport à $\xi, \eta, \tilde{\omega}$. L'équation $p = 0$ est la même que l'équation de la courbe donnée. Si l'on tire du point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$, ou h, toutes les tangentes possibles, dont le nombre est $n(n-1)$, les points de contact sont sur la courbe du $(n-1)$ième dégré $p_1 = 0$. Si l'on tire les tangentes à celles-ci, les points de contact sont sur la courbe du $(n-2)$ième degré $p_2 = 0$; et ainsi de suite. On a nommé ces différentes courbes première seconde etc. polaires de la courbe donnée par rapport au point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$; elles jouissent de propriétés métriques très-remarquables.

Si les deux points g et h, ou (x, y, w) et $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$, sont choisis de manière que la ligne droite gh, ou (5.), devienne une tangente à la courbe donnée, deux des racines de l'équation (8.) seront égales. Désignons par $L = 0$, comme nous l'avons fait ci-dessus, la condition, à laquelle doivent satisfaire les coefficients $p, p_1, \dots$ de l'équation (8.): il est clair, qu'en posant les coordonnées $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$ constantes et (x, y, w) variables, la condition $L = 0$ donnera tous les points qui, avec le point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$, déterminent des tangentes à la courbe donnée; c. a. d. l'équation $L = 0$ représente l'ensemble des tangentes qui passent par le point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$.

Soient $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, ... $t_{n(n-1)} = 0$ les équations de ces tangentes. Pour les trouver il faut resoudre d'une équation du degré $n(n-1)$, ce qui en générale est impossible. Mais on peut trouver l'expression du produit $t_1, t_2, \dots t_{n(n-1)} = 0$, qui représente également différentes tangentes; car ce produit ne dépend que des fonctions symétriques des racines de l'équation algébrique. C'est ce produit qui est donné immédiatemment par la quantité L.

Voila le théorème dont M. *Cayley* a fait mention dans le mémoire No. 2. tome 34. de ce journal, imprimé avant celui-ci; il l'a présenté sous une forme peu différente de la précédente.

Nous prendrons pour exemple les courbes du troisième degré. Soit

$$p=f(x,y,\varpi)=ax^3+by^3+c\varpi^3+3dx^2y+3d'x^2\varpi+3ey^2\varpi+3e'y^2x+3f\varpi^2x+3f'\varpi^2y+6gxy\varpi$$

$$\begin{aligned}p_1=3f_1= \; & 3\xi(ax^2+e'y^2+f\varpi^2+2gy\varpi+2d'\varpi x+2dxy)\\ & +3\eta(dx^2+by^2+f'\varpi^2+2ey\varpi+2g\varpi x+2e'xy)\\ & +3\tilde{\omega}(d'x^2+ey^2+c\varpi^2+2f'y\varpi+2f\varpi x+2gxy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_2=6f_2= \; & 6\xi^2(ax+dy+d'\varpi)+6\eta^2(e'x+by+e\varpi)+6\tilde{\omega}^2(fx+f'y+c\varpi)\\ & +12\eta\tilde{\omega}(gx+ey+f'\varpi)+12\tilde{\omega}\xi(d'x+gy+f\varpi)+12\xi\eta(dx+e'y+g\varpi)\end{aligned}$$

$$p_3=6f_3=6a\xi^3+6b\eta^3+6c\tilde{\omega}^3+18\xi^2\eta+18d'\xi^2\tilde{\omega}+18e\eta^2\tilde{\varphi}+18e'\eta^2\xi+18f\tilde{\omega}^2\xi+18f'\tilde{\omega}^2\eta+36g\xi\eta\tilde{\omega}.$$

Il est fàcile de voir que les expressions f, f_3 et f_1, f_2 se transforment les unes dans les autres par un changement des lettres x, y, ϖ et $\xi, \eta, \tilde{\omega}$; ce qui n'est qu'un cas particulier d'un théorème général. Les équations de $f=0$, $f_1=0$, $f_2=0$ sont celles de la courbe et de ses polaires par rapport au point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$. L'équation (8.) se transforme en

$$f-3f_1\frac{r}{\varrho}+3f_2\frac{r^2}{\varrho^2}-f_3\frac{r^3}{\varrho^3}=0,$$

et la condition de L d'une racine double est

$$9. \quad (ff_3-f_1f_2)^2-4(f_1^2-ff_2)(f_2^2-f_1f_3^2)=0.$$

Telle est l'équation du système des tangentes qui passent par le point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$. Pour trouver les intersections de ces tangentes et de la courbe, il faut combiner l'équation (9.) avec celle de la courbe $f=0$. Alors l'équation (9.) se réduit à

$$f_1^2(-3f_2^2+4f_1f_3^2)=0.$$

Le facteur f_1^2 indique, que les lignes représentées par (9.), sont des tangentes à la courbe $f_0=0$, et que les points de contact sont situés sur la section conique $f_1=0$. Les autres intersections de ces tangentes sont situées sur la conique

$$10. \quad -3f_2^2+4f_1f_3^2=0.$$

On voit, que la conique (10.) et la polaire $f_1=0$ ont un contact double, et que la chorde du contact est la polaire $f_2^2=0$. Mais en tirant les deux tangentes de $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$ à la courbe $f_1=0$, on sait que la chorde de contact est également $f_2=0$; d'où ressort le théorème suivant:

En tirant d'un point h six tangentes à une courbe du troisième degré, les points de contact sont situés sur une section conique (A); les tangentes coupent la courbe en six autres points, qui sont également situés sur une conique B; les coniques A et B ont un contact double, et les tangentes communes passent par le point h.

La première partie du théorème est connue; mais on n'avait pas encore l'équation (10.) de la conique B.

On peut encore déterminer la conique B par une rélation métrique.

3.

En fésant usage des développements algébriques du No. 1., on peut généraliser le théorème précédent. Soit $p_i = 0$ une courbe algébrique du dégré i, et posons

$$11. \quad \xi \frac{\partial p_i}{\partial x} + \eta \frac{\partial p_i}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial p_i}{\partial w} = p_{i+1}, \qquad \xi \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x} + \eta \frac{\partial p_{i+1}}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial p_{i+1}}{\partial w} = p_{i+2}.$$

Si l'équation d'une autre courbe algébrique peut être présentée sous la forme

$$12. \quad Up_i + Vp_{i+1}^2 = 0,$$

celle-ci et la courbe $p_i = 0$ auront $i(i-1)$ tangentes communes, qui passent par $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$. En effet, pour qu'une tangente à la courbe (12.) passe par $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$, les coordonnées du point de contact doivent satisfaire à la condition

$$\xi \frac{\partial (Up_i + Vp_{i+1}^2)}{\partial x} + \eta \frac{\partial (Up_i + Vp_{i+1}^2)}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial (Up_i + Vp_{i+1}^2)}{\partial w} = 0,$$

ou bien à

$$Up_{i+1} + p_i\left(\xi \frac{\partial U}{\partial x} + \eta \frac{\partial U}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial U}{\partial w}\right) + 2p_{i+1}p_{i+2}V + p_{i+1}^2\left(\xi \frac{\partial V}{\partial x} + \eta \frac{\partial V}{\partial y} + \tilde{\omega} \frac{\partial V}{\partial w}\right) = 0.$$

Mais les intersections de $p_i = 0$, et $p_{i+1} = 0$, qui toutes sont situées sur la courbe (2.), satisfont à cette condition; et comme toutes les tangentes à $p_i = 0$ dans ces mêmes points passent par le point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$, les courbes $p_i = 0$ et (12.) ont $i(i-1)$ tangentes communes; c. q. f. d.

Soit $L = 0$ l'équation du système des tangentes à la courbe du $n$ième degré $p = 0$, issues du point $(\xi, \eta, \tilde{\omega})$ ou h, il est clair, par ce que nous avons démontré plus haut, que L est susceptible de la forme $pU + p_1^2 L_1$, où la dimension de L est $n(n-1) - 2(n-1) = (n-1)(n-2)$; de même L_1 peut être mis sous la forme $p_1 U_1 + p_2^2 L_2$, où L_2 est une expression de la $(n-2)(n-3)$ième dimension; et ainsi de suite.

On obtient par ces considérations le théorème suivant:

Les $n(n-1)$ tangentes à une courbe $p = 0$ du $n$ième degré, qui passent par un point h, ont leur points de contact dans une courbe $p_1 = 0$ du degré $n-1$; elles coupent la courbe $p = 0$ dans $n^2(n-1) - 2(n-1) = n(n-1)(n-2)$ nouveaux points, qui sont sur une courbe L_1 du degré $(n-1)(n-2)$; les courbes L_1 et p_1 ont $(n-1)(n-2)$ tangentes communes qui passent par le point h.

Berlin en November 1846.

Gedruckt bei J. Petsch in Berlin.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 33 Heft 4.

Fac-simile einer Handschrift von Newton.

For Mr Cotes Professor of Astronomy in the University of Cambridge

Sr

have printed off [illegible] send me a copy of them I will send you a further supply of wooden cutts. I am

London. Octob. 11.
1709.

Yor most humble
& faithful servant
Is. Newton



